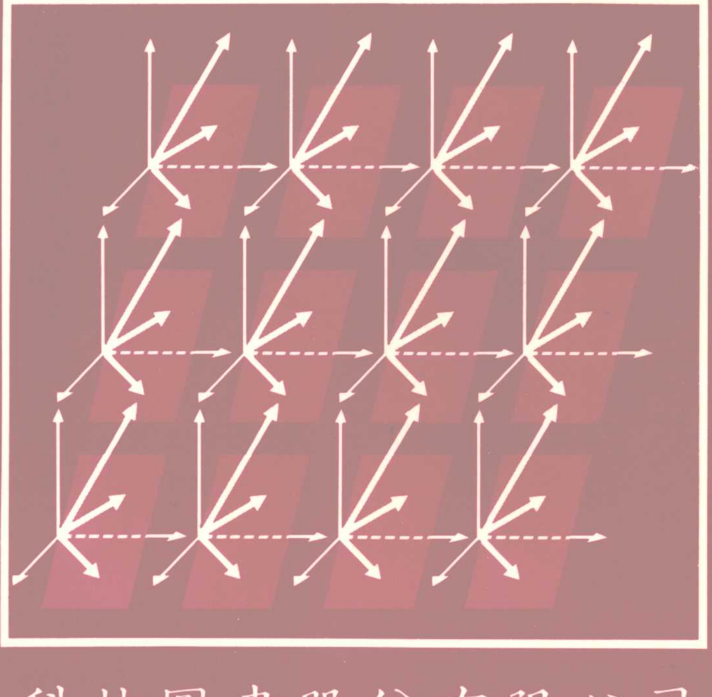
應用線性代數

Elementary Linear Algebra with Applications

原著者：Rorres／Anton
詳述者：毛　廸



科技圖書股份有限公司

應用線性代數

原著者：Rorres／Anton
詳述者：毛　廸

科技圖書股份有限公司

行政院新聞局登記證　局版台業字第 1123 號

應用線性代數

原著者：Rorres / Anton
譯述者：毛　迪
發行人：趙　國　華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段 49 號四樓之 1
電　話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號 0015697-3

七十七年十一月初版　　特價新台幣 150 元

序

本書取材自商學、經濟學、工程科學、物理學、計算機科學、幾何學、近似理論、生態學、社會學、人口統計學以及遺傳學等科中的 20 個應用問題。這 20 個應用問題大都各自獨立，故在每一應用問題前，列出研讀各個問題必需熟習的「預備知識」。因此，老師可針對實際需要，彈性的選取這些應用問題適當的講授。

本書包括 20 個線性代數應用問題。共分成二十章，除十三章是十四章的預備課程外，其餘各章都是獨立的應用。因此，即可視實際需要或興趣，刪掉或重排各章的順序。每一章的前面都先列出研讀該章應具備的知識，因此，讀者可根據本身判斷是否有研讀該章的能力。

由於 20 個應用問題的難易程度不同，因此依據難易程度將各個問題歸類成三個等級。即初級、中級與高級分級的標準係依據各應用問題的難易程度，與所需預備知識的多寡無關。因此，一個要求「預備知識」較少的問題其難度評價可能要比要求「預備知識」較多的問題爲高。

由於本書的主要目的是說明線性代數的應用，因此，若干證明常被省略。本書的應用問題，假設讀者已熟習「預備知識」所列的前題而編寫的，每當需要使用其他科學範圍的結果時，儘可能將其詳細說明（但常省略證明）。因此，只要讀者熟習「預備知識」所列的內容，便已具有研讀該章的能力。

應用線性代數

目　　錄

序

第一章　通過特定點繪製曲線與曲面

第二章　平面幾何

第三章　剛體平衡

第四章　圖　論

第五章 對局理論

第六章 分配問題

第七章 Markov鏈

第八章 Leontief經濟模式

第九章 森林管理

第十章 電腦繪圖

第十一章 平衡溫度分佈

第十二章 基因上的應用

第十三章 特定年齡人口成長

第十四章 動物群體的收穫

第十五章 最小平方湊和

第十六章　用於人類聽覺的最小平方模式

第十七章　三次放樣帶插值法

第十八章　密碼通訊

第十九章　電腦斷層攝影

第二十章　電路網路

習題答案

第一章

通過特定點繪製曲線與曲面

本章目的是說明行列式的一種應用技巧。利用此技巧，可繪出通過特定點的直線、圓以及一般二次曲線（圓錐曲線）。同時，此技巧亦可推廣到三度空間，繪出三度空間中通過特定點的平面與球面。

預備知識：線性方程式組
行列式
解析幾何

以下定理，是由Anton 着基本線性代數第五版中譯本中的1-7節定理15與2-3節定理7彙總而得。

【定理1-1】 一組方程式數目與其未知數數目相同的齊次線性方程式組，具一非顯明解，若且唯若，此方程式組的係數矩陣行列式值爲零。

現將說明如何使用以上結果，定出通過特定點的曲線或曲面的方程式。

1-1 通過兩點定一直線

設已知平面上相異兩點（x_1，y_1）與（x_2，y_2），必有唯一的一條直線

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0 \qquad (1.1)$$

通過此兩點（見圖1.1）。注意，式（1.1）中，係數c_1，c_2與c_3不全爲零，除非用一常數相乘，否則這些係數必爲唯一的。因（x_1，y_1），（x_2，y_2）位於直線(1)上，故將其代入式（1.1）中。

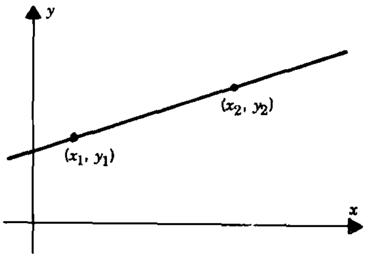


圖 1.1

$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0 \qquad (1.2)$$

$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0 \qquad (1.3)$$

現將式(1.1)，(1.2)與(1.3)列在一起，並改寫成

$$\begin{aligned} xc_1 + yc_2 + c_3 &= 0 \\ x_1c_1 + y_1c_2 + c_3 &= 0 \\ x_2c_1 + y_2c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

形成三個方程式其係數皆爲 c_1，c_2，c_3 的齊次線性方程式組。因 c_1，c_2 與 c_3 不全爲零，故此方程式組有一非顯明解(nontrivial solution)，並由此得知方程式組的行列式值必爲零，亦即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.4)$$

因此，直線(1)上的每一點皆能滿足式(1.4)；反之，亦能證明，能滿足式(1.4)的每一點，必位在直線(1)上。

【例題 1.1】

求通過點(2，1)與(3，7)的直線方程式。

解：將此兩點的座標（2，1），（3，7）代入式（1.4）得

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

將以上的行列式沿第一行作餘因子式，則得

$$-6x + y + 11 = 0$$

1-2　通過三點定一圓

假設已知平面上不共線的三點（x_1，y_1），（x_2，y_2）與（x_3，y_3），由解析幾何得知，必有唯一的圓

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0 \qquad (1.5)$$

通過此三點（見圖 1.2）。將以上三點的座標代入式（1.5）中，則得以下三個方程式

$$c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2x_1 + c_3y_1 + c_4 = 0 \qquad (1.6)$$
$$c_1(x_2^2 + y_2^2) + c_2x_2 + c_3y_2 + c_4 = 0 \qquad (1.7)$$
$$c_1(x_3^2 + y_3^2) + c_2x_3 + c_3y_3 + c_4 = 0 \qquad (1.8)$$

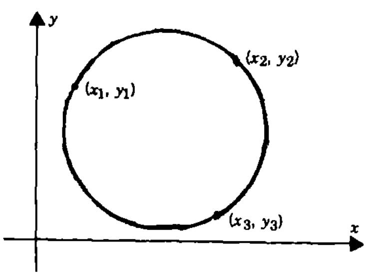


圖 1.2

如前所述，式(1.5)到(1.8)形成對 c_1，c_2 與 c_3 具有一非顯明解的齊次線性方程組，因此，其係數矩陣的行列式值爲零，亦即

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.9}$$

此爲圓方程式的行列式形式。

【例題1.2】

求通過相異三點(1，7)，(6，2)與(4，6)的圓方程式。

解：將以上三點的座標值代入式(1.9)，得

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

此行列式可化簡成

$$10(x^2+y^2) - 20x - 40y - 200 = 0$$

上式又可改寫成標準形爲

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

此爲圓心(1，2)，半徑5的圓。

1-3　通過五點定一二次曲線(圓錐曲線)

平面上的二次曲線〔包括拋物線、雙曲線、橢圓與此三類曲線的退化形(degenerate forms)〕式爲

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$$

此方程式共含有六個係數。設選取這六個係數中的任一非零數遍除所有係數，可將以上方程式的係數，簡化成五個。因此，只需定出五個

係數值即可，故只要在平面上有相異五點，已足夠定出此二次曲線的方程式（見圖 1.3 ）。

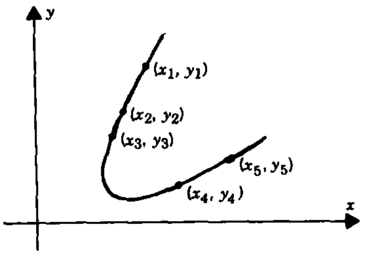


圖 1.3

有如前述，此方程式可用行列式形式表示如下（參考習題 6 ）

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.10)$$

【例題 1.3 】

有一天文學家擬作一小行星繞太陽運轉的軌道。因此，他在該小行星的軌道面上建立以太陽爲原點的 Cartesian 座標系，並沿座標軸以天文單位標示測量值（ 1 天文單位＝地球到太陽的平均距離＝ 93 百萬哩）。依Kepler 第一定律，此小行星的運行軌道爲橢圓形。因此，該天文學家分別在五個不同時點，測得小行星在其軌道的座標值，此五個座標值如下所列

$$(8.025, 8.310), (10.170, 6.355), (11.202, 3.212), (10.736, 0.375), (9.092, -2.267)$$

試求小行星運行軌道方程式。

解：將以上五點的座標值代入式（ 1.10）中，可得

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64.401 & 66.688 & 69.056 & 8.025 & 8.310 & 1 \\ 103.429 & 64.630 & 40.386 & 10.170 & 6.355 & 1 \\ 125.485 & 35.981 & 10.317 & 11.202 & 3.212 & 1 \\ 115.262 & 4.026 & 0.141 & 10.736 & 0.375 & 1 \\ 82.664 & -20.612 & 5.139 & 9.092 & -2.267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

將以上行列式沿第一行作餘因子式，得

$$386.87x^2 - 103.46xy + 447.30y^2 - 2462.8x - 1429.5y - 17260 = 0$$

圖 1.4 所示為通過以上五點測量值的正確軌道圖。

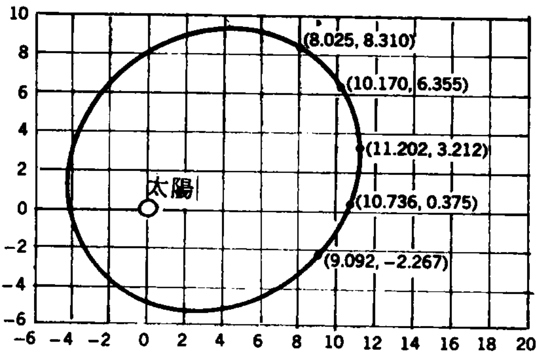


圖 1.4

1-4　通過空間中三點定一平面

在習題 7 中，要讀者證明：在三度空間中，方程式

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

的平面，若通過非共線三點（x_1，y_1，z_1），（x_2，y_2，z_2）與（x_3，y_3，z_3），可用行列式來表示為

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

【例題1.4】

通過非共線三點（1，1，0），（2，0，—1）與（2，9，2）的平面方程式為

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

上列行列式可簡化為

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

1-5　通過空間中四點定一球面

在習題8中，要讀者證明：在三度空間中，方程式

$$c_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

的球面，若通過非共平面四點（x_1，y_1，z_1），（x_2，y_2，z_2），（x_3，y_3，z_3）與（x_4，y_4，z_4），可用行列式來表示為

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.12}$$

【例題1.5】

通過非共平面四點（0，3，2），（1，－1，1），（2，1，0）與（5，1，3）的球面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 35 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

以上行列式可簡化爲

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+5=0$$

若用標準形來表示，則爲

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$$

1-6　習題

1. 求通過下列各點的直線方程式
   (a) $(1, -1), (2, 2)$
   (b) $(0, 1), (1, -1)$
2. 求通過下列各點的圓方程式
   (a) $(2, 6), (2, 0), (5, 3)$
   (b) $(2, -2), (3, 5), (-4, 6)$
3. 求通過點（0，0），（0，－1），（2，0），（2，－5）與（4，－1）的二次曲線方程式。
4. 求通過下列各點的三度空間中的平面方程式
   (a) $(1, 1, -3), (1, -1, 1), (0, -1, 2)$
   (b) $(2, 3, 1), (2, -1, -1), (1, 2, 1)$
5. 求通過下列各點的三度空間中的球面方程式
   (a) $(1, 2, 3), (-1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 2, -1)$
   (b) $(0, 1, -2), (1, 3, 1), (2, -1, 0), (3, 1, -1)$

6. 證明，式（1.10）是通過平面上相異五點的二次曲線方程式。
7. 證明，式（1.11）是三度空間中，通過非共線三點的平面方程式。
8. 證明，式（1.12）是三度空間中，通過非共平面四點的球面方程式。
9. 方程式

$$c_1y + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$$

的一拋物線，若通過平面上非共線三點時，試求其行列式。