国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

现代物理基础丛书 25

微分几何入门与广义相对论

（中册·第二版）

梁灿彬 周 彬

科学出版社
www.sciencep.com

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书　25

微分几何入门与广义相对论

(中册·第二版)

梁灿彬　周　彬

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书中册包含4章（第11~14章）和6个附录（附录B~G）。第11~13章依次介绍时空的整体因果结构、渐近平直时空和Kerr-Newman黑洞，第14章详细讲述与参考系有关的各种问题，包括时空的3+1分解。附录B和C分别简介量子力学的数学基础和几何相，附录D和E分别介绍能量条件和奇性定理，附录F讲述微分几何很重要的Frobenius定理，附录G则用微分几何语言比较详细地讨论了李群和李代数的知识，并专辟一节介绍对物理学特别重要的洛伦兹群和洛伦兹代数。本册仍然贯彻上册深入浅出的写作风格，为降低读者阅读难度采取了多种措施。

本书适用于物理系高年级本科生、硕博士研究生和物理工作者，特别是相对论研究者。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 中册/梁灿彬，周彬著. –2版. —北京：科学出版社，2009
(现代物理基础丛书；25)
ISBN 978-7-03-024057-6

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何–研究生–教材 ②广义相对论–研究生–教材 IV. ①O186.1 ②O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第021741号

责任编辑：胡 凯/责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年4月北京师范大学出版社第一版
2009年3月第 二 版 开本：B5 (720 × 1000)
2009年3月第二次印刷 印张：22 3/4
印数：3 001—6 000 字数：438 000
定价：59. 00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉）

中册前言

作者在修订第一版下册过程中补充了许多内容. 考虑到页数过多不便装订及翻阅, 决定把原定的第二版下册拆分成中册和下册. 中册包含 4 章(第 11~14 章)和 6 个附录(附录 B~G), 下册包含两章(第 15 和第 16 章)和 3 个附录(附录 H~J), 两册厚度大致相当. 中、下册中的 4 成篇幅对于与广义相对论无关的理论物理工作者也同样有参考价值(例如共形变换、量子力学的数学基础、几何相、Frobenius 定理、拉氏和哈氏理论、辛几何、李群和李代数、纤维丛理论、Noether 定理等), 而且阅读时只需要上册前五章的数学知识而不以学过广义相对论为前提.

第 11, 12 章是广义相对论整体理论中的两个重要专题, 其中第 11 章介绍时空的整体因果结构, 第 12 章介绍渐近平直时空. 这是专业性颇强的两个专题, 急于学习中册其他内容的读者也可考虑暂时不读, 因为中册其他章节及附录只在个别情况下用到这两章的知识. 或者, 初学者也可考虑先对第 11, 12 章进行粗读然后再学习后续章节. 所谓粗读, 是指粗略阅读这两章的非选读内容, 只求对一些基本概念和结论有所了解, 不求概念的深究和结论的证明. 其中特别值得阅读的是 §12.2(为此至少要粗略读过 §12.1), 它从零开始介绍闵氏时空的类空、类时和类光无限远(即 i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$), 这些概念不但对学习第 12 章及附录 E 必不可少, 而且在 §13.1 和 §13.3 以及下册(尤其是第 16 章和附录 J)中也要用到. 对"时间机器"一类问题有兴趣的读者不妨阅读 §11.3 的前两页, 更详尽的讨论则可在该两页推荐的文献中找到. 不过, 我们还是建议时间比较充裕的读者比较仔细地学好这两章, 因为这可为学好整个中册及下册打下稳固的基础.

第 13 章介绍 Kerr-Newman(克尔-纽曼)黑洞, 这是广义相对论的一个非常基本而重要的内容. 之所以放在第 13 章, 只是因为在 §13.1 至 §13.3 的少数地方用到第 12 章的个别概念(i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$)和结论(时空的总电荷和总能量的表达式). 本章较有特色的几处讲法是: §13.1 给出了 RN 时空最大延拓的十分详细的推导; §13.3 详述了穿过奇环延拓的必要性、具体做法和结果, 还介绍了 Carter 图; §13.4 证明了能层内不存在静止观者, 并导出了能层内外稳态观者的角速率的取值范围.

第 14 章比较深入细致地讲述了与参考系有关的各个方面的问题, 其中对爱因斯坦转盘以及参考系内的钟同步问题的讨论也许会引起较大范围读者(包括那些更喜欢"用物理思维"讨论相对论问题的许多同行)的兴趣. 第 14 章的另一个十分重要的内容就是时空的 3+1 分解(§14.4), 它不仅对于理解时间和空间的概念有重要帮助, 而且是学习广义相对论的初值问题(§14.5)和哈氏形式(第 15 章)的不可或缺的基础. 希望 §14.4 关于 3+1 分解的讲法对初学者以及广义相对论研究人员都

有所帮助.

为使读者尽早进入物理内容, 本书上册前 5 章只能精选对学习相对论必不可少的最小量微分几何知识. 对学习相对论虽然重要、但可在一开始时暂且避开的其他数学内容则分别放在书中非用不可的章节之前讲授, 或者收入附录之中. 例如, 费米导数和费米移动放在 §7.3, Newman-Penrose 形式放在 §8.7 和 §8.8, 共形变换放在 §12.1, 张量密度和辛几何分别放在 §15.6 和 §15.7, Frobenius 定理以及李群李代数理论分别收入附录 F 和 G, 常曲率空间理论收入附录 J, 特别是专辟附录 I 较详细地介绍纤维丛理论及其在规范场论的应用.

附录 B(量子力学数学基础简介)也许算是与本书书名无直接关系的一个内容. 然而, 根据笔者的经验, 读过本书第 1, 2 章的物理读者对集合、映射、拓扑、矢量空间及其对偶空间、张量、度规等概念比较熟悉, 他们往往跃跃欲试地想把量子力学的内积、左右矢、线性算符以及用正交归一基底展开波函数等一系列问题同上述概念联系起来思考, 力图求得一个更为深入和清晰的理解. 他们希望有一份简明读物作参考. 本附录主要为满足这种需要而产生, 此外也为附录 C(量子力学的几何相)提供必要的基础. 所谓量子力学的数学基础, 此处是指有关泛函分析的知识. 本附录介绍其中最为基础的部分, 并尽量注意同量子力学相联系. 根据泛函分析, 物理工作者很感兴趣的 δ 函数其实是某种连续线性泛函, 我们在讲解连续线性泛函时顺便介绍 δ 函数的数学定义(选读 B-1-2).

自从 Berry 在 1984 年首次明确提出量子力学的几何相概念以来, 几何相的研究就成了国际物理界的热点之一. 笔者在《微分几何与广义相对论》课的教学经历中曾不止一次地利用已讲过的微分几何知识(相当于上册的前 5 章)向学生介绍过几何相的基本概念和某些理论发展, 受到学生欢迎. 附录 C 便是以这方面的讲稿为蓝本写成的.

Penrose 和 Hawking 联手证明的奇性定理(1965~1970)无疑是经典广义相对论的重要定理. 由于这些定理的证明涉及太多的、专业性极强的知识(本书只介绍过其中的一部分), 我们不拟给出定理的证明, 只用附录的形式(附录 E)对奇性定理以及 Penrose 于 1969 年开始提出的宇宙监督假设做一个定性介绍. 奇性定理以及正能定理(小节 12.7.4)的前提都涉及能量条件, 我们特用附录 D 对能量条件做一专题讲解.

李群和李代数的知识对物理工作者的重要性自不待言. 用几何语言表述李群李代数理论有一系列的明显优点. 鉴于本书多处用到李群李代数, 考虑到读者已具有一定的几何基础, 我们在附录 G 中用几何语言讲授这一理论. 在选材时特别注意理论物理工作者的需要, 例如, 我们专辟一节(§G.9)比较系统详尽地讲述在相对论中用得特别多的固有洛伦兹群和洛伦兹代数. 在原子物理学发展早期提出的托马

斯进动是一个理论上有趣而又难懂的问题, 由于本书对它的理论基础——费米移动和洛伦兹群分别有过较为详细的讲授, 读者完全有条件对它取得一个较为透彻的理解. 为帮助读者达到这一目的, §G.9 的最后一小节不惜篇幅对托马斯进动做了比较详细的讨论.

关于选读内容以及习题的说明见上册前言.

与上册类似, 笔者在写作第一版下册时曾请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读初稿的部分章节, 他们是(以姓氏汉语拼音为序): 敖滨, 曹周键, 戴陆如, 高长军, 高思杰, 贺晗, 黄超光, 邝志全, 刘旭峰, 马永革, 强稳朝, 田贵花, 吴小宁, 杨学军, 张红宝, 张芃, 郑驻军, 周彬, 周美柯, 笔者已在第一版下册前言中表示了谢意. 在第二版中、下册的写作过程中, 笔者又与许多同行(含前学生)做过多次讨论, 并吸收了他们许多宝贵的意见和建议, 他们主要有(以姓氏汉语拼音为序): 曹周键, 高思杰, 邝志全, 马永革, 吴小宁, 杨学军, 张昊, 张红宝, 在此再次鸣谢. 作者梁灿彬要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友, 第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生, 他不但是梁步入本领域的优秀启蒙导师, 而且对梁回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中国科学院数学研究所的邝志全研究员, 他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议, 而且在与梁的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使梁受益殊深. 北京师范大学数学系从事泛函分析教学多年的周美珂教授对附录 B 曾做过认真的审阅并提出过许多宝贵的意见和建议, 笔者在此深表谢意.

笔者还要感谢国家科学技术学术著作出版基金的资助, 正是这一资助使本书得以再版. 此外, 本书(第二版)中、下册还受到国家自然科学基金资助项目 10505004 的部分资助, 在此一并鸣谢.

考虑到许多读者非常关心下册的内容, 我们特在中册目录之后给出下册目录预告. 此处再对下册的每章和每个附录的内容做一个十分简单的介绍.

下册第 15 章首先把有限自由度系统的拉氏和哈氏理论推广到场系统(无限自由度系统), 然后讨论广义相对论的哈氏形式. 引力场是约束系统, 我们用相当篇幅介绍 Dirac-Bergmann 关于约束系统的哈氏理论, 并介绍如何将这一理论用于电磁场和引力场.

鉴于黑洞(热)力学对广义相对论以及相关交叉学科非常重要, 我们在下册中增补了第 16 章, 该章首先比较详细地讲授稳态黑洞的热力学(即传统的黑洞热力学), 然后着重介绍在非稳态黑洞力学中起关键作用的孤立视界和动力学视界及其有关定律.

Noether 定理是场论教材几乎必讲的重要基础性定理, 多数教材在讲授该定理的证明时都使用坐标语言, 许多有志于彻底弄懂这一证明的读者学习后往往感

到并未真懂. 然而用几何语言可以给出清晰简洁的证明, 下册附录 H 将给出这一证明并用几何语言对与此有关的一系列问题进行讨论.

纤维丛理论对理论物理工作者的重要性与日俱增, 下册附录 I 将以尽量好懂的方式讲解主纤维丛和伴纤维丛的概念和性质, 特别是主丛和伴丛上的联络. 为帮助读者了解纤维丛理论在规范场论的应用, 我们还专辟两节对没有场论知识的读者介绍规范场论, 再用三节讲解规范场论的丛语言表述, 特别注重在两种理论之间的"架桥"工作.

广义相对论(特别是宇宙论)以及量子场论(特别是超弦理论)的现代发展使德西特时空和反德西特时空再度变得十分重要, 下册附录 J 将比较详细地讨论德西特时空和反德西特时空.

梁灿彬　周　彬

2008 年 4 月于北京师范大学

中册目录

下册目录预告

(可能小有改变)

第 11 章　时空的整体因果结构

§11.1　过去和未来

在狭义相对论中，任一时空点 p 的全体类时和类光矢量(零元除外)被分为指向未来和指向过去两大类(见小节 6.1.6 末). 无论弯曲还是平直时空，一点的切空间并无区别(无非是 4 维矢量空间配以一个洛伦兹度规)，因此弯曲时空中任一点的类时和类光矢量(零元除外)的集合也可类似地分为两大部分. 若只孤立地讨论一点 p，可任意指定其中一个部分为指向未来部分(记作 $\tilde{F}_p$)，其中每一元素称为**指向未来的**(future directed)类时(或类光)矢量，另一部分(记作 $\tilde{P}_p$)的元素则称为**指向过去的**(past directed)类时(或类光)矢量(见图 11-1). 但在讨论全时空时，物理上总希望这种指定在从一个时空点到另一时空点的过渡中是连续的(闵氏时空就如此). 然而并非所有时空都能做到这一点. 考虑以 $S^1\times\mathbb{R}$ (圆柱面)为底流形的 2 维时空，为画图方便，把它沿母线剪开并画成图 11-2. 设其上度规这样给定，使各点的光锥如图 11-2 所示，便无法对指向未来部分($\tilde{F}$)作连续指定. (若按图 11-2 指定，则把左右两竖线粘合后，粘合处的 $\tilde{F}$ 有突变.) 不妨认为这样的时空没有物理意义. 能连续地指定光锥未来部分的时空叫**时间可定向时空**(time orientable spacetime). 今后谈到时空都指时间可定向时空，并认为每一时空都已作了这样的连续指定 (其实上册中早已有这样的默认). 设时空 (M,g_{ab}) 存在一个 C^0 的类时矢量场 t^a，就可把 t^a 在每点 $p\in M$ 的值 $t^a|_p$ 所在的那个部分指定为指向未来部分，这种指定自然是连续的. 因此，存在 C^0 类时矢量场的时空一定是时间可定向时空. 反之也可证明 [见

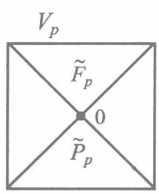

图 11-1　p 点指向过去和未来的类时(及类光)矢量组成子集 $\tilde{P}_p$ 和 $\tilde{F}_p$

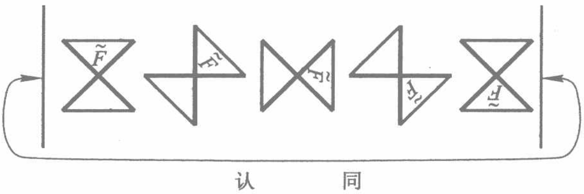

图 11-2　时间不可定向时空一例

Penrose(1972)], 若 (M, g_{ab}) 是时间可定向时空, 则它必存在 C^0 的类时矢量场.

命题 11-1-1　设 p 是4维时空 (M, g_{ab}) 的点, $v^a, u^a \in V_p$ 是指向未来或过去的类时或类光矢量, $v^a \neq 0$, $u^a \neq 0$,

(1)若 v^a, u^a 不都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} <0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相同指向}, \\ >0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相反指向}, \end{cases}$

(2)若 v^a, u^a 都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} =0 \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ 使 } v^a = \beta u^a, & \text{(a)} \\ <0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相同指向, 且 } v^a \neq \beta u^a, & \text{(b)} \\ >0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相反指向, 且 } v^a \neq \beta u^a. & \text{(c)} \end{cases}$

证明　因为任意时空的一点的切空间都一样, 只须对闵氏时空一点 p 证明本命题.

(1) 设 $v^a \in V_p$ 类时, 则总可选惯性系 $\{t, x^i\}$ 使 v^a 切于 t 坐标线, 亦即可选 V_p 的正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $v^a = \alpha (e_0)^a$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.这表明 v^a 在该基底的分量为 $v^\mu = (\alpha, 0, 0, 0)$, 于是 $g_{ab}v^a u^b = \eta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = -\alpha u^0$. 而由图 6-13 关于指向未来和过去的定义可知 v^a 与 u^a 有相同(相反)指向等价于 α 与 u^0 同(反)号, 故

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow \alpha u^0 > 0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相同指向},$$

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow \alpha u^0 > 0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相反指向}.$$

(2) 因 $v^a \in V_p$ 类光且非零, 故总有正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $v^a = \alpha[(e_0)^a + (e_1)^a]$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, 从而 $v^\mu = (\alpha, \alpha, 0, 0)$, 于是

$$g_{ab}v^a u^b = -v^0 u^0 + v^1 u^1 = -\alpha(u^0 - u^1), \tag{11-1-1}$$

$u^a \in V_p$ 的类光性则导致

$$0 = g_{ab}u^a u^b = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2, \tag{11-1-2}$$

由此又得

$$|u^0| \geqslant |u^1|. \tag{11-1-3}$$

(a) $g_{ab}v^a u^b = 0 \Leftrightarrow u^0 = u^1 \Leftrightarrow u^\nu = (u^0, u^0, 0, 0) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$, (11-1-4)

其中第一、二步分别用到式(11-1-1)和(11-1-2).

(b) $g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow u^0 - u^1 \neq 0$ 且与 α 同号

$$\Leftrightarrow u^0 \text{ 与 } \alpha \text{ 同号} \Leftrightarrow u^a \text{ 与 } v^a \text{ 有相同指向}, \tag{11-1-5}$$

其中第一、二步分别用到式(11-1-1)和(11-1-3). 由式(11-1-4)、(11-1-5)便得

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow v^a \neq \beta u^a \text{ 且 } v^a \text{ 与 } u^a \text{ 有相同指向.}$$

(c)证明与(b)类似. □

推论 11-1-2

(1)类光超曲面 Σ 上不存在切于 Σ 的类时矢量.

(2)类光超曲面 Σ 上每点只有一个类光方向, (就是说, $\forall q \in \Sigma$, 设 v^a, u^a 是 q 点的切于 Σ 的类光矢量, 则 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$.) 这就是类光法矢 n^a 的方向.

证明 设 v^a 是点 $q \in \Sigma$ 的切于 Σ 的矢量, n^a 是点 q 的类光法矢, 则 $g_{ab}v^a n^b = 0$. 取命题 11-1-1(1)的 u^a 为 n^b, 便知 v^a 类时会导致 $g_{ab}v^a n^b \neq 0$ 的矛盾, 故 v^a 不能类时. 若 v^a 类光, 取命题 11-1-1(2)的 u^a 为 n^b, 便知 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$. 可见 q 点只有一个类光方向, 就是该点的类光法矢的方向. □

定义 1 C^1 曲线 γ 叫**指向未来类时线**, 若 γ 上每点的切矢是指向未来类时矢量; γ 叫**指向未来因果线**(future directed causal curve), 若 γ 上每点的切矢是指向未来类时或类光矢量(后者含零元). **指向过去类时线**和**因果线**可类似地定义.

注 1 我们以前把观者定义为一条以固有时(线长)为参数的类时线, 现在应在“类时线”前加上“指向未来”.

定义 2 $p \in M$ 的切空间 V_p 的子集 $\{v^a \in V_p \mid g_{ab}v^a v^b = 0\}$ 称为 p 点的**光锥**(light cone).

定义 3 $p \in M$ 的**编时未来**(chronological future) $I^+(p)$ 定义为

$I^+(p) := \{q \in M \mid \exists$ 从 p 到 q 的指向未来类时线$\}$.①

还有一个与 $I^+(p)$ 类似而又有区别的重要定义, 即

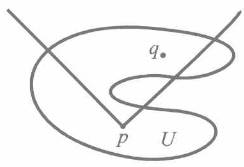

图 11-3 $q \in I^+(p) \cap U$ 但 $q \notin I^+(p, U)$

定义 4 设 U 是 $p \in M$ 的任一邻域, 则 p 的**相对于 U 的编时未来** $I^+(p,U)$ 定义为

$$I^+(p,U) := \{q \in U \mid \exists \text{从} p \text{到} q \text{的位于} U \text{内的指向未来类时线}\}.$$

注 2 ① $I^+(p) = I^+(p,M)$. ②图 11-3 给出闵氏时空中 $I^+(p,U) \neq I^+(p) \cap U$ 的一例. ③把定义 3 和 4 的“未来”换为“过去”, 便得到 $I^-(p)$(p 点的**编时过去**)和 $I^-(p,U)$ 的定义. 这种做法称为“对偶地定义”. ④ p 点的光锥按定义 2 是 p 点的

---

①“从 p 到 q 的曲线”γ 是指 γ : $[a,b] \to M$, 满足 $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$. 本章的“曲线”往往是指曲线映射的像.

切空间V_p(而不是时空流形M)的子集(由p点的所有类光矢量组成), 虽然在狭义相对论中人们常把p点的光锥理解为时空流形$\mathbb{R}^4$中由$x^2+y^2+z^2-t^2=0$定义的子集, 即以p为顶点的圆锥面[亦可表为$\dot{\mathrm{I}}^+(p)\cup\dot{\mathrm{I}}^-(p)$, 顶上加点代表该子集的边界]. 本书通常按定义2使用光锥一词, 只有小节6.1.6, 8.9.2及8.9.3例外, 那里谈到的p点的"光锥面"实际是$\dot{\mathrm{I}}^+(p)$, $\dot{\mathrm{I}}^-(p)$或两者之并.

定义5 $p\in M$的**因果未来**(causal future) $\mathrm{J}^+(p)$定义为

$$\mathrm{J}^+(p):=\{q\in M\,|\,\exists\text{从}p\text{到}q\text{的指向未来因果线}\},$$

p点的**相对于U的因果未来**$\mathrm{J}^+(p,U)$定义为

$$\mathrm{J}^+(p,U):=\{q\in U\,|\,\exists\text{从}p\text{到}q\text{的位于}U\text{内的指向未来因果线}\}.$$

$\mathrm{J}^-(p)$和$\mathrm{J}^-(p,U)$可对偶地定义.

注3 p点本身可看作一条曲线(把$\mathbb{R}$的一个区间映为$\{p\}\subset M$的映射, 即独点线), 其在p点的切矢为零, 因而是类光矢量, 故p点可看作类光曲线. 虽然它既非指向过去亦非指向未来, 但还是规定$p\in\mathrm{J}^+(p)$及$p\in\mathrm{J}^-(p)$. 与此不同, p点不能看作类时曲线, 所以一般来说$p\notin\mathrm{I}^+(p)$. 然而也有例外. 例如, 只要把2维闵氏时空中的直线$t=0$和$t=1$认同(图11-4), 就存在从p经a回到p的类时曲线(是一条闭合的类时线), 从而有$p\in\mathrm{I}^+(p)$. 更有甚者, 事实上这个人造时空的任一时空点都属于$\mathrm{I}^+(p)$, 即$\mathrm{I}^+(p)=M$.

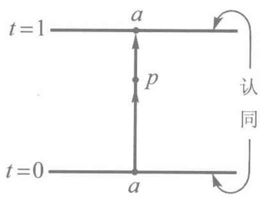

图11-4 闭合类时线pap

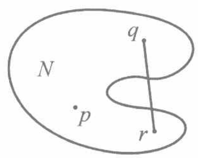

图11-5 非凸邻域示意

定义6 $p\in M$的邻域N称为**凸邻域**(convex neighborhood), 若$\forall q,r\in N$, 有N内的唯一测地线联结q与r. (注: 即使欧氏或闵氏空间, 也并非所有邻域都是凸的, 图11-5就是非凸邻域的一例.) §3.3定义3已讲过法邻域. p点的既凸又法的邻域称为p点的**凸法邻域**(convex normal neighborhood).

注4 ①由定义可知凸法邻域是开子集. ②任一时空的任一点必有凸法邻域. ③一点的法邻域未必是域内其他点的法邻域, 但一点的凸法邻域一定是域内任一点的凸法邻域. ②, ③的证明见Hicks(1965).

命题 11-1-3

(a) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$, (不妨形象地表为“$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$”)

(b) $p\in \mathrm{J}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$, (不妨形象地表为“$\mathrm{J}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$”)

(b′) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{J}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$. (不妨形象地表为“$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\mathrm{I}$”)

证明　(a) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)$ 表明存在从 q 到 p 的指向未来类时线 γ_{qp} 和从 r 到 q 的指向未来类时线 γ_{rq}. 令 $\gamma\equiv\gamma_{rq}\cup\gamma_{qp}$, 在 q 点附近可对 γ 适当“磨光”(round off)使成 C^1 类时线(图 11-6), 便有 $p\in \mathrm{I}^+(r)$. 磨光的可行性见 Penrose(1972)的 **2.23** 节第二段. (b)和(b′)的证明见 Penrose(1972)的 **2.18** 节. □

注 5[选读]　*由于 γ_{rq} 和 γ_{qp} 非常任意, 即使限制在凸法邻域并使用黎曼法坐标也难以写出其具体方程, 因此磨光可行性的证明并不容易. 如果 γ_{rq} 和 γ_{qp} 是测地线, 方程就好写得多. 然而把类时线改为测地线将给出不等价的 $\mathrm{I}^+(p)$ 定义. 为了既用测地线又能得到等价定义, Penrose 想到用分段测地线代替类时线. “分段类时测地线”是由有限段指向未来类时测地线连接而成的连续曲线, 连接处可以不到 C^1. Penrose(1972)称之为一个**旅程**(trip). 用旅程代替 $\mathrm{I}^+(p)$ 定义中的“指向未来类时线”就得到 $\mathrm{I}^+(p)$ 的另一定义, 与原定义的等价性的证明见 Penrose (1972)的 **2.23** 节. 类似地, 把分段因果测地线称为一个**因果旅程**(causal trip), 用因果旅程代替 $\mathrm{J}^+(p)$ 定义中的“指向未来因果线”就得到 $\mathrm{J}^+(p)$ 的等价定义.*

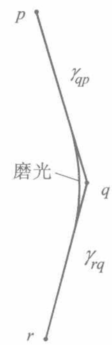

图 11-6　$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$ 示意

一般时空的整体因果特性(结构)可以比闵氏时空复杂. 例如, 设时空点 p, q 满足 $q\in \mathrm{I}^+(p)$, 若是闵氏时空, 就有唯一的测地线从 p 到 q, 它是指向未来类时线; 若是其他时空就未必(可能没有也可能有不止一条测地线从 p 到 q). 然而, 局域地看(在凸法邻域内), 任何时空的因果特性都与闵氏时空相当类似, 具体含义见如下命题.

命题 11-1-4　任意时空 (M, g_{ab}) 的任意点都有凸法邻域 N (见注 4②), 其中任意两点 q 与 p 必有 N 内唯一的测地线相连(凸邻域定义), 而且(本命题内容)

(a) 若 $q\in \mathrm{I}^+(p,N)$, 则 N 内从 p 到 q 的唯一测地线是指向未来类时线;

(b) 若 $q\in \mathrm{J}^+(p,N)-\mathrm{I}^+(p,N),\ q\neq p$, 则 N 内从 p 到 q 的唯一测地线是指向未来类光曲线;

(b′) 若 $q\in \mathrm{J}^+(p,N)-\mathrm{I}^+(p,N),\ q\neq p$, 则 N 内从 p 到 q 的指向未来因果线必为类光测地线.