chu gao zhong
xian jie
jiao cheng

初高中衔接教程

数学

黄厚忠 主编

东南大学出版社

初高中衔接教程

数学

黄厚忠　主编

東南大學出版社

南京

图书在版编目(CIP)数据

初高中衔接教程. 数学/黄厚忠主编. 一南京:东南大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-5641-1319-3

Ⅰ.初… Ⅱ.黄… Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113419 号

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江 汉
社 址	南京市四牌楼 2 号
邮 编	210096
印 刷	镇江中山印务有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	9.25
字 数	180 千字
版 次	2008 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5641-1319-3/O·91
定 价	13.00 元

* 东大版图书若有印装质量问题,请直接联系读者服务部,电话:025—83793906。

前　　言

为什么孩子进入高中后对数学产生恐惧心理？

为什么孩子进入高中后数学成绩一落千丈？

……

相信许多人和我一样经常要面对诸如此类的诘问。我也一直关注这种现象，思考这些问题。有的学生在初中阶段对数学很有兴趣，数学是他的王牌学科，但进入高中后，逐渐疏远数学，对数学产生了厌烦心理，成绩逐步下降，这些现象背后的深层次原因是什么？

我想，没有做好初高中数学教学衔接，没有顺利完成初高中数学教学的过渡交接，是重要原因之一。

本书的特色是：

一、立足初中数学，但不原地踏步。在初中数学结构体系中寻找能与高中知识的结合点，把结合点催生成萌芽点和生长点。通过对知识理论和典型例题深入浅出地分析，巧妙嫁接高一必需的预备知识和方法，使学生在原有的能力基础上得到长足的发展，在知识内容、过程方法、情感态度价值观等方面得以延伸拓展。

二、着眼高中数学，但不提前教学。对高中阶段特别是起始阶段重要的数学方法、思想、原理以及分析问题、解决问题的思维策略逐步渗透，缓冲铺垫。使学生进入高一后感到自然流畅，树立学好数学的自信心。

三、本书特别注重对数学方法、思想的提炼和数学文化的渗透。对重要的方法思想都作了明确的阐述，把数学学习和数学教学等上升到了“大数学”的文化层面上。为此，本书补充了数学家论述数学思想方法的文字和一些数学史料等。

四、本书把启迪学生的思维，让学生思维得到发展作为核心理念。书中安排了大量的思考、分析、评析、总结等内容，培养学生的自主探索精神，赋予学生更大的思维空间，也为教师备课教学提供参考。

五、本书在每一小节后按教学要求都配备了数量不等的练习题，练习题分“阅读理解、思考运用、探究拓展”三个层次，供不同能力的学生选做。每题后都留有空白，学生可直接在书上作答。为方便学生阅读，书后提供了练习题的答案或提示。

一直以来，初高中衔接教学是很多教育专家关心的一个重要课题，在大家的共同努力下，已经从教育学、心理学等方面得到了许多成果。本书是江苏省教研室副主任董林伟特级教师主持的省级重点课题《课堂教学的有效性》的课题研究项目，也是镇江教研室主任朱春晓特级教师主持的省级重点课题《普通中学双案制教学策略研究》的研究项目。

作者调研了多种类型的学校，听取了很多一线教师和教研员的意见，吸收了其他衔接教材的精华，得到了很多启发，在此表示感谢。

特别是，镇江教研室主任朱春晓特级教师为本书定下了写作基调、理论框架、版式体例，也一直关注本书的写作过程，没有他的督促、鞭策、鼓励，本书是不可能完成的；江苏大学副校长、博士生导师田立新教授阅读了本书的初稿，提出了许多宝贵的意见；恩师南京师范大学博士生导师涂荣豹教授和葛军博士、郭桂华特级教师耳提面命，作者诚惶诚恐，唯恐有辱师门；就本书有关问题，作者也曾多次当面向人教版初中数学教材主编林群请教，他的建议使作者受益匪浅。

以上领导专家师长奖掖后学，提携晚进，晚学如我不胜感激。

由于本人学识水平，本书有些地方还很粗糙，定有很多错误，希望各位老师专家拨冗雅正，以便再版时修订。

本书可作为高一新生进入高中学习的预备教材，也可作为初中学生的竞赛辅导用书，也可作为中学教师和师范院校学生的教学参考和学习辅导用书。

编者

2008 年 6 月

目　录

第1章　数与式

第2章　函数的图象和性质

第3章　方程(组)与不等式

第4章　平面几何

第 1 章

数与式

1.1 整式的乘法

1.1.1 乘法公式

我们已经学习了下列一些乘法公式：

(1)平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

(2)完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

我们还可以通过证明得到下列一些乘法公式：

(3)立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

(4)立方差公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

(5)三数和平方公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$；

(6)两数和立方公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

(7)两数差立方公式 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

思考 如何由(3)证明(4)？如何由(6)证明(7)？这种证明方法体现了什么数学思想？

例1 计算：$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

解法一 原式$=(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1$.

解法二 原式$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$.

例2 已知$a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求$a^2+b^2+c^2$的值.

解 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=8$.

练　习

感受·理解

1. 填空：

(1) $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2=(\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a)\cdot($　　　　$)$；

(2) $(4m+$　　　　$)^2=16m^2+4m+($　　　　$)$；

(3) $(a+2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+($　　　　$)$.

2. 选择题：

(1) 若$x^2+\frac{1}{2}mx+k$是一个完全平方式，则k等于(　　)

(A)m^2 (B)$\frac{1}{4}m^2$ (C)$\frac{1}{3}m^2$ (D)$\frac{1}{16}m^2$

(2)不论 a,b 为何实数,$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值( )

(A)总是正数 (B)总是负数

(C)可以是零 (D)可以是正数也可以是负数

3. 计算:

(1) $(4+m)(16-4m+m^2)$

(2) $(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$

(3) $(\frac{1}{5}m-\frac{1}{2}n)(\frac{1}{25}m^2+\frac{1}{10}mn+\frac{1}{4}n^2)$

(4) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$

4. 已知 $x^2-3x+1=0$,求 $x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

思考·运用

5. 当 $3a^2+ab-2b^2=0(a\neq0,b\neq0)$,求$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$的值.

6. 已知 $a=\frac{1}{20}x+20,b=\frac{1}{20}x+19,c=\frac{1}{20}x+21$,求代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值.

探究·拓展

7. 已知 $a+b+c=0$,求 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$的值.

1.2 因式分解

我们有时需要将一个多项式化为几个整式积的形式，这就是我们通常所说的因式分解. 因式分解是最常见也是最重要的代数式变形方法之一. 同学们在初中已经学过了公式法及提取公因式法分解，本节介绍分解因式的其他方法.

1.2.1 十字相乘法

我们知道

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，

反过来，就得到二次三项式 x^2+5x+6 的因式分解形式，即

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

其中常数项 6 分解成 2，3 两个因数的积，而且这两个因数的和等于一次项的系数 5，即 $6=2\times3$，且 $2+3=5$.

一般地，由多项式乘法，

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

反过来，就得到

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

这就是说，对于二次三项式 x^2+px+q，如果能够把常数项 q 分解成两个因数 a，b 的积，并且 $a+b$ 等于一次项的系数 p，那么它就可以分解因式，即 $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

评析▶▶▶

怎样拆分才是有效的，还需要同学们在学习中多揣摩，多练习，才可以做到熟能生巧.

比如 $x^2-3x-28$ 就可以用这种“十字”形的式子表示为 $\begin{array}{ccc}1 & & -7\\ & \times & \\ 1 & & 4\end{array}$，

从而 $x^2-3x-28$ 可以分解为 $(x-7)(x+4)$.

例 1 把下列各式分解因式：

(1) x^2-2x-3；

(2) $-12a^2+17a-6$；

(3) $x+y+(x+y)^2-2$.

解　(1) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.　　$\begin{array}{ccc}1 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -3\\ 1 & & 1\end{array}$

(2) $-12a^2+17a-6=(-3a+2)(4a-3)$

$=-(3a-2)(4a-3)$.　　$\begin{array}{ccc}-3 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & 2\\ 4 & & -3\end{array}$

(3) $x+y+(x+y)^2-2=(x+y)^2+(x+y)-2$

$=[(x+y)+2][(x+y)-1]$.　　$\begin{array}{ccc}1 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & 2\\ 1 & & -1\end{array}$

评析　第(2)题,-12 可以有多种拆分方法,$-12=12\times(-1)=1\times(-12)=6\times(-2)=(-6)\times2=4\times(-3)=(-4)\times3$,同样的 -6 也有多种拆分方法,哪一种组合才能通过十字交叉相乘相加而得 17,同学们要多练习才能熟练掌握这种技巧. 第(3)题,首先将 $x+y$ 看成一个字母,再将它降幂排列,最后用十字相乘法就较简便了.

例 2　分解因式 $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

> 将一个式子或一项看作一个整体,这体现了一个重要的数学思想——**整体思想**.

解　$3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$

$=(3x-y)(x+2y)+(x+9y)-4$　　$\begin{array}{ccc}3x & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -y\\ x & & 2y\end{array}$

$=(3x-y+4)(x+2y-1)$.　　$\begin{array}{ccc}3x-y & \diagup\!\!\!\!\diagdown & 4\\ x+2y & & -1\end{array}$

评析　先将三个二次项用十字相乘法分解因式,再用一次十字相乘法分解因式,此种方法叫做**双十字相乘法**分解因式.

练　习

感受·理解

1. 把下列各式分解因式:

(1) $b^2+3b-10$;　(2) y^2-6y+8;　(3) x^2-5x-6;

(4) $-a^2+7a-12$； (5) $4x^2-20x+25$； (6) $-x^2+5x-6$.

思考·运用

2. 把下列各式因式分解：

(1) $3x^2+bx-2b^2$； (2) $a^2b^2-7ab+10$； (3) bc^3+bd^3；

(4) $6(x-6)+2x^2$； (5) $a^3b-45ab-4a^2b$； (6) $x^2+\frac{1}{x^2}-6$.

探究·拓展

3. 把下列各式分解因式：

(1) $(x-y)(x-y-3)+2$；

(2) $(x^2+3x-3)(x^2+3x+4)-8$；

(3) $(x-1)x(x+1)(x+2)-24$；

(4) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$.

1.2.2 提取公因式法与分组分解法

对于项数比较多的多项式，分解因式时，要先将各项分成几个组，然后将每组分解因式，再从各组中提取公因式，达到分解因式的目的. 所以分组时一定要确保每组有相同的公因式可提取.

例1 分解因式：(1)x^3+9+3x^2+3x；(2)$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$.

思考▸▸

例1(1)还可以怎样分组?

解 (1) x^3+9+3x^2+3x

$=(x^3+3x^2)+(3x+9)$ （分组）

$=x^2(x+3)+3(x+3)$ （每组分解因式）

$=(x+3)(x^2+3)$. （提取相同的公因式）

或 x^3+9+3x^2+3x

$=(x^3+3x^2+3x+1)+8$

$=(x+1)^3+8$

$=(x+1)^3+2^3$

$=[(x+1)+2][(x+1)^2-(x+1)\times 2+2^2]$

$=(x+3)(x^2+3)$.

(2) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$

$=2x^2+(y-4)x-y^2+5y-6$

$=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)$

$=(2x-y+2)(x+y-3)$.

或 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$

$=(2x^2+xy-y^2)-(4x-5y)-6$

$=(2x-y)(x+y)-(4x-5y)-6$

$=(2x-y+2)(x+y-3)$.

例2 已知 $a+2b=3$，求 $a^2+2a+4b^2+4b+4ab-3$ 的值.

分析一 由 $a+2b=3$ 可得 $a=3-2b$，代入未知式中化简可得解.

分析二 可将未知式化简及分解因式，再整体代入可得解.

解法一 因为 $a+2b=3$，所以 $a=3-2b$. 代入

$a^2+2a+4b^2+4b+4ab-3$

$=(3-2b)^2+2(3-2b)+4b^2+4b+4(3-2b)b-3$

$=9-12b+4b^2+6-4b+4b^2+4b+12b-8b^2-3$

$=12$.

解法二 $a^2+2a+4b^2+4b+4ab-3=(a^2+4ab+4b^2)+(2a+4b)-3$

$=(a+2b)^2+2(a+2b)-3=3^2+2\times3-3=12.$

例3 把下列各式分解因式：

(1) x^2+2y-y^2-2x；　　(2) $2a^2+bc^2-2ac-a^2b$；

(3) $a^2+b^2+2ac+2bc+2ab$；　　(4) $4x^2-z^2-4xy+y^2$.

(1)**分析一** 从次数的角度看，可以将 x^2 与 y^2，$2x$ 与 $2y$ 合并，分组分解.

分析二 从合并同类项的字母角度看，可以将 x^2，$2x$；y^2，$2y$ 分组再分解.

解法一 x^2+2y-y^2-2x

$=(x^2-y^2)-(2x-2y)$

$=(x+y)(x-y)-2(x-y)$

$=(x-y)(x+y-2)$

解法二 x^2+2y-y^2-2x

$=(x^2-2x)+(2y-y^2)$

$=(x^2-2x+1-1)-(y^2-2y+1-1)$

$=(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)$

$=(x-1)^2-(y-1)^2$

$=[(x-1)+(y-1)][(x-1)-(y-1)]$

$=(x+y-2)(x-y).$

(2)**分析** 从次数角度看 $2a^2$ 与 $-a^2b$，bc^2 与 $-2ac$ 分组后都可以分解因式，但它们之间没有公因式，从数字角度看可以将 $2a^2$ 与 $-2ac$，bc^2 与 $-a^2b$ 分组，再分解因式.

解 $2a^2+bc^2-2ac-a^2b$

$=(2a^2-2ac)+(bc^2-a^2b)$

$=2a(a-c)-b(a^2-c^2)$

$=2a(a-c)-b(a+c)(a-c)$

$=(a-c)[2a-b(a+c)]$

$=(a-c)(2a-ab-bc).$

(3)**分析** 本题中是五项式，可以采用三、二分组分别分解，看是否有公因式可以提取.

解 $a^2+b^2+2ac+2bc+2ab$

$=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)=(a+b)^2+2c(a+b)$

$=(a+b)(a+b+2c).$

(4)解 $4x^2-z^2-4xy+y^2$

$=(4x^2-4xy+y^2)-z^2$

$=(2x-y)^2-z^2$

$=(2x-y+z)(2x-y-z).$

1.2.3 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$的因式分解

若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1，x_2，则二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 就可分解为

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

在 3.2.2 节将证明这个结论

例 把下列关于 x 的二次多项式分解因式：

(1) x^2+2x-1； (2) $x^2+4xy-4y^2$.

解 (1) 令 $x^2+2x-1=0$，解得

$$x_1=-1+\sqrt{2}, x_2=-1-\sqrt{2},$$

所以 x^2+2x-1

$=[x-(-1+\sqrt{2})][x-(-1-\sqrt{2})]$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}).$

(2) 令 $x^2+4xy-4y^2=0$，则解得

$$x_1=(-2+2\sqrt{2})y, x_2=(-2-2\sqrt{2})y,$$

所以 $x^2+4xy-4y^2=[x+2(1-\sqrt{2})y][x+2(1+\sqrt{2})y].$

总结 多项式分解因式的步骤：

1. 如果多项式的各项有公因式，先提取公因式；
2. 如果各项没有公因式，可以尝试运用公式来分解；
3. 如果用上述方法不能分解，可以尝试用分组或其他方法(例如十字相乘法)来分解；
4. 分解因式，必须使每一个多项式因式都不能再分解为止.

练 习

感受·理解

1. 选择题：

多项式 $2x^2-xy-15y^2$ 的一个因式为(　　)

(A) $2x-5y$ (B) $x-3y$ (C) $x+3y$ (D) $x-5y$

2. 分解因式：

(1) x^2+6x+8；　　(2) $8a^3-b^3$；

(3) x^2-2x+1；　　(4) $4(x-y+1)+y(y-2x)$；

(5) x^2-x-1；　　(6) $3x^2-x-1$.

思考·运用

3. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-a^2-2x-2a$；　　(2) $4x^2-8x-12y-9y^2$；

(3) $a(a+3)^2-a(a-b)^2$；　　(4) $4b^2-10b+c^2-5c+4bc+6$；

(5) $a^2+ab-2ac-bc+c^2$.