# 数学竞赛研究教程

苏步青题

单墫 / 著

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

shuxuejingsai
yanjiujiaocheng

上

# 数学竞赛研究教程

苏步青题

单 墫/著

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

shuxuejingsai
yanjiujiaocheng

上

**图书在版编目(CIP)数据**

数学竞赛研究教程/单墫著. —3 版. —南京：江苏教育出版社，2009.2

ISBN 978-7-5343-1706-4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 单…　Ⅲ. 数学课-教学研究-高中　Ⅳ. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 020884 号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 数学竞赛研究教程 |
| **编　　著** | 单　墫 |
| **责任编辑** | 毛永生 |
| **出版发行** | 凤凰出版传媒集团 |
| | 江苏教育出版社（南京市湖南路 1 号 邮编 210009） |
| **网　　址** | http：//www.1088.com.cn |
| **集团网址** | 凤凰出版传媒网 http：//www.ppm.cn |
| **经　　销** | 江苏省新华发行集团有限公司 |
| **照　　排** | 南京理工出版信息技术有限公司 |
| **印　　刷** | 南京通达彩印有限公司 |
| **厂　　址** | 南京市六合区冶山镇（邮编 211523） |
| **电　　话** | 025—57572528 |
| **开　　本** | 787×1092 毫米　1/16 |
| **印　　张** | 36 |
| **版　　次** | 2009 年 2 月第 3 版 |
| | 2009 年 2 月第 1 次印刷 |
| **书　　号** | ISBN　978—7—5343—1706—4 |
| **总 定 价** | 60.00 元（上、下册） |
| **批发电话** | 025—83657708，83658558，83658511 |
| **邮购电话** | 025—85400774，8008289797 |
| **短信咨询** | 02585420909 |
| **E-mail** | jsep@vip.163.com |
| **盗版举报** | 025—83658551 |

# 前　言 | *Preface*

中学数学竞赛始于19世纪末，本世纪60年代起走向高潮，涌入大量新鲜内容（如组合数学与图论、初等数论、不等式、函数方程等），令人眼花缭乱，应接不暇．有人认为已经形成一个新的数学分支，有人称之为奥林匹克数学．

近年来，数学竞赛进入了一个相对稳定的阶段，可以有比较充分的时间回顾、总结，研讨一些有关问题，如奥林匹克数学的内容、竞赛的教育功能、训练的科学化、教练的培训、怎样命题等等．

承担这种任务，师范院校最为合适．师范院校开设数学竞赛研究，不仅有这种需要，而且业已成为现实．这本教程正是应运而生，供师范院校数学系选作“数学竞赛研究”课程的教材．目的是向师范院校的学生介绍数学竞赛，提供奥林匹克数学的主要内容，使未来的教师能够胜任训练工作并进一步探索其他课题．

全书共50讲，包括数论、代数、几何、组合等方面的问题及解题、命题的讨论．这里的代数，按照中学的习惯，含有数列、函数、多项式、不等式等内容．有些内容，可能已在其他课程（如初等代数等）中出现过，教师可以根据情况适当省略．本书的重点并不在于增添更多的知识，而是鼓励学生运用已有的知识去解题．

当代著名数学家、教育家波利亚（G. Pólya，1887～1985）一再强调未来的中学教师应当学习解题．实践证明，数学教学的好坏，取决于教师的素养，尤其是他的数学水平，如果数学水平较差，根本不能独立解题，那么无论怎样“改进”教法，恐怕也是无济于事的．正是由于这种考虑，本书的重点放在解题上．

数学竞赛也就是解题的竞赛，只有通过问题才能学会解题．因此，本书配备了大量的例题与习题．为照顾各种读者的需要，其中既有较为容易、较为常见的老问题，用以说

明方法；也有较为困难、较为少见的新问题，供作研究. 新问题大多取自有关杂志上的论文. 随着时间的推移，新题又会变为“陈题”. 这正反映了数学的发展与普及.

要提高解题能力，必须反复练习，单纯的讲授不一定能有很好的效果. 可以采取讨论式，放手让学生练习，给予适当的提示(“点拨一下”)；也可以尽量让学生各抒己见，介绍自己的解法或想法，然后再由教师加以讲评. 没有必要讲完所有的例题，过分难的可以留给学生将来去研究，中等难度的也只需要处理一部分，其余的任由学生自己阅读，还可以补充一些好的问题或材料. 总之，内容与方法均有很大的弹性，目的是提高解题能力.

要提高解题能力，必须注意总结. 不仅要寻找各种不同的解法，更要找出最好的解法. 应当注意数学的思想与数学的美，不断提高学生的鉴赏能力，注意简洁明快，一针见血. 正是基于这种考虑，优雅的解法，我们毫不犹豫地采入本书，即使在其他地方已经出现过. 因为“好的音乐，不妨多听几遍”. 同样的题也可能出现几次，目的是多给几种解法，以资比较. 我们尽力寻求完美的解法，但由于水平与精力，处理熟知的问题尚未必尽如人意，新颖的问题更不敢夸称尽善尽美.

本书接近于传统的“习题课”所用的材料. 但“习题课”是辅，是为了巩固与消化“正课”所讲授的知识. 这本书，则以问题为主，以知识为宾. 这是本书的特点，也是一种尝试.

由于本书篇幅相当大，有些部分写得比较仓促，错误与不妥之处难以避免，敬请高明之士不吝指正.

单 墫

1992年于南京师范大学

# 修订版前言 Preface

本书问世后，颇受欢迎，很快售罄，不少教师将它作为培训选手(尤其是准备进数学冬令营的学生)的教材.有些竞赛的试题，也常与本书的例、习题相同，如全国高中联赛1994年二试第二题、1999年加试第三题，都是本书的例题(分别为第49讲例1、第13讲例3).这似乎在为本书作义务的广告，作者不胜感谢.

关心本书的读者也提出不少宝贵的意见与建议，尤其是陈计、余红兵等先生.他们仔细地阅读了全书，作了非常尖锐、中肯的批评.作者自己也感觉有许多不很满意的地方，准备进行修改，但直到最近才有时间来做这件事情.

这次修订的幅度比较大，叙述与例题的解答修改了多处，更换了一些过偏过难的例题.第49、50两讲，大部分内容都是新写的，第49讲的标题也换成"组合数学".这样做是为了更有针对性、实用性，更适合于数学竞赛的培训工作.

这次修订增加了不少习题，尤其是在书末新加了50道综合习题，目的是给学生以更多的练习机会.因为解题必须实践，只有通过解题才能学会解题."歪拳打一百遍成为拳师"，一位先生对这句谚语不以为然，认为歪拳打得再多还是歪拳.我却认为这句谚语中含有朴素的真理：要成为拳师，必须打拳，打少了不行，必须多打，反复打.如果打拳的人有一点聪明，他会在练习的同时，注意总结.这样，打到后来，歪拳也就不一定是歪拳了.当然，歪也不要紧，或许倒是一种创新.

我决不是提倡"偏题"、"怪招"，已经有人讥讽数学竞赛是"玩杂技"，这种批评值得警惕.我们应当介绍含有很好的数学思想的问题，介绍重要的、有普遍意义的方法，而不应当钻牛角尖，做那些繁琐乏味、刁钻古怪、没有太大意义的偏题.这次增加了许多问题，正是为了介绍重要的数学方法与技巧，特别是在例题中没有说到或说得还不够的那

些方法与技巧.

读者没有必要在很短的时间内,做完全部习题.根据自己的时间与需要,可以先做一部分,其余的留到以后再做.切切不可急于看解答,因为重要的不是看别人解题,而是要自己动手解题.题目要"节省",尽量自己做.如果看了很多题,那么就找不到足够的题来练习了.

本书中的例题与习题并没有完全按照方法与难度来分类或排序,因此有人批评这本书"深一脚,浅一脚",这次修订,曾考虑重新分类或排序,但题目的难易不易确定,标准往往因人而异,而且那样大改太费时间.何况那样写的书不少,这本书不那样写,倒也算自己的特点.另外一个方面,太好的分类与排序往往会使人预先知道要用什么方法解题,而且容易对排在前面的问题掉以轻心,对后面的问题又产生畏难情绪.或许,像本书目前这样反而比较符合实际,因为道路并不都是平坦的,往往有些崎岖曲折,尤其是进入陌生的地方.不是有句歌词"生活的脚步深浅在偏僻异乡"吗?

修订时,增加了一些谈解题方法的议论,或许对一些读者有用.但本书主要讲解题,而不是讲解题方法,所以这些议论也不能太多.我准备另外写一本关于解题方法的书,余红兵先生特别怂恿我做这件事.希望本书的修订版及将要写成的那本书都能得到大家的鼓励与批评.

单　墫

2001年于南京师范大学

# 第三版前言 | *Preface*

这是本书又一次，大概也是最后一次，大幅度的修订.

修订的目的，是为了使本书更加切合实际：教学、竞赛与竞赛研究的实际.

这次修订，下册变动较大，增加了平面几何与图论的分量，减少了立体几何的内容；上册仅增加一讲“导数与不等式”，减少一讲“数学归纳法”. 全书仍为五十讲，篇幅大致不变.

本书，对于参加数学竞赛的学生，当然是有用的. 但我们的目的并不是写一本竞赛宝典，我们有更大的目标，即为了传播、普及数学，让更多的人了解、喜爱数学.

因此，那些富于数学思想、优雅而且一般的解法，我们尽量介绍. 而过于冷僻的“怪招”或“独门武器”，则不去搜罗.

我们还认为培养创造能力最为重要. 创造能力就是“自出机杼”：题目应当自己去做. 自己想出解法，想出**自己的**解法. 本书有很多题目选自各种竞赛，但解法往往与公布的标准解法不尽相同，甚至大不相同. 这些解法就是我们自己做的.

感谢江苏教育出版社及各位编辑，尤其是蔡立先生与毛永生先生. 他们不仅出新书，也重视已经出版多年的“老”书，如这本《研究教程》，一而再地修订、发行. 没有他们的大力支持，这第三版是不可能问世的.

单　墫

2008 年于南京师范大学

# 目 录

CONTENTS

# 第1讲 探索法(一)

解题需要探索,解竞赛题更加需要探索.因为这些问题往往没有固定的套路可以依循,起决定性作用的不是解题者知道多少模式,而是他能否启动他的头脑,运用智力,大胆想象,发挥创造性.

从广义上说,一切解题的方法都是探索法,所以这一讲实际上是讨论解题的方法,即怎样解题.

汤姆·索耶(美国小说家马克·吐温的代表作《汤姆·索耶历险记》中的主人公)在山洞中迷了路,他不知道该走哪条道,唯一的办法就是探索:先试一试这条,再试一试那条.汤姆·索耶的方法也就是数学家、教育家波利亚所倡导的方法:"一再地去试,多次变化方法,使我们不致错过那少许的宝贵的可能性."

**探索,从理解题意开始.**

不论作什么事情,都必须先将这件事的有关情况弄个一清二楚.要破案,必须先研究案情,对现场进行调查.要旅行,应当知道自己现在在哪里,目的地在哪里,有什么交通工具可以利用,有什么限制等等.

解题也是如此.题目中重要的词汇、术语、字母、算式,都应弄懂.已知条件、要求与结论都应记住.如有必要,可以将问题改写成更适宜的形式.

**例1** 有 99 只筐,筐里装了苹果和桃子.但各筐装的苹果数、桃子数都不一定相同.证明可以取 50 只筐,筐中的苹果数不少于苹果总数的一半,桃子数也不少于桃子总数的一半.

这道题比较容易理解.应注意要求有 3 个:取 50 筐,这 50 筐中苹果数不少于苹果总数的一半,桃子数也不少于桃子总数的一半.

**例2** 某市有 $n$ 所中学,第 $i$ 所中学派出 $c_i$ 名学生 ($1\leqslant c_i\leqslant 39$, $1\leqslant i\leqslant n$) 来到体育馆观看球赛,总人数 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1\,990$. 看台上每一横排有 199 个座位,同一学校的学生必须坐在同一横排.问至少要安排多少个横排才能保证学生全部坐下?

这道题,题意比较晦涩,需要重新改写.

题目中 $c_i$, $\sum c_i$ 等符号是多余的,应当摒弃.改为:

"一些学校派出学生观看球赛,各校派出人数不超过 39,学生总数为 1 990.看台每排 199 个座位,同一学校的学生必须坐在同一排.问至少要安排多少排才能保证学生全部坐下?"

其中"至少","保证"等词的意义需要琢磨.

"至少要安排 $k$ 排才能保证学生全部坐下",这句话有两层含义:

第一,不论各校派出的人数有什么变化(当然要符合不超过 39 及总数为 1 990 这两个条件),$k$ 排总能保证学生按要求坐下.

第二，有一种情况，$k-1$ 排无法使学生按要求坐下.

理解题意，是解题的第一步.

**探索，往往从简单的情形开始.**

上面的例 1，不能算作难题. 但也有不少人会感到难以下手，或者顾此失彼.

可以先将“99 筐中取 50 筐”的问题改为更简单的情况：“3 筐中取 2 筐”(其他要求不变).

这时在 3 筐中，取出苹果最多的一筐；再在剩下的 2 筐中，取出桃子较多的一筐. 这样取出的 2 筐就满足要求：苹果数、桃子数都不少于各自总数的一半.

进一步考虑“5 筐中取 3 筐”的问题.

仍先取苹果最多的第一筐. 剩下的 4 筐，应分成两组，每组 2 筐. 桃子数较多的一组与第一筐，这 3 筐中桃子数肯定不少于桃子总数的一半，但如何保证苹果数也不少于苹果总数的一半呢？

为此，设所剩的 4 筐中，苹果数依次排为 $x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5$. 将二、四(或二、五)两筐作为一组，另两筐作为一组. 无论哪一组与第一筐(苹果数 $x_1 \geqslant x_2$)合在一起，苹果数都不少于苹果总数的一半.

现在，回到原来的问题，设各筐苹果数为 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{99}$.

将第 $2, 4, \cdots, 98$ 筐作为一组，$3, 5, \cdots, 99$ 筐作为另一组. 将两组中，桃子数较多的一组与第一筐合在一起，这 50 筐的桃子数$\geqslant$总数的一半. 又由于两组苹果数的差 $\leqslant x_2-(x_3-x_4)-(x_5-x_6)-\cdots-(x_{97}-x_{98})-x_{99} \leqslant x_1$，所以所取 50 筐的苹果数不少于苹果总数的一半.

由例 1 可以看到简单情况的解决，有助于一般情况的解决.

**例 3** 平面上给定 $n$ 个点，证明可以作 $n+1$ 个同心圆，使得：

(i) 这 $n+1$ 个圆的半径都是其中最小的半径的整数倍；

(ii) 这 $n+1$ 个圆所成的 $n$ 个圆环中，每个含有一个已知点.

**解** 先考虑这 $n$ 个点在同一条直线上的简单情况.

不妨设它们是正实轴上的 $n$ 个点，(横)坐标分别为 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ (只需把原点选在这些点的左边，它们的坐标就均为正数).

以原点 $O$ 为圆心，$r_0$ 为半径作圆，这里

$$0<r_0<\min(t_1, t_2-t_1, t_3-t_2, \cdots, t_n-t_{n-1}). \tag{1}$$

显然 $n$ 个已知点都在$\odot(O, r_0)$外. 由于区间$(t_1, t_2), (t_2, t_3), \cdots, (t_{n-1}, t_n)$的长都大于 $r_0$，所以数列

$$2r_0, 3r_0, 4r_0, \cdots \tag{2}$$

中，必有一个数 $k_i r_0 \in (t_i, t_{i+1})$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$；又有足够大的 $k_n$，使 $k_n r_0 > t_n$.

$n$ 个圆$\odot(O, k_i r_0)$，$1 \leqslant i \leqslant n$，及$\odot(O, r_0)$显然满足要求(i)，(ii).

现在考虑一般情形. 连结两个已知点的线段至多 $C_n^2$ 条,它们的垂直平分线至多 $C_n^2$ 条. 任取一条与这些垂直平分线不同的直线为 $x$ 轴,在 $x$ 轴上找一个点 $O$,使它既不是已知的 $n$ 个点中的一个,也不是 $x$ 轴与 $C_n^2$ 条垂直平分线中任一条的交点,则 $O$ 到这些点的距离各不相同,设它们分别为 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. 则前面所作的 $n+1$ 个圆满足所有要求.

老子说:"天下大事,必作于细. 天下难事,必作于易". 从简单的情况做起,是探索时最常用的.

**例4** 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任两个的和非负,证明:对任意满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \tag{3}$$

的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2. \tag{4}$$

**解** 首先考虑 $n = 2$ 的情况. 这时

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{5}$$

所以 $a_1x_1 + a_2x_2 - a_1x_1^2 - a_2x_2^2 = a_1x_1(1-x_1) + a_2x_2(1-x_2) = (a_1+a_2)x_1x_2 \geqslant 0$.

一般情况的解法与此相同:用(4)式左边减去右边,差 $a_ix_i - a_ix_i^2$ 在提取公因式 $a_ix_i$ 后利用条件(3)化为 $a_ix_ix_j (j \neq i)$ 的和. 最后,每两项 $a_ix_ix_j$, $a_jx_jx_i (i \neq j)$ 的和 $(a_i + a_j)x_ix_j \geqslant 0$.

从简单情况做起的好处是:(i)熟悉问题中的条件与结论;(ii)取得部分结果;(iii)增强信心;(iv)发现规律,找出解决一般问题的方法.

上面所讲的好处中,最后一点是最重要的. 如果简单的情况无助于发现规律,不如径直从一般情况入手.

数学归纳法中很多例子都是从简单情况开始的,请参见第7讲.

**探索可以从粗略的估计开始.**

**例5** 已知 $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, 证明: $ab \geqslant a + b$. (6)

**解** 如果将左边 $a$,$b$ 均用2代进去,便得 $ab \geqslant 4$. 可惜的是(6)式右边的 $a+b$ 并不小于等于4(恰恰相反, $a+b \geqslant 4$). 证明无法进行下去. 我们应当回到出发点,并总结一下失败的原因. (6)的右边有变元 $a$, $b$,所以不能简单地把左边换成常数4.

那么,只将一个变元换成2呢?

例如保留 $b$,将 $a$ 换成2,得到 $ab \geqslant 2b$. 如果 $a \leqslant b$,那么(6)式右边 $a+b \leqslant 2b$,由此便可导出结论,可是 $a$ 也有可能大于 $b$ 啊!

虽然(6)仍未得到完全的证明,但已经获得部分的结果,即在 $a \leqslant b$ 时,(6)成立.

稍作点变更,保留 $a$,则将 $b$ 换成2,那么 $ab \geqslant 2a$. 于是在 $a \geqslant b$ 时, $a + b \leqslant 2a \leqslant ab$,即(6)式成立.

将以上两方面结合起来，便得到完整的证明. 证明可以稍加整理写成如下形式：

不妨设 $a \geqslant b$（由于对称性），我们有 $ab \geqslant 2a \geqslant a+b$.

例 5 还有其他的证法，参见本讲最后部分.

例 2 也可从最粗糙的估计开始：

1 990 个学生，每排有 199 个座位，至少要 $1\,990 \div 199 = 10$ 排才能坐下.

但 10 排未必能保证同一学校的学生都坐在同一排. 如果让学生按照学校顺次入座，第一排满了再坐第二排，第二排满了再坐第三排，…，那么全部学生都在 10 排中就座，但有些学校的学生可能分在一排的排尾或下一排的排头.

出现上述情况时，可以把不合要求的学校调整到“备用”的排. 至多有 9 所学校不合要求（他们有一部分人坐在第一，二，…，九排的排尾），而

$$5\text{ 所学校的人数} \leqslant 5 \times 39 = 195 < 199, \tag{7}$$

所以只需要 2 排“备用席”，就可以安排这些学校（每排备用席可以安排 5 所学校）.

因此，12 个排足以保证全部学生按要求坐下.

12 排能不能减少成 11 排呢（在一般情况下，10 排是不够的. 这一点虽然没有证明，仅凭感觉或常识就可以相信）？

不能！为此，我们注意在各学校人数均不太少时，每排可安排 5 所学校，不能安排 6 所学校 $\left(\text{在各校人数} \geqslant \left[\dfrac{199}{6}\right]+1 = 34 \text{ 时即是这样}\right)$. 这时，如果学校所数 $\geqslant 56$，那么 11 个排就不够了.

因此在总人数为

$$34 \times 56 = 1\,904 \tag{8}$$

时，11 排就不能保证安排学生全部坐下. 总人数为 1 990 时更是如此. 更精确一些，如果 55 所学校各派 34 人，1 所学校派 30 人，总人数为

$$34 \times 55 + 30 = 1\,900 \tag{9}$$

时，11 排就不能使学生全部坐下. 所以必须 12 个排才能保证 56 所学校派出的学生全部坐下.

1 900 不能改成更小的数，参见习题 1 第 2 题.

所谓粗略的估计，实际上是抓住了主要部分，把握了全局.

有的解答讨论空座位的精确估计，这种讨论并非必要，不如上面的解法简洁. 总之，在需要精细时，务于精细. 否则，“观其大略”，可矣！

**探索，需注意极端情况（最大、最小等）.**

**例 6** $n(n \geqslant 3)$ 个人参加乒乓球循环赛（即每两人之间必须比赛一场）. 如果没有人全胜，证明必有 $A$, $B$, $C$ 三个人，$A$ 胜 $B$，$B$ 胜 $C$，$C$ 胜 $A$.

**解** 考虑获胜场数最多的人 $A$(如果有几个人获胜场数均为最多,从其中任选一个作为 $A$).

由于 $A$ 未全胜,必有 $C$ 胜 $A$.

$A$ 胜的人中必有 $B$ 胜 $C$(否则 $C$ 胜的人数至少比 $A$ 多 1,与 $A$ 的"最大性"矛盾). 这样的三个人即为所求.

**在需要满足较多要求时,往往暂时忽略一些要求(尤其是次要的要求),先得出"不完善的"结果,然后再加以修正.**

**例2** 将一个圆盘分为 $n$ 个扇形 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$. 每个扇形可涂红、黄、蓝三种颜色中的任一种,但每个相邻的扇形的颜色必须不同. 问有多少种涂法?

**解** 设有 $a_n$ 种涂法. 显然有 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$.

考虑 $n \geqslant 3$. 第一个扇形 $A_1$ 有 3 种涂法. 涂好 $A_1$ 后,第二个扇形 $A_2$ 有 2 种涂法. 这样继续涂下去,如果不要求第 $n$ 个扇形 $A_n$ 与 $A_1$ 颜色不同,每个扇形均有 2 种涂法. 总的涂法种数为 $3 \times 2^{n-1}$.

要使 $A_n$ 颜色与 $A_1$ 不同,我们必须从 $3 \times 2^{n-1}$ 中减去那些不合要求的涂法,即 $A_n$ 与 $A_1$ 同色的那些涂法.

如果将 $A_n$ 与 $A_1$ 合而为一,那么上述例外的涂法的个数就是 $a_{n-1}$, 所以

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} - a_{n-1}. \tag{10}$$

由(10)式易得 $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 3 \times 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \times 3 \times 2$, 即

$$a_n = \begin{cases} 2^n - 2, & n \text{ 为大于 1 的奇数;} \\ 2^n + 2, & n \text{ 为正偶数.} \end{cases}$$

几何作图中的轨迹相交法就是放弃一部分要求,这时满足其余要求的点不是一个,通常是一条曲线(点的轨迹);而放弃另一些要求,得到的轨迹是另一条曲线,这两条曲线的交点就满足所有要求. 这类例子过去俯拾即是(参见习题 1 第 9 题),但目前不太流行,我们宁愿举一个算术中的问题.

**例3** 在 $m \times n$ 的矩形表中填入 $mn$ 个不同的平方数,使每一行、每一列的和都是平方数.

**解** 我们先考虑第一行. 设填入的数为 $b_1^2$, $b_2^2$, $\cdots$, $b_{n-1}^2$, $b_n^2$, 如何使它们的和为平方数呢? 这并不困难,因为每一个 $b_j$($1 \leqslant j \leqslant n$)都可由我们挑选. 即使前 $n-1$ 个已经选定,只要和

$$b_2^1 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2 = 4k \text{ 或 } 2k+1, \tag{11}$$

还可以选择 $b_n = k-1$ 或 $k$, 使得行和

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2 + b_n^2 = (k+1)^2. \tag{12}$$

而要实现(11),只要 $b_1$, $\cdots$, $b_{n-1}$ 全是偶数或只有一个为奇数就可以了.

其他行可以类似地处理，更简单地是利用第一行：将第一行的数乘以一个平方数即可用作其他行的数.

同样，在构造第一列时，可取 $a_1$，$a_2$，…，$a_{m-1}$，它们都为偶数或只有一个为奇数，从而 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{m-1}^2=4k$ 或 $2k+1$. 再取 $a_m=k-1$ 或 $k$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{m-1}^2+a_m^2=(k+1)^2$.

将第一列乘以平方数用作其他列，各列的和都是平方数.

所以为了使各行、各列的和都是平方数，只需令第 $i$ 行、第 $j$ 列的元素为 $a_i^2b_j^2$（$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$）.

**探索，并非完全没有目标**. 有时，问题已经有明确的结论. 即使没有结论，往往可以猜出答案应当是什么. “先猜，后证——这是大多数的发现之道.”

**猜出结论，便可以“有的放矢”**. 在猜结论的时候，不应当忘记那些极端情况.

**例 9** $\triangle ABC$ 的底 $BC=a$ 及 $BC$ 边上的高 $h_a$ 均为定值. 试问什么时候，这个三角形的三条高的乘积 $h_ah_bh_c$ 取最大值？

**解** 顶点 $A$ 在与 $BC$ 平行并且距离为 $h_a$ 的直线 $l$ 上. 我们猜想在 $AB=AC$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时，$h_ah_bh_c$ 为最大.

当然也可能有人猜测在 $\angle BAC=90°$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，$h_ah_bh_c$ 为最大.

究竟哪一种猜想正确，难以预先确定. 科学的态度是允许、鼓励各种各样的猜想，对各种猜想采取宽容、平等的态度，一视同仁. 如果有证据表明原来的猜想不正确或不完全正确时就应当摒弃或修正，决不顽固坚持错误（参见习题 1 第 9 题）.

在我们的问题中，$h_a$ 已知，只需要求 $h_bh_c$ 的最大值. 由于面积 $S=\frac{1}{2}h_aa$ 为已知，问题可以化成求 $bc\left(bc=\frac{4S^2}{h_bh_c}\right)$ 的最小值，而 $bc=\frac{2S}{\sin A}$，最后又归结为求 $\sin A$ 的最大值.

如果 $\angle BAC$ 可以为 $90°$，那么 $\angle BAC=90°$ 时，$\sin A$ 最大，即 $h_ah_bh_c$ 最大.

当且仅当以 $BC$ 为直径的圆与 $l$ 有公共点时，$\angle BAC$ 可以为 $90°$，即如果 $h_a\leqslant a/2$，$h_ah_bh_c$ 在 $\angle BAC$ 为直角时最大（如图 1-1）.

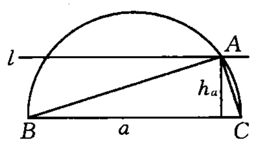


图 1-1

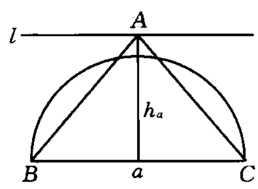


图 1-2

如果 $h_a>a/2$，$A$ 点在以 $BC$ 为直径的圆的外面，$\angle BAC<90°$. 这时 $\sin A$ 随 $\angle A$

递增，当 $A$ 在 $BC$ 的中垂线上，即 $AB = AC$ 时，$\angle A$ 最大. 所以 $h_a h_b h_c$ 在 $AB = AC$ 时最大(如图 1-2).

从最后的结果来看，两种猜测都不完全正确，只有将它们合起来才是完整的答案. 由此可见，各种不同的看法未必是对立、矛盾的. 在大多数场合，恰恰是相互补充，相辅相成的.

**探索，必须充分利用已有的信息.**

在例 5 中，条件 $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ 必须充分利用. 除上面的解法外，也可由已知条件出发，得出 $a-2 \geqslant 0$, $b-2 \geqslant 0$ 及 $(a-2)(b-2) \geqslant 0$. 再展开、整理得

$$ab + 4 \geqslant 2a + 2b. \tag{13}$$

又由 $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ 得

$$ab \geqslant 4. \tag{14}$$

从而由(13)，(14)，

$$ab \geqslant \frac{1}{2}(ab+4) \geqslant a+b.$$

老练的解题者喜欢将信息重新编排(题目的复述，各种各样的解释等)，变为容易记忆、便于运用的形式.

例 2 经过我们改编后，叙述比原来简单了许多，条件与要求都更加明确.

已知条件是信息，在中间过程得到的结果或引理也是信息. 如果题做不出，最好再看看这些东西，或许会有新的启发. “现场调查一百次”，这句话是有道理的.

**探索，可以从“结论”开始.**

要证的结论，是重要的信息. “聪明人从结果开始”. 从结果开始，“执果索因”，一直追溯到已知，这就是分析法. 在平面几何与不等式的证明中常常采用.

例 5 中，可由结果 $ab \geqslant a+b$ 出发：

$$\begin{aligned}
& ab \geqslant a+b \\
\Leftarrow\ & (a-1)(b-1) \geqslant 1 \\
\Leftarrow\ & a-1 \geqslant 1,\ b-1 \geqslant 1 \\
\Leftarrow\ & a \geqslant 2,\ b \geqslant 2.
\end{aligned}$$

最后的不等式是已知中给出的条件，当然成立，所以要证的结论 $ab \geqslant a+b$ 成立.

在用分析法时，务须注意前面的不等式是由后面的推出，而不是前面的不等式推出后面的不等式. 因果颠倒，论证就全错了.

分析法可改用综合法写.

上面例 5 的证明可写成

$$\begin{aligned}
& a \geqslant 2,\ b \geqslant 2 \\
\Rightarrow\ & a-1 \geqslant 1,\ b-1 \geqslant 1 \\
\Rightarrow\ & (a-1)(b-1) \geqslant 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ab \geqslant a+b.$$

读者可以从解题实践中举出很多例子，充实上面的议论，提出自己的意见.

## 习 题 1

1. 例 8 中，如何能使填入的数互不相同？
2. 证明在例 2 的条件与要求下，11 排可以保证 1 899 名学生坐下.
3. $m\times n$ 个同样的立方体排成 $m$ 行 $n$ 列. 每个立方体有一面染成黑色，黑的面不一定全朝上. 立方体可以转动，但转动时必须将同一行或同一列的立方体同时转动. 能否经过若干次转动，使黑的面全部朝上？
4. 求方程 $y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0$ 的实数解.
5. 正方形 $ABCD$ 边长为 1，$AB$，$AD$ 上各有一点 $P$，$Q$，如果$\triangle APQ$ 周长为 2，求$\angle PCQ$.
6. 证明任何一群人(人数 $\geqslant 2$) 可以分成两组，使得每个人在同一组中熟人的个数不多于在另一组中熟人的个数.
7. 从$\{1, 2, \cdots, 3n\}$中任取 $n+1$ 个不同的数，证明必有两个数的差大于等于 $n$，并且小于等于 $2n$.
8. 平面上的点集 $M$ 由 $n$ ($n\geqslant 3$) 个点组成. 如果 $M$ 中任两点连线的垂直平分线上都有 $M$ 中的点，那么 $M$ 就称为祖冲之集. 对什么样的 $n$，有 $n$ 个点的祖冲之集存在？
9. 平面上有一个凸四边形 $ABCD$.
   (a) 如果这平面上有一点 $P$，使$\triangle ABP$，$\triangle BCP$，$\triangle CDP$ 及$\triangle DAP$ 的面积都相等，则四边形 $ABCD$ 应满足什么条件？
   (b) 满足(a)的点 $P$ 至多有几个？