GAODENG YUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

高等院校精品规划教材

实用微积分学习指导

◎ 主　编　路建民

◎ 副主编　凌亚丽　刁光成　张晓彦

00°

10°

20°

30°

40°

50°

60°

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

GAODENG YUANXIAO JINGPIN
GUIHUA JIAOCAI

高等院校精品规划教材

实用微积分学习指导

◎ 主　编　路建民

◎ 副主编　凌亚丽　刁光成　张晓彦

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内　容　提　要

本书是与高等院校精品规划教材《实用微积分》（路建民主编）相配套的学习指导书。本书对微积分基本概念、基本运算以及理论知识的应用进行了系统的梳理、归纳和剖析。将各章内容的知识体系结构以图解的形式展现，使学生从整体上更清晰地了解各章内容及它们之间的联系，突出了各章内容的学习重点。学习基本要求中给学生学习微积分提出了明确的学习目标要求。对各章内容的主要知识点和解题方法都进行了点拨和详细的指导，借以培养学生的良好学习习惯。在典型问题分析和求解中，对精选的问题和例题都有准确清晰的解答，特别突出解题思路和方法的指导，并对解题的思路和步骤进行适当的归纳以提高学生分析问题和解决问题的能力。对教材中具有代表性的习题，给出了较详尽的求解过程。

本书后附有（MATLAB 软件）数学实验指导和实验报告书。

本书可作为高职高专、成人高等学校工科各专业学习高等数学的辅助用书，也可作为数学爱好者和工程技术人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

实用微积分学习指导/路建民主编. —北京：中国水利水电出版社，2008

高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5084-5633-1

Ⅰ. 实…　Ⅱ. 路…　Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 085507 号

书　名	高等院校精品规划教材 **实用微积分学习指导**
作　者	主编　路建民　副主编　凌亚丽　刁光成　张晓彦
出版发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京市兴怀印刷厂
规　格	184mm×260mm　16 开本　12.25 印张　290 千字
版　次	2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
印　数	0001—5000 册
定　价	**21.00** 元

前　言

本书是与高等院校精品规划教材《实用微积分》相配套的学习指导书，系根据《山西省高职高专大学数学课程教学指导意见（试行）》教学要求编写的。除第一章、附录外，每章都由本章知识结构、学习基本要求、学习方法指导、典型问题分析、教材习题选解五部分构成。

全书对微积分的基本概念、基本运算以及理论知识的应用进行了系统的梳理、归纳和剖析。在本章知识结构部分，将该章内容的体系结构以图解的形式展现，使学生能从整体上清晰地了解该章内容及其它们之间的联系，完善了知识网络，有助于系统地理解、记忆所学知识。在学习基本要求部分，给出了各知识点和技能明确的学习要求，显示了该章知识内容的学习重点，以使学生在学习过程中能有的放矢。在学习方法指导部分，主要对学生在数学学习方法和问题的处理策略方面进行具体指导，以及从哪些角度进行观察、联想、对比、推理、归纳、思考、讨论，并结合学习的具体内容逐步深入，借以培养学生的良好学习习惯。在典型问题分析部分，着重对基本概念、基本运算中的疑难典型问题，通过实例进行剖析和准确清晰地解答，以望开拓学生的思路，培养学生良好的思维品质，突出解题思路和方法的指导，并对解题的思路和步骤进行适当的归纳以提高学生分析问题和解决问题的能力。在教材习题选解部分，选取《实用微积分》教材中具有代表性的习题，给出较详尽的解题过程，突出了解题方法上的指导，以促使学生能以点带面、举一反三。

本书的附录是《实用微积分》第八章内容（MATLAB 软件）上机时的实验指导和实验报告书。

参加本书编写的教师有路建民、凌亚丽、刁光成、张晓彦、王创建、张继良、柴阳云、王青梅等。全书由主编路建民统稿、定稿，由解金锁主审。

本书在编写过程中，得到山西水利职业技术学院院领导的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

本书可作为高职高专、成人高等学校工科各专业学习高等数学的辅助用书，也可作为数学爱好者和工程技术人员的自学用书。

由于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请读者批评指正。

山西水利职业技术学院
基础部数学教研室
2008 年 7 月

目　录

第一章 《实用微积分》知识结构

- 实用微积分
  - 函数的极限与连续
    - 函数
    - 函数的极限
    - 无穷小与无穷大
    - 极限的运算法则
    - 两个重要极限
    - 函数的连续性及其应用
  - 一元函数微分学及其应用
    - 导数的概念
    - 函数和差积商的求导法则
    - 复合函数的求导法则
    - 函数微分及其应用
    - 导数的应用
    - 曲率
  - 一元函数积分学及其应用
    - 定积分的概念与性质
    - 微积分基本公式
    - 积分法
    - 定积分的应用
    - 广义积分
  - 常微分方程
    - 微分方程的基本概念
    - 一阶微分方程
    - 二阶常系数线性微分方程
    - 微分方程的应用举例
  - 多元函数微积分及其应用
    - 曲面及其方程
    - 二元函数的极限与连续
    - 偏导数
    - 二元函数的极值与最值
    - 二重积分及其应用
  - 无穷级数
    - 常数项级数
    - 幂级数
    - * 傅里叶(Fourier)级数
  - 数学建模及数学实验简介
    - 数学建模基本知识
    - 数学实验的方法和内容
    - 数学软件简介

第二章 函数的极限与连续

- 函数的极限与连续
  - 函数
    - 1. 函数的特性
      - 奇偶性
      - 单调性
      - 周期性
      - 有界性
    - 2. 复合函数
    - 3. 基本初等函数及初等函数
    - 4. 函数关系式的建立
  - 极限
    - 1. 数列极限的概念
    - 2. 函数极限
      - 概念(极限存在的充分必要条件)
      - 极限的运算法则
      - 两个重要极限
    - 3. 无穷小与无穷大
      - 无穷小的性质
      - 无穷小的比较
      - 无穷小与无穷大的关系
    - 4. 函数的连续性
      - 概念
      - 间断点的概念及分类
      - 连续函数的运算
      - 初等函数的连续性
      - 连续函数在闭区间上的性质

一、本章知识结构

二、学习基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

2. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念. 会建立简单函数关系式.

3. 掌握基本初等函数的图象和性质.

4. 理解极限的概念，掌握极限的四则运算法则，会用两个重要极限求极限.

5. 理解无穷小、无穷大及无穷小阶的概念，会用等价无穷小求极限.

6. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型.

7. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质，并会应用这些性质.

8. 会求连续函数和分段函数的极限.

三、学习方法指导

(一) 函数

1. 对于函数的概念，在学习的不同阶段或者在不同的教材中，可能有不同的叙述，但总的来说大同小异. 初等数学以基本不变的量——常量为其主要研究对象，而高等数学则以不断变化的量——变量为主要研究对象. 所谓函数，正是变量与变量之

间的相互依赖关系的一种描述，是定量思维（定量思维是用数学的方法把一个实际问题归纳为数学模型，并写出数学表达式，再去求解这一数学模型）的具体表现形式.

2. 讨论函数的单调性必须在定义域内进行，单调区间是定义域的子集，离开单调区间来谈单调性是没有意义的，单调性是函数的局部性质，它讨论的是函数值在定义域的一个区间内随着自变量的增大而变化的趋势. 判断简单函数的单调性可借助函数的图象.

3. 两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个偶函数的和、差、积、商（除数不为0）仍是偶函数；两个奇函数的积、商（除数不为0）为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商（除数不为0）为奇函数.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数，它是用几个不同解析式“分段”表示的一个函数. 所有解析式对应自变量取值的集合的并集是该函数的定义域，定义域的各段最多只能在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等. 图象分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图象也可以是一条不断开的曲线（曲面）.

5. 复合函数可由两个或多个函数复合而成，但并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u)$，$u\in D$，内层函数 $u=g(x)$，$x\in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时，即 $E^{*}=\{x|g(x)\in D,\ x\in E\}\neq\phi$ 时，两个函数才能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成一个函数，因为 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$ 没有意义.

（二）极限

1. 对数列的极限应注意理解以下几点：

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示项数 n 无限增大时，通项 x_n 变化的总趋势——无限逼近常数 a.

（2）数列 $\{x_n\}$ 若收敛，则它必为有界数列；反之，有界数列未必收敛，例如 $\{\sin n\}$ 是有界数列，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

（3）数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子数列都收敛，且有相同的极限.

（4）几个经常用到的数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 是常数），$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

2. 一个数列极限存在，在几何上的解释是：当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to a$ 就是数轴上表示 x_n 的点无限密集在点 $x=a$ 的附近（右侧或左侧，或左右两侧），它与点 $x=a$ 的距离 $|x_n-a|$ 无限接近于0.

3. 正确理解函数极限的定义并用其证明简单极限问题是重点又是难点. 若把数列 $\{x_n\}$ 理解为自变量仅取正整数 n 的函数 $x_n=f(n)(n\in N^{*})$，则数列极限就是一类特殊函数（整标函数）的极限. 因此，运用一般与特殊以及类比的方法来理解本部分内容，可以使知识更好地网络化，起到事半功倍的作用.

4. 图2-1给出了数列极限、函数极限及两个重要极限的关系.

5. 极限不存在的几种情况及典型例子.

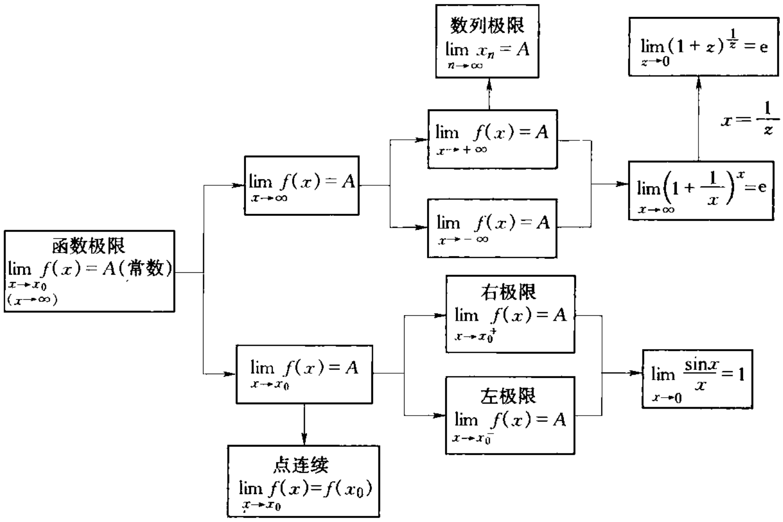

图 2－1

（1）趋于 ∞ ：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2$，　$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}$ 等.

（2）振荡：$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，　$\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{1}{x-1}$ 等.

（3）左、右极限不相等：

$f(x)=\begin{cases}x-1, x\le0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时函数 $f(x)$ 的极限（$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$）等.

6. 无穷小是一个变量，常量中唯独“0”可看为无穷小，任何一个绝对值很小的常量都不能作为无穷小，因为它的极限都是其本身而不可能为零.

7. 利用“有界变量乘以无穷小仍是无穷小”的性质，是求极限问题的一个技巧；利用极限和无穷小的关系，把极限问题转化为含有无穷小的等式运算，利用性质“若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=a, a\neq\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$”求极限等都是常用的方法.

8. 在求极限时，经常会碰到各种障碍使四则运算法则不能直接应用，例如$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$\infty-\infty$型等未定式，此时要运用各种方法对函数作恒等变换，例如：分解因式，约分或通分，分子或分母有理化，三角函数恒等变换等，从而使四则运算能顺利地运用.

（1）对 $\frac{0}{0}$ 型，通常可通过因式分解，分子或分母有理化，三角恒等式变换等手段约去使分母极限为零的因子从而消除障碍.

（2）对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，分子、分母同除以分母代数和中未知数的最高次幂，分出若干个无穷小.

（3）对 $\infty-\infty$ 型，经通分或分子有理化等可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

9. 两个重要极限及其等价形式.

两个重要极限在应用时要对函数或数列作适当的变换，在形式上要一致，或采用变量替代法使形式一致，问题简化，记住下面的等价形式是非常必要的.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的等价形式：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 的等价形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

10. 求极限的常用方法.

(1) 基本方法：

1) 利用初等函数的连续性：根据函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续的定义可知，求连续函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，只需求 $x=x_0$ 时的函数值，因此对于初等函数 $f(x)$ 其定义区间内一点 $x=x_0$ 处，极限为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2) 利用极限的四则运算法则（有时还应先进行代数运算、三角运算后，再利用极限运算法则）.

3) 利用两个重要极限公式.

4) 对于分式的极限，如果分母的极限为零，而分子的极限不为零，则分式的极限为 ∞.

5) 利用无穷小的性质和无穷小与无穷大的关系等.

6) 当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m、$n\in N^*$ 时，将 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, n=m\\ \infty, n>m\end{cases}$

当作公式使用.

7) 对于分段函数在分段点处的极限，当函数在分段点两侧表达式不一致时，应该利用左、右极限判定.

8) 在计算极限时，应该注意利用"等价无穷小代换"以简化运算.

等价无穷小在两个无穷小的比的极限计算中有以下的重要性质：设 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，$\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$. 可见，在求两个无穷小的比的极限，即 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限时，可将其分子或分母分别换成它们的等价无穷小，以简化极限的计算. 为此，熟悉 $x\to 0$ 时的等价无穷小关系对极限的计算是很有益的.

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$、$\tan x\sim x$、$\arcsin x\sim x$、$\arctan x\sim x$、$\ln(1+x)\sim x$、$\mathrm{e}^x-1\sim x$、$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\in R)$、$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ 等.

对 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式作等价无穷小代换时，必须指出：对分子、分母的乘积因子可以作等价无穷小的代换，但当分子、分母是多项之和的时候，对它们的某一项不能作等价无穷小的代换. 例如，本章典型问题分析中的［例6］.

（2）其他方法：

1）直观分析法（利用极限的定义）.

2）利用变量代换.

3）对无穷多项的和或无穷多个因子乘积的极限，用恒等变形化为有限项的和或有限个因子乘积的极限.

以上是本章求极限的常用方法，由于极限贯穿于微积分的始终，以后还会学习极限的其他求法，如：第三章中，利用导数定义求极限，用洛必达法则求未定式的极限；第四章中，用定积分求极限；第七章中，用数项级数收敛的必要条件求极限等.

11. 连续性是函数的基本性质，它是用极限方法研究函数性质的第一个范例. 连续的三个要素为：有定义，有极限，极限值等于函数值. 判断函数在某点连续的方法有：

（1）利用等价条件和性质证明，即用$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$. 例如，《实用微积分》教材（以下简称教材）P_{32}［例2］.

（2）基本初等函数在其定义域内是连续的，初等函数及其复合函数在其定义区间内连续.

（3）分段函数的连续性：主要判断分段函数在分段点处的连续性.

12. 第一类间断点的特点是函数在该点左、右极限都存在，第二类间断点的特点是函数在该点至少有一侧的极限不存在（包含∞，$+\infty$，$-\infty$）. 第一类间断点又分为两类：一类是左、右极限相等，被称为可去间断点，即函数在该点存在极限，但$f(x_0)$不存在（函数在x_0无定义），或$f(x_0)$存在但与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不相等；另一类是左、右极限不相等，被称为跳跃间断点. 第二类间断点中，左、右极限至少有一个为无穷大的点被称为无穷间断点. 总之，要判断间断点的类型就是要考察函数在间断点处的极限.

13. 由函数的连续性确定表达式中的参数：利用$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$，列方程（方程组）解得参数值. 例如，教材习题2-6第2题.

四、典型问题分析

【例1】 求下列各函数的定义域.

(1) $y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$；(2) $y=\ln(\ln x)$.

解 (1) $y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$.

因为$\arctan\dfrac{1}{x}$的定义域为$x\neq0$的所有实数；而$\sqrt{2-x}$的定义域为$x\leqslant2$的所有实数，因此所求函数的定义域为两者的交集，即$(-\infty,0)\cup(0,2]$.

(2) $y=\ln(\ln x)$.

函数$y=\ln(\ln x)$的定义域为满足$\ln x>0$的x值，即$x>1$，或表示为$(1,+\infty)$.

注意 一个函数如果没有给出实际意义，其定义域总是指使函数解析式有意义的全体实数，现将一些常见函数的定义域求法归纳如下：

（1）整式函数的定义域是全体实数.

（2）分式函数的定义域是使分母不为零的所有实数.

(3) 偶次根式函数的定义域是使根号内非负的所有实数.

(4) 对数函数的定义域是使真数部分为正的所有实数.

(5) 几个函数的线性关系所构成的函数的定义域为各个函数定义域的公共部分.

(6) 一个函数的反函数的定义域为原来函数的值域.

(7) 复合函数的定义域一般说来是最内层函数定义域的一部分.

(8) 一个具有实际意义的函数的定义域可能是它使函数解析式有意义的全体实数的一部分.

【例 2】 下列各组函数中的两个函数是否相同？如果不同，区别何在？

(1) $y = \dfrac{x^3 + x}{x}$ 与 $y = x^2 + 1$；

(2) $y = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $y = x\sqrt[3]{x - 1}$.

【解题思路】 判定两个函数是否相同的依据是考察函数的两个基本要素（定义域和对应法则）是否对应相同. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数是相同的，否则就是不相同的.

解 (1) $y = \dfrac{x^3 + x}{x}$ 与 $y = x^2 + 1$ 不同，因为两个函数的定义域不同. $y = \dfrac{x^3 + x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而 $y = x^2 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

(2) $y = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $y = x\sqrt[3]{x - 1}$ 相同. 因为两个函数的定义域相同，均为 $(-\infty, +\infty)$；对应法则也相同，即在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒有 $\sqrt[3]{x^4 - x^3} = x\sqrt[3]{x - 1}$.

【例 3】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = |x - 1|$；　　(2) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

【解题思路】 在判定一个函数是否为奇函数或偶函数时，首先应考察它的定义域是不是关于原点对称，定义域关于原点对称是一个函数为奇函数或偶函数的必要条件. 对奇函数而言，如果它在 $x = 0$ 处有定义，条件 $f(0) = 0$ 也是必须满足的，然后再考察是否有关系式

$$f(-x) = -f(x) \tag{1}$$

或

$$f(-x) = f(x) \tag{2}$$

成立. 如果式 (1) 成立，那么 $f(x)$ 为奇函数；如果式 (2) 成立，那么 $f(x)$ 为偶函数.

解 (1) $f(x) = |x - 1|$

这个函数没有给出具体的定义域，就意味着在它的定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 考察其奇偶性，由于 $f(-x) = |-x - 1| = |x + 1| \neq f(x)$ 或 $-f(x)$，所以它既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$

因为不论 x 取什么值，恒有 $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$，所以函数的定义区间为 $(-\infty, +\infty)$，而且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lg \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$=\lg\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

【例 4】 设$f(x+1)=x^2+4x+2$,求$f(x)$.

【解题思路】 本题是复合函数的运算问题：已知$f[g(x)]$的表达式，求$f(x)$的表达式.

这类问题的求解有两种途径：

(1) 令$u=g(x)$,从中反解出$x=\varphi(u)$,从而由$f[g(x)]=f(u)$得到$f(u)$的表达式，再将其中的u换为x，即得到$f(x)$的表达式.

(2) 将$f[g(x)]$的表达式凑成$g(x)$的函数关系式，然后将所有$g(x)$的位置换为x，则得到$f(x)$的表达式.

解 1 设$x+1=t$，则$x=t-1$，从而有

$$f(t)=(t-1)^2+4(t-1)+2=t^2+2t-1$$

故
$$f(x)=x^2+2x-1$$

解 2 将表达式右端化为$(x+1)$的函数关系式，有

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x^2+4x+2\\&=(x^2+2x+1)+(2x+2)-1\\&=(x+1)^2+2(x+1)-1\end{aligned}$$

从而
$$f(x)=x^2+2x-1$$

【例 5】 下面的计算是否正确？如果不正确，请指出错误所在.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}&=\lim_{x\to0}\sin x\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}\\&=0\times\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

解 这样做不正确. 因为$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，所以不能用乘积的求极限法则. 但是，注意到$\cos\dfrac{1}{x}$是有界量$\left(因为\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1\right)$，当$x\to0$时，$\sin x$是无穷小，所以可利用“有界量乘以无穷小仍是无穷小”的性质，即

$$\lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}=0$$

【例 6】 下面的计算是否正确？如果不正确，请指出错误所在.

求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$时，可将$\tan x$用等价无穷小$x$来代替，将$\sin x$也用等价无穷小$x$来代替，即

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

解 这样做不正确. 分子的每一项用各自的等价无穷小去代换后再求极限，结果与原来的极限不一定相同. 只有整个分子（分母）或因子才能用等价无穷小代换，和差运算

中不能每一项分别作代换，不能将 $\tan x-\sin x$ 用 $x-x(x\to 0)$ 代换，因为 $x-x\equiv 0$，它与 $\tan x-\sin x$ 不是等价无穷小.

正确的作法是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sin^2 x\sim x^2$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}$$

【例7】　"无穷大的倒数为无穷小"，能说"无穷小的倒数为无穷大"吗？

解　由于常量零也是无穷小，但零的倒数是没有意义的（对于自变量的任何变化过程），因此"无穷小的倒数为无穷大"是不对的. 一般地，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

【例8】　无穷大与有界变量的乘积是否仍是无穷大？试举例说明.

解　不一定. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷大，而 $\sin x$ 为有界变量，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=1$，所以它们的乘积不是无穷大.

又如，当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷大，而 x^2 在 $[-1,2]$ 为有界变量，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以它们的乘积为无穷小.

【例9】　设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？画出 $y=f(x)$ 的图形.

【解题思路】　$f(x)$ 是一个分段函数，$x=0$ 是它的分段点，考察函数在分段点处的极限，通常所用的方法是求它的左、右极限. 再根据"左、右极限存在而且相等是极限存在的充要条件"来判定其极限是否存在.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限均存在，但不相等. 因此，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限不存在. 图 2－2 为 $y=f(x)$ 的图形.

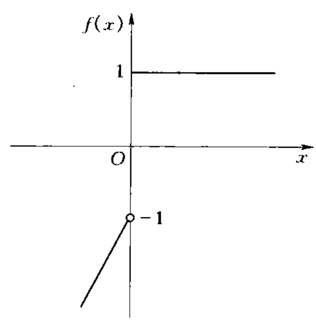

图 2－2

【例10】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\sin x^2}{5e^x+3x^2}$.

【解题思路】　求有理分式函数当 $x\to x_0$ 时的极限，只要分母当 $x\to x_0$ 时极限不为零，则可直接用 x_0 代替函数中的 x，极限值等于函数在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；如果分母当 $x\to x_0$ 时极限等于零，则要通过分解因

式、分母或分子有理化约去非零因子，再求极限，或用洛必达法则（第三章将介绍）等方法求极限.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}(5e^x+3x^2)=5\neq 0$，可直接用0代替函数中的 x，极限值等于函数在点 $x=0$ 处的函数值，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\sin x^2}{5e^x+3x^2}=\frac{\cos 0+\sin 0^2}{5e^0+3\times 0^2}=\frac{1}{5}$$

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+3}{5x^3+2x^2-x}$.

【解题思路】 当 $x\to\infty$ 时分子和分母都趋于 ∞，是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，因此不能直接用商的极限运算法则，为此先将分子和分母同时除以分母 x 的最高次幂 x^3，然后取极限（无穷小量分出法）.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x+3}{5x^3+2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$$

（当 $x\to\infty$ 时，$-\dfrac{2}{x^2}$，$\dfrac{3}{x^3}$，$\dfrac{2}{x}$，$-\dfrac{1}{x^2}$ 均为无穷小，极限都为零.）

【例 12】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\sqrt{x+1}}$.

【解题思路】 当 $x\to 0$ 时，由于函数的分子和分母的极限都是0，因此不能直接用商的极限运算法则，考虑到分母是无理式，可以将分母有理化，即将分子、分母同时乘以 $(1-\sqrt{x+1})$ 的共轭因式 $(1+\sqrt{x+1})$，然后约去无穷小因子 x 之后，再求极限.

解 $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\sqrt{x+1}}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sqrt{x+1})\sin x}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sqrt{x+1})\sin x}{1-(x+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sqrt{x+1})\sin x}{-x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)\\&=(-1)\times 2\\&=-2\end{aligned}$$

【例 13】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

【解题思路】 当 $x\to 1$ 时，分子和分母都趋于0，是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，因此不能直接用商的极限运算法则，可先将分子和分母分别进行因式分解，化简后再求极限.

解 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2$$

【例 14】　求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

【解题思路】　当 $x\to 2$ 时，两项均无极限，是 $\infty-\infty$ 型未定式，因此不能直接用差的极限运算法则，为此应先通分后约去无穷小因子，再求极限.

解

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

【例 15】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

【解题思路】　本题的数列不是由有限项构成的，因此不能用和的极限运算法则，而要通过恒等变形后再求极限.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$$

再将分子、分母同时除以 n^2，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

【例 16】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 8x}$.

【解题思路】　本题是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限问题，式中含有三角函数，可考虑利用第一个重要极限去求.

解 1　利用重要极限，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 8x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{8}\,\frac{\sin 3x}{3x}\,\frac{8x}{\sin 8x}\cos 8x\right)$$

$$=\frac{3}{8}$$

解 2　当 $x\to 0$ 时 $\sin 3x\sim 3x,\tan 8x\sim 8x$，利用等价无穷小代换，有