

现代 数学教育学

Xiandai Shuxue Jiaoyuxue

► 孙杰远 主编



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

现代 数学教育学

Xiandai Shuxue Jiaoyuxue

► 孙杰远 主编



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

· 桂林 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

现代数学教育学 / 孙杰远主编. — 桂林: 广西师范大学出版社, 2004. 6

ISBN 7-5633-4667-8

I. 现… II. 孙… III. 数学教学—教育学—师范大学—教材 IV. O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 055659 号

广西师范大学出版社出版发行

(桂林市育才路 15 号 邮政编码: 541004)
(网址: <http://www.bbtpress.cn>)

出版人: 肖启明

全国新华书店经销

广西地质印刷厂印刷

(广西南宁市建政东路 邮政编码: 530023)

开本: 890 mm × 1 240 mm 1/32

印张: 17 字数: 395 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

印数: 00 001 ~ 10 000 册 定价: 25.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。

《现代数学教育学》编委会

主任:易忠

常务副主任:孙杰远

副主任:汤服成 赵继源 刘金旺

主编:孙杰远

副主编:周莹

编委:(以姓氏笔划为序)

马 辉	王 兄	古 园	叶蓓蓓	付柳林	冯凤香	刘金旺
刘水凤	孙杰远	乔连全	汤服成	李信巧	易 忠	赵 飞
赵继源	周 莹	杨光伟	杨伟传	庞国萍	南江霞	畅娜丽
郭海燕	徐文龙	梁好翠	唐剑岚	黄海平	黄 勇	戚绍兵
蒋小云	蒋 婵	秦发金	潘 俭	廖运章	谭佩贞	



数学是人类思维的“体操”，也是各领域科学理论与实践发展的基础，这就决定了数学教育、数学教育研究及高师数学教育学科建设的必要性和重要性。在我国，将数学教育作为一门独立的学科是在20世纪80年代初期。国内广大数学教育工作者积极地比较、借鉴国外数学教育的发展和研究成果，结合中国的传统和国情，在这二十多年内使得这门学科的研究取得了较快的进展，从而极大地提升了各级各类数学教育实践的水平。数学教育从理论研究上形成了数学课程论、数学学习论、数学教学论三条主线，从实践与改革上出现了政府与学术组织相结合的引领趋势。

随着信息时代的到来，公民的数学素养受到了各国政府的重视，数学教育受到了前所未有的关注。许多国家从20世纪末到21世纪初都纷纷进行了不同侧重点的基础教育课程改革，以至使高师院校数学教育课程的改革成为必然，我国高等师范院校在新一轮的基础教育课程改革中也及时地做出了回应。在广西，“‘数学教育学’课程及教学的现代化改革”列为广西高等教育新世纪教改工程立项项目，项目组成员在课程结构的调整、课程内容的选择、教学方法的探索上做了大量的工作，在此基础上，他们组织区内外一些高师院校的数学教育工作者编写了这本《现代数学教育学》。

本书是针对高师院校中的“数学教育学”课程编写，它融合了国内同类作品的先进思想，突出时代性、综合性、应用性，力求创新。本书在继承我国数学教育研究成果的基础上，着眼于现代教育、心理理论背景下的数学教育原理的探索与诠释，力图构建符合时代发展需要的数学教育理论体系，迎合当代基础数学教育改革对高师数学教育的挑战。本书在编写过程中组织了从事数学教育研究的专家、学者及在教学一线从事数学教育学教学的高师教师和一批中小学教师参与讨论与编写，从而拓展了作品的适应性。

毋庸置疑，数学教育的研究是一项长期的工作，研究的内容和方法将随着时间的推移而变迁，这就需要数学教育界的广大同仁不懈地求索和超越。

易忠

2004年1月6日



前言

Q I A N Y A N

义务教育阶段《数学课程标准》的颁布与试行意味着我国基础教育数学课程改革已进入实质性阶段,而课改成败的关键是教师。为了使广大未来的和在职的数学教师具备可靠的数学教育理论知识,形成一定的数学教育研究能力,特别是能够有效地理解新课程改革的理念、目标,具有实施与参与新课程改革的能力,广西高等教育新世纪教改工程“‘数学教育学’课程及教学的现代化改革”项目组组织一批数学教育界的专家、学者编撰了《现代数学教育学》一书,以期构建赋予时代特征的高师“数学教育学”课程体系。

本书在编撰的过程中,从体例到内容上追求理论与实践相结合,其目的在于使读者“学以致用,学有所用,学用结合”,并逐步形成驾驭和研究数学教育的能力。全书共设计十三章,就现代数学教育的课程、学习心理、教学、科研实践等方面进行系统的论述与开放性的思考。每章下设若干节,节与节之间既有独立性,又内含一定的逻辑联系,以促成学习者良好的知识建构。章后设有思考问题(学习者须思考、讨论、辨别、解决的问题),部分章节还配有案例分析(相关的教育教学实践例证)。这种设计将有助于学习者就数学教育具体问题作针对性思考与参考。

本书第一章介绍了数学教育的历史、现状与未来,概括了新课程背景下的数学教育变革;第二章阐述了数学中的逻辑与表达;第三、四、五章结合心理学发展以及心理学对数学教育的影响论述了数学学习的心理规律;接下来讨论了数学教学的目的、过程、原则与方法,数学知识的获得与能力的培养等与数学学习心理紧密相关的问题;第六、七、九章围绕数学课程的课程标准、结构与开发、评价等问题进行全面论述。第八章是在现代教学设计理论背景下对数学教学设计的全新建构;第十章是对数学教学实践的系统分析;第十一、十二章论述了数学教育研究和实验设计的知识,以及数学教育理论与实践研究的发展动向;最后一

章讨论了数学教师的专业化发展。

通过本书的学习,学习者能了解数学教育的发展,掌握现代数学教育学的基本原理,形成良好的数学教学研究能力。

本书既可以作为数学教育专业的研究生、本科生、专科生的教材,又可以作为数学教育研究者的专业参考书,同时也可以作为中小数学教师自主研修辅导用书。

本书由广西师范大学孙杰远负责总体构思与组织编写、统稿。具体分工编写为:第一章由孙杰远、叶蓓蓓编写,第二章由潘俭、庞国萍、李信巧、叶蓓蓓编写,第三章由王兄、郭海燕编写,第四章由畅娜丽、刘水凤、付柳林、南江霞编写,第五章由乔连全、徐文龙、郭海燕编写,第六章由赵继源、南江霞编写,第七章由周莹、郭海燕、南江霞编写,第八章由唐剑岚、叶蓓蓓编写,第九章由杨光伟、杨伟传、郭海燕编写,第十章由梁好翠、蒋婵编写,第十一、第十二章由孙杰远、南江霞编写,第十三章由黄勇、冯凤香、叶蓓蓓编写。

本书从提纲到撰写,得到了广西师范大学副校长易忠教授的指导,广西师范学院的赵继源教授提出了重要的修改意见。广西师范大学出版社宋铁莎副主任为本书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示真诚谢意!由于作者水平有限,难免有不足之处,恳请读者指教。

编者

2004年1月



第一章 数学教育的历史、现状与未来	(1)
第一节 数学教育的历史沿革	(1)
第二节 当代数学教育及其发展趋势	(12)
第三节 新课程下的数学教育	(25)
思考题(一)	(31)
第二章 数学中的逻辑与表达	(34)
第一节 逻辑学简析	(34)
第二节 数学概念	(40)
第三节 判断与数学命题	(50)
第四节 数学推理与数学证明	(60)
第五节 数学语言与数学文化	(74)
思考题(二)	(97)
第三章 数学学习心理规律	(99)
第一节 学习理论与数学学习	(99)
第二节 建构主义与数学学习	(106)
第三节 数学概念与数学命题的学习	(116)
第四节 数学问题解决的学习	(124)
第五节 数学学习中的元认知	(129)
第六节 数学学习中的情感、意动因素	(132)
第七节 数学学习方式	(137)
思考题(三)	(142)

第四章 数学教学的目的、过程、原则与方法	(145)
第一节 数学教学目的	(145)
第二节 数学教学过程	(150)
第三节 数学教学原则	(155)
第四节 数学教学方法及选择	(165)
第五节 数学探究教学	(173)
第六节 现代信息技术与数学课程的整合	(178)
思考题(四)	(187)
第五章 数学知识的获得与数学素养的培养	(188)
第一节 数学知识概述	(188)
第二节 数学素养概述	(192)
第三节 数学技能与数学思想方法的学习	(194)
第四节 从学习理论发展重新审视数学知识的获得 与数学素养的培养	(198)
第五节 数感、符号感、空间观念、统计观念与数学 应用意识	(204)
第六节 数学创新思维的培养	(216)
第七节 数学建模	(222)
思考题(五)	(229)
第六章 数学课程标准	(239)
第一节 课程标准及其意义	(239)
第二节 义务教育数学课程标准解读	(252)
第三节 普通高中数学课程标准简介	(264)
思考题(六)	(274)
第七章 数学课程结构与开发	(276)
第一节 数学课程结构与类型	(276)



第二节 现代数学课程的管理与开发	(286)
第三节 数学教材的编写与使用	(302)
思考题(七)	(310)
第八章 数学教学设计	(311)
第一节 数学教学设计的基本原理和方法	(311)
第二节 学习者特征分析	(314)
第三节 数学教学目标设计	(321)
第四节 数学学习任务分析	(335)
第五节 数学教学过程设计	(351)
第六节 数学教学设计案例评析	(368)
思考题(八)	(374)
第九章 数学课程评价	(375)
第一节 课程评价概述	(375)
第二节 数学课程评价	(382)
第三节 数学课程评价模式	(415)
第四节 数学教育评价的发展趋势	(421)
思考题(九)	(424)
第十章 数学教学实践	(431)
第一节 数学教学实习	(431)
第二节 数学微格教学	(445)
思考题(十)	(448)
第十一章 数学教育研究	(449)
第一节 数学教育研究的意义	(449)
第二节 数学教育研究的内容与方法	(451)
第三节 数学教育研究的重要课题	(452)
思考题(十一)	(457)

第十二章 数学教育实验设计	(458)
第一节 数学教育实验的意义	(458)
第二节 数学教育实验的理论基础	(460)
第三节 数学教育实验的特征	(464)
第四节 数学教育实验的设计模式与选择	(466)
第五节 数学教育实验的统计分析方法	(476)
第六节 数学教育实验的程序与实例	(495)
思考题(十二)	(502)
第十三章 数学教师的发展	(503)
第一节 现代数学教师的职业内涵	(503)
第二节 现代数学教师的基本素能	(509)
第三节 数学教师的成长	(515)
第四节 新课程与数学教师的专业化发展	(520)
思考题(十三)	(524)
主要参考文献	(531)

第一章 数学教育的历史、现状与未来

第一节 数学教育的历史沿革

早在四五千年前,数学教育就出现了。埃及的纸草书,大概就是当时的实用计算手册;巴比伦的泥版书,记载着六十进位制记数法的数表和复利计算问题;中国殷虚的甲骨文,出现练习十进位制记数法。随着社会的发展,数学教育成为了中国古代的“六艺”之一,成为了柏拉图学院课程的重要组成部分,成为了近代西方工业革命的推动性因素,也成为了现代学校教育的基本组成部分以及信息社会的基础性动力。从使学生掌握必要的数学知识,形成基本的数学技能到培养学生的数学素养成为当今数学教育的一个核心问题,数学教育经过了一个漫长而曲折的历程。

由于天然的喜马拉雅屏障和太平洋的阻隔,数学的发展形成了东西方两种截然不同的体系。西方以严密的演绎逻辑体系著称,东方则形成了以筹算和算法为中心的非演绎逻辑体系,它们对于数学教育的影响形成了东西方两种不同的数学教育风格,西方注重理性精神和逻辑思维的养成,东方追逐算法的精确和实际问题的解决。

一、中国古代数学教育

我国出土的甲骨文中有了十进位制,它利用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等 13 个数字计算成千上万的数,殷虚甲骨文中最大的数是 3 万。在殷周时期,我国创造了筹算,这是世界上最早、古代最优秀的数字化计算工具。它与十进位制的记数法相结合,形成了我国独具特色的算法化的数学教育体系。这个体系延续了大约 2 000 年,在世界上长期居领先地位。

在十进位制的记数法的基础上,中国古代的数学经历了四次高峰,每次高峰都推进数学教育的一次大发展。

1. 第一次数学高峰与数学教育

我国第一次数学高峰是秦汉时期,以《九章算术》的成书为标志。西周时候的数学教育内容是“九数”,根据郑玄(东汉人)的《周礼》注“九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、盈不足、旁要、今有重差、勾股。”这样的数学内容划分形成了中国古代典型的数学框架,所指的都是社会生产及生活中的应用领域或常用数学模型。“九数”就是《九章算术》中的九个章节。

《九章算术》是中国古代承前启后的数学教科书典范,奠定了古代中国数学教育体系的基础,其开始编写的年代尚不能确定,但经过张苍(约公元前200年)和耿寿昌(约公元前50年)的整理大体成为定本。^① 全书收录246个问题,共分九章:方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。“方田”收录38道题目、21种方法,主要是解决生产管理中平面形土地面积的计算问题,以及与面积计算相关的分数四则运算问题;“粟米”收录46道题目、32种方法,主要是生产管理中的粮食兑换的计算问题,砖、竹、漆、布等生产、生活资料的买卖问题;“衰分”收录20道题目、22种方法,主要是流通、管理、分配中的按比例分配的计算问题,税收、罚款、计工、贷款等有关计算;“少广”收录24道题目、16种方法,内容涉及生产管理中的已知面积求边长,立方体、球求体积的问题;“商功”收录28道题目、24种方法,涉及生产、管理、流通的土方工程的计算问题,关于筑城、开运河、修堤坝、建粮仓等的计算问题以及多种立体体积的计算;“均输”收录了关于税收、徭役,即“均输平准”政策的计算问题28个和29种解决方法;“盈不足”是用“盈不足术”解决各类问题20个,以及17种解决方法,这章是用数学模型的建构方式书写;“方程”也属于数学模型的建构方式,收录了18个问题、19种解决方案;“勾股”共收录24个问题、22种解决方案,主要是用“勾股术”的方法解决生产、测量中的实际问题。

^① 马忠林等著:《数学教育史》,23页,广西教育出版社,2001年4月第1版。



《九章算术》继承了西周以来的十进位制、筹算、“九数”、《周髀》等传统数学成果,并且吸收了《算数书》《许商算术》《杜忠算术》等秦汉之际的数学书精华,成为数学学习的经典教科书。

2. 第二次数学高峰与数学教育

第二次高峰是三国、魏晋南北朝时期(约公元 220—589 年),这一时期一批数学家的活动和成就推动了我国传统数学及数学教育体系的继续发展。刘徽的《〈九章算术〉注》、《海岛算经》,祖冲之的圆周率的 8 位有效数字和密率等,都是传统数学在“术”方面的最高成就,《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》等是传统数学在问题型开放结构的扩大和发展。南北朝的数学专科学校开创了数学教育的新阶段。

东汉、三国时期的赵爽在《〈周髀算经〉注》中用“勾股方图”证明了勾股定理,给出了一元二次方程的一个求根公式(带负号的那个公式),并提出了“举一隅,得之以三”的数学教育思想。

刘徽是三国魏晋人,其著作《〈九章算术〉注》被认为是中国古代数学的重要著作之一。在该书中,刘徽集中了秦汉以来的创造发明,把中国古代数学提高到了一个新的水平,奠定了中国古代数学教育体系的坚实基础,主要的成果有:(1)求得圆周率为 $\frac{157}{50}$ 。(2)提出出入相补法、棋验法、齐同原理等。刘徽用出入相补法证明了勾股定理,此证明被现代数学家誉为最简洁、最完美的勾股定理证明。(3)数学概念的严格定义。“幂”,“凡广从相乘谓之‘幂’”;“率”,“凡数相与者谓之‘率’”;“方程”,“群物总杂,各列有数,总言其实,令每行为率,二物者乃再程,三物者三程,皆如物数程之,并列为行,故谓之方程”;“正负数”,“今两算得失相反,要令正负以名之”;“无理数”,“开之不尽,取之不竭之数,谓之无理数”。(4)“割圆术”。“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣。”它反映了数学的极限思想,从而可获得圆周率为 3.141 6。(5)重表法。他主张“析理以辞,解体用图”的数学推理方法,继承和

发展了以“经世致用”为目的,以应用问题集为形式,以筹算为工具,以“术”(即算法)为中心,密切联系实际的教学教育体系。《九章算术》经过刘徽的注释,成了中国古代数学教育的标准教科书。

魏、晋、南北朝时期,战乱频繁,官学时兴时废,主要教授的仍然是经学,并且注家蜂起,不断探求新的教学方法。经学教育包括了一定的数学内容,这是官学中数学教育的一个方面。这一期间,出现了大量数学书籍,流传至今的有《孙子算经》(4世纪末)、《海岛算经》(3世纪)、《张丘建算经》(5世纪)、《五曹算经》(6世纪)和《五经算术》(6世纪)等。这些书的体系和内容都带有明显的教科书特点。可以猜想这些书是当时官学传授数学知识的教材,魏、晋时数学教育主要由史官管理,北魏设置的太史博士就要教授一定的数学知识。

3. 第三次数学高峰与数学教育

隋唐时期迎来中国古代数学发展的第三次高峰,这个时期经济发达,文化繁荣,创办科举制度,设置明算科,建立数学专门学校——算学,设置算学博士和算学助教。算学分两个专业,学制各为6年,招收生徒,并以皇帝的名义钦定数学教科书,共十本,在我国历史上称为“算经十书”:《周髀算经》《九章算术》《孙子算经》《海岛算经》《张丘建算经》《五曹算经》《五经算术》《夏侯阳算经》《缀术》《辑古算经》,这十本书是中国古代传统的经典数学教科书。国家明确规定了考试内容和考试方法,考试合格者,可以委任官职。隋唐时期建立起如此完整的数学教育制度、如此提倡数学和发展数学教育事业,在世界历史上是空前的,它推动了天文、历法、土建工程等领域的发展。

隋唐时期,数学教育的形式呈现出多样化,除了官学以外,社会上还有私学家传、宗教人士传艺、经师兼授、手工徒制等,使宋元时期的数学成就达到了中国古代数学的顶峰。同时,隋唐的算学制度传入朝鲜和日本,朝鲜、日本相继设立了算学和算学博士,并采用“算经十书”作为教材,影响极为深远。



4. 第四次数学高峰与数学教育

我国古代的第四次数学高峰是在宋元时期。宋代官学、私学都很兴旺,还形成了独特的教育机构——书院,无论是官学、私学还是书院都进行数学教育。辽、金、元重视“汉化”教育,文教政策和教育制度基本上仿效唐、宋。这一时期,出现了我国古代数学和数学教育发展的新高峰,产生了一大批杰出的数学家和数学教育家。

沈括对于连续自然数求平方和问题创造了隙积术,并且给出了弓形的弧长公式。贾宪撰写了《黄帝九章算法细草》,列出了二项式展开式的系数表,提出了解方程的增乘开方法。秦九韶用“大衍求一术”解决了一次剩余问题,编撰了《数书九章》,用“开玲珑三乘方”法解决了方程有理根、无理根的判别与求解问题,并且率先使用“数学”一词。李治是解方程组原理——“天元术”的首倡者之一。他的《测圆海镜》与《益古演段》两书,包含了代数方程思想,解决了几何三角问题。

我国数学家朱世杰被美国著名的科学史家 G·萨顿称为“是他所生存时代的,同时也是贯穿古今的一位最杰出的数学家”,他的著作《四元玉鉴》则是“中国数学著作中最重要的一部,同时也是整个中世纪最杰出的数学著作之一”。他在高次联立方程组方面做了不少工作,还为教授初学者编著了《算学启蒙》一书,该书的 3 卷 20 门 259 个问题,大多与当时的社会生活有关,这本书传到了西方,也影响了日本和韩国的数学教育。

这个时代,值得一提的数学家还有杨辉(南宋末年),他的著作甚多,其中著名的是《详解九章算法》,他提出了一些实用的简捷算法;第一个进行“纵横图”的研究(这是中国古代“纯数学”研究的开端之一),创造“垛积术”(关于高阶等差级数的研究)等。作为数学教育家,他按照数学的逻辑编写教科书,编写了世界上迄今为止最早的数学教学大纲,即“习草纲目”,当中,杨辉的数学教育思想、原则、方法、态度,特别是关于循序渐进、循循善诱、启发思考、重视计算等方面的见解,至今仍有重要的参考价值。

这些数学家的成果把我国传统的实用性算法体系提升到了抽象性算法体系的高度。这些开拓性工作和科研成果达到了当时世界的最高水平。杨辉、沈括、朱世杰、丁巨等,改进了筹算的运算形式和方法,创造了各种算法口诀,实现了筹算向珠算的过渡,为普及数学教育创造了极为有利的条件。^① 总之,宋、辽、金、元是我国数学发展的黄金时期。到明、清,中国数学开始走下坡路,明代中期,西方数学被引进,“西学东渐”的浪潮触动了中国古代数学教育的非逻辑演绎体系,数学教育开始参考西方的数学教育体系。

二、西方古代数学教育

1. 古希腊的数学教育

在公元前 8 世纪到公元前 6 世纪,希腊进入奴隶社会,并且形成了独特的希腊城邦制,这时的数学和哲学是不分开的,所有的数学家也是哲学家。亚里士多德,是古希腊著名哲学家、科学家,他的学校几乎无所不教,无所不学。由于古希腊对数学的高度重视,把数学看作了世界的本原,因此在教育中十分注重数学教育。毕达哥拉斯在他的著作中把数学分成四大科:算术、几何、天文、音乐。这是人类第一次把数学按其研究内容进行分科,具有重要的教育意义,它一直延续了 2 000 多年,直到近代才有所改变。

古希腊的数学、科学以至于哲学都是以学派的发展而发展。学派是一种教育团体,其主要学者要给门人讲学。数学也是在学派的发展中生存并发展的。当时主要的学派有爱奥利亚学派(Ionia)的泰勒斯(Thales),毕达哥拉斯学派,智人学派,等等。

柏拉图是古希腊著名的哲学家和教育家,40 岁时在雅典创办了一个学园,进入这个学园必须熟悉几何学的基本原理,学园中数学课程是最受重视的。柏拉图对数学理论化有一定贡献,他的数学教育思想集中体现在其著作《理想国》中。

公元前 338 年,马其顿征服了希腊及地中海沿岸的许多地区。

^① 马忠林等:《数学教育史》,99 页,广西教育出版社,2001 年 4 月第 1 版。