R新课标

九年级

初中数学培优阶梯训练

丁保荣 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

CHUZHONG SHUXUE PEIYOU JIETI XUNLIAN

配人教版

初　中

数学培优阶梯训练（九年级）

主编　丁保荣

编委　方利生　刘智建　朱汝芳　朱晓燕

何星天　罗大明　陈晓岚　金旭颖

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学培优阶梯训练. 九年级/丁保荣主编. 一杭州：浙江大学出版社，2006.5(2008 重印)
ISBN 978-7-308-04724-1

Ⅰ. 初...　Ⅱ. 丁...　Ⅲ. 数学课—初中—习题
Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 014273 号

初中数学培优阶梯训练(九年级)

主　　编　丁保荣

责任编辑　包善贤　杨晓鸣
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571—88925592，88273066(传真)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州印校印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　16.25
字　　数　360 千
版 印 次　2006 年 5 月第 1 版　2008 年 7 月第 5 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-04724-1
定　　价　20.00 元

前 言

随着新课程的全面实施，新课标下的中考试题出现了很大变化。“能力综合型”、“开放探索型”试题在中考试卷中占有越来越大的分值。对于在旧的学习模式下成长起来的中学生来说这一变化恰恰是一道难关。分析近年来各地中考试卷可以看出，考查综合能力的“选拔型”试题由知识立意，转向能力立意，在知识交会点上命题，用常规的课堂教学思维去解答，已明显力不从心。研究一下“数奥”试题，我们能很容易发现：该试题旨在考查学生对知识理解深度和思维的综合创新能力，这一点恰恰是新课标素质教育中知识教学的核心内容，也是中考试题改革的精神实质。

观察对比历年来数奥试题和近几年来实验区中考试卷的难题、压轴题，不难看出，许多中考难题都能在“数奥”试题中看到“影子”。甚至某些试题就是上一届数学奥林匹克题的翻版。因此，我们学习和研究“数奥”试题不光是为了夺取“数奥”金牌，更重要的是可以让我们站在一个更高的角度，俯视课堂学习和中考，在学习和考试中取得更好的成绩。

有感于此，我们编写了这套丛书，将“数奥”与中考有机结合起来，借“他山之石”攻“此山之玉”，愿同学们找到一条通向成功的有效捷径。

本套丛书内容的难度定位于略高于中考水平，相当于“数奥”中等难度。以新课标、新中考说明中的重、难点和被竞赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础，结合各类典型的竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的开放性思维方法，培养和训练探究创新思维能力，对接近年中考中的经典“拔高”题，用“数奥”解题思维巧解，与教材同步训练，及时巩固，引导创新。

丛书通过丰富的栏目实践以上目标：[课程标准][赛点直击]公布了各章相关的新课标要求及竞赛大纲相应赛点，为你导航；[例题精析]给出范例的探索性分析，为你引路；[试场练兵]引领你提前投入中考、数奥训练。

本丛书知识讲解系统，题型全面，可作为新课标学习的同步提高，中考复习和竞赛辅导教材使用。

丁保荣

目 录
Contents

上 册

下 册

上　册

第一章　二次根式

课程标准

了解二次根式的概念及其加、减、乘、除运算法则，会用它们进行有关实数的简单四则运算(不要求分母有理化).

赛点直击

1. 最简二次根式、同类二次根式是二次根式中的重要概念，因为二次根式的加减实质就是合并同类二次根式.

2. 二次根式的运算是在整式、分式运算的基础上发展起来的，因此，恰当运用公式、分解因式、字母化等是二次根式运算中的常用技巧.

3. 开不尽方的算术平方根是一类重要的无理数，实数运算的关键是算术平方根的化简和运算，其中有三点必须引起注意：

(1) 多重根式的化简和计算：若 $a+b=A, a\cdot b=B$，则 $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=\left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right|$.

(2) 分母有理化：$\sqrt{2}$的一个有理化因式是$\sqrt{2}$；$\sqrt{2}+\sqrt{3}$的一个有理化因式是$\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(3) 实数的整数部分和小数部分：先通过估算已知无理数，确定其整数部分 a 的值，再用已知无理数与 a 的差表示小数部分.

例题精析

例 1　(武汉中考)已知 $x<0$，化简二次根式 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 的正确结果为　(　　)

A. $\sqrt{y}$　　B. $\sqrt{-y}$　　C. $-\sqrt{y}$　　D. $-\sqrt{-y}$

【分析】　既可以化简被开方式，又可把根号外的因式移入根号内，解题的关键是首先确定被开方式中字母的符号.

例 2　(江西中考)化简$\sqrt{8}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$得　(　　)

A. -2　　B. $\sqrt{2}-2$　　C. 2　　D. $4\sqrt{2}-2$

【分析】　考查实数的运算，运用$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$来计算，反向运用则可简化

运算结果，类似的还有$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

例 3 （“希望杯”全国数学邀请赛题）若$a\neq b$，a，b，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$都是有理数，那么$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$（　　）

A. 都是有理数　　B. 一个是有理数，另一个是无理数

C. 都是无理数　　D. 是有理数还是无理数不能确定

【分析】 这里应先考虑$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是否为有理数. 因为$\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}$，$\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}$，所以$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$在是否为有理数的问题上是“统一”的，而由$\sqrt{a}-\sqrt{b}$为有理数就可以确定$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的有理性了.

例 4 方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{10\ 025}$的正整数解有（　　）

A. 无数组　　B. 4 组　　C. 2 组　　D. 0 组

【分析】 $\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$，$\sqrt{10\ 025}$必为同类二次根式，等式才能成立，故先化简$\sqrt{10\ 025}$.

例 5 （株洲中考）请你仔细观察下列式子：

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，　　$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，　　$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$，

……

试计算：$1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}+\cdots+\frac{1}{10+\sqrt{99}}=$________.

【分析】 以一列算式为背景，通过观察、归纳、总结规律，从而发现要计算式与以上算式的关系，进而得出结果.

例 6 （宁波中考）已知$a<0$，化简$\sqrt{4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{4+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=$________.

【分析】 从化简被开方数入手，注意$\sqrt{m}$中$m\geqslant 0$的隐含制约.

例 7 （河南省初中数学竞赛题）设$x=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$，则$\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2+xy=$________.

【分析】 由于需求值的代数式可以用$x+y$，$x-y$及xy来表示，故我们可以先计算$x+y$，$x-y$与xy的值，然后再代入计算即可.

例 8 阅读材料：

黑白双雄、纵横江湖；双剑合璧，天下无敌. 这是武侠小说的常见描述，其意是指两个人合在一起，取长补短，威力无比. 在二次根式中也有这种相辅相成的“对子”. 如：$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$，$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$，它们的积不含根号，我们说这两个二次根式互

为有理化因式，其中一个是另一个的有理化因式. 于是，二次根式除法可以这样解：如 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$. 像这样，通过分子、分母同乘以一个式子把分母中的根号化去或把根号中的分母化去，叫做分母有理化.

解决问题

(1) $4+\sqrt{7}$的有理化因式是________，$\frac{2}{3\sqrt{2}}$分母有理化得________.

(2) 计算：①（陕西省中考题）$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$；

②（全国初中数学联赛题）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\,003}+\sqrt{2\,004}}$.

(3)（天津市初中数学竞赛题）已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，求 x^4+y^4 的值.

【分析】 对于(3)，把 x、y 分母有理化，将 $x+y$、xy 的结果整体代入求值.

例 9 （太原市初中数学竞赛题）已知 x、y 都为正整数，且$\sqrt{x}+3\sqrt{y}=\sqrt{300}$，求 x、y 的值.

【分析】 因为只有同类二次根式才能合并，而$\sqrt{x}+3\sqrt{y}=\sqrt{300}$，故$\sqrt{x}$、$\sqrt{y}$都与$\sqrt{300}$为同类二次根式.

例 10 计算

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})$；

(2)（天津市初中数学竞赛题）$(\sqrt{3}+1)^{2\,001}-2(\sqrt{3}+1)^{2\,000}-2(\sqrt{3}+1)^{1\,999}+2\,001$；

(3)（"希望杯"全国数学邀请赛试题）$\frac{\sqrt{1\,997}}{(\sqrt{1\,997}-\sqrt{1\,999})(\sqrt{1\,997}-\sqrt{2\,001})}+\frac{\sqrt{1\,999}}{(\sqrt{1\,999}-\sqrt{1\,997})(\sqrt{1\,997}-\sqrt{2\,001})}+\frac{\sqrt{2\,001}}{(\sqrt{2\,001}-\sqrt{1\,997})(\sqrt{2\,001}-\sqrt{1\,999})}$.

【分析】 对于(2)，先提取公因式$(\sqrt{3}+1)^{1\,999}$；对于(3)，设$\sqrt{1\,997}=a$，$\sqrt{1\,999}=b$，$\sqrt{2\,001}=c$，把二次根式的运算化为分式的运算.

考场练兵

1.（湖北中考）化简$\frac{3}{\sqrt{7}-2}$的结果是（　　）

A. $\sqrt{7}-2$　　B. $\sqrt{7}+2$　　C. $3(\sqrt{7}-2)$　　D. $3(\sqrt{7}+2)$

2.（山东中考）若 $ab<0$，则代数式 $\sqrt{a^2b}$可化简为（　　）

A. $a\sqrt{b}$　　B. $a\sqrt{-b}$　　C. $-a\sqrt{b}$　　D. $-a\sqrt{-b}$

3. (海南中考)有下列说法：① 2 的平方根是$\sqrt{2}$；② $\sqrt{5a}$与$\sqrt{0.2a}$是同类二次根式；③ $\sqrt{2}-1$与$\sqrt{2}+1$互为倒数；④ $\sqrt{3}-2$的绝对值是$2-\sqrt{3}$. 其中错误的有　(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. (黑龙江中考)若$\sqrt{a^2}=-a$,则实数 a 在数轴上的对应点一定在　(　　)

A. 原点左侧　　B. 原点右侧

C. 原点或原点左侧　　D. 原点或原点右侧

5. (青海中考)如果最简二次根式$\sqrt{3a-8}$与$\sqrt{17-2a}$是同类根式,那么使$\sqrt{4a-2x}$有意义的 x 的取值范围是　(　　)

A. $x\leqslant 10$　　B. $x\geqslant 10$　　C. $x<10$　　D. $x>10$

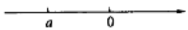
6. (贵州中考)计算：$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$的结果是　(　　)

A. $\dfrac{1+\sqrt{2n+1}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2n-1}}{2}$　　C. $\dfrac{1-\sqrt{2n-1}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

7. (江西中考)化简：$\dfrac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}=$________.

8. (青海中考)若$|x+y+4|+\sqrt{(x-2)^2}=0$,则$3x+2y=$________.

9. (浙江中考)实数 a 在数轴上的位置如图所示,化简$\sqrt{a^2}=$________.



10. (青海中考)当$m\geqslant 2$时,化简：$\sqrt{4-4m+m^2}=$________.

11. (山西中考)观察下列各式：$\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$,$\sqrt{2+\dfrac{1}{4}}=3\sqrt{\dfrac{1}{4}}$,$\sqrt{3+\dfrac{1}{5}}=4\sqrt{\dfrac{1}{5}}$,……

请你将猜想到的规律用含自然数 $n(n\geqslant 1)$的代数式表示出来是________________.

12. (山东中考)阅读下面的文字后,回答问题.

小明和小芳解答题目:“先化简下式,再求值：$a+\sqrt{1-2a+a^2}$,其中$a=9$”时,得出了不同的答案.

小明的解答是：原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$;

小芳的解答是：原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(a-1)=2a-1=2\times 9-1=17$.

(1) ________的解答是错误的.

(2) 错误的解答错在未能正确运用二次根式的性质：________.

13. (山东中考)已知$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,求$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$的值.

14. (北京中考)计算：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{8}+(\sqrt{3}-1)^{0}$.

15. (辽宁中考)当 $x=2$，$y=3$ 时，求代数式 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值.

16. (漳州中考)下列等式成立的是　　(　　)

A. $\sqrt{4+9}=\sqrt{4}+\sqrt{9}$　　B. $3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

C. $\sqrt{(-4)^{2}}=-4$　　D. $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

17. (镇江中考)已知 $|a|=5$，$\sqrt{b^{2}}=3$，且 $ab>0$，则 $a+b$ 的值为　　(　　)

A. 8　　B. -2　　C. 8 或 -8　　D. 2 或 -2

18. (青海中考)若 $\sqrt{2x-6}+x-1$ 有意义，则 x 的取值范围是________.

19. (连云港中考)计算：$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=$________.

20. (徐州中考)计算：$(-2)^{2}-2^{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt{9}$.

21. (黄石中考)计算：$|-5|+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt{(-2)^{2}}-(\sqrt{7}-1)^{0}$.

22. (绍兴中考)求下列各数的和：

$-\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$，$\left|\frac{1}{2}\right|$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$.

赛场练兵

23.（“希望杯”全国数学邀请赛试题）已知 x 是实数，则 $\sqrt{x-\pi}+\sqrt{\pi-x}+\frac{x-1}{\pi}$ 的值是（　　）

A. $1-\frac{1}{\pi}$　　B. $1+\frac{1}{\pi}$　　C. $\frac{1}{\pi}-1$　　D. 无法确定

24.（“希望杯”全国数学邀请赛试题）已知 $b-a>0$，且 $a\geqslant 0$，那么 $\sqrt{a^2-2ab+b^2}-|a+b|$（　　）

A. 化简为 0　　B. 化简为 $-2b$　　C. 化简为 $-2a$　　D. 不能再化简

25.（辽宁初三竞赛题）若 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，则化简根式 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2+4x+1}$ 的结果为（　　）

A. $-4x+3$　　B. 5　　C. $2x+3$　　D. $4x-3$

26.（武汉市初中数学选拔赛试题）化简 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ 所得的结果为（　　）

A. $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$　　B. $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$　　C. $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　　D. $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

27.（山东初中数学竞赛题）若 $ab\neq 0$，则等式 $-\sqrt{-\frac{a^5}{b}}=a^3\sqrt{-\frac{1}{ab}}$ 成立的条件是（　　）

A. $a>0,b>0$　　B. $a<0,b>0$　　C. $a>0,b<0$　　D. $a<0,b<0$

28.（江苏省初中数学竞赛题）已知 $b>a>0$，$a^2+b^2=4ab$，则 $\frac{a+b}{a-b}$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{3}$

29.（江苏省初中数学竞赛题）已知整数 x、y 满足 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=\sqrt{50}$，那么整数对 (x,y) 的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

30.（四川省初中数学竞赛题）已知 $a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-2$，$c=5-2\sqrt{5}$，那么 a、b、c 的大小顺序是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

31.（全国初中数学竞赛题）已知实数 $a\neq b$，且满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$，$3(b+1)=3-(b+1)^2$，则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为（　　）

A. 23　　B. -23　　C. -2　　D. -13

32.（全国初中数学联赛题）已知 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$c=\sqrt{6}-2$，那么 a,b,c 的大小关

系是　(　　)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

33.（全国初中数学联赛题）化简$\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$的结果是　(　　)

A. 无理数　　B. 真分数　　C. 奇数　　D. 偶数

34.（全国初中数学联赛题）设 $r\geqslant4$，$a=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+1}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}$，$c=\dfrac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$，则下列各式中，一定成立的是　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

35.（"希望杯"全国数学邀请赛试题）已知对于正整数 n，有 $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，若某个正整数 k 满足 $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{2}{3}$，则 $k=$ ________.

36.（"希望杯"全国数学邀请赛试题）已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，则$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=$ ________.

37.（河南初中数学竞赛题）当 $a=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$，化简$\dfrac{9-6a+a^2}{a-3}+\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的结果是________.

38.（全国初中数学联赛题）已知 $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$，那么$\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}=$ ________.

39.（全国初中数学联赛题）已知 $a<0$，$ab<0$，化简$\dfrac{1}{|a-b-3\sqrt{2}|-|b-a+\sqrt{3}|}=$ ________.

40.（全国初中数学联赛题）$\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$，则 $x=$ ________.

41.（辽宁初三数学竞赛题）设 $x+1=\dfrac{2\,003\times2\,005}{x-1}$，求$\left|\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+1}-\dfrac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right|$的值.

42.（全国初中数学联赛题）求满足等式 $x\sqrt{y}+\sqrt{x}y-\sqrt{2\,003x}-\sqrt{2\,003y}+\sqrt{2\,003xy}=2\,003$的正整数 x、y 的值.

43.（全国初中数学联赛题）已知方程 $x^2-6x-4n^2-32n=0$ 的根都是整数，求整数 n 的值.

第二章　一元二次方程

课程标准

1. 理解配方法，会用因式分解法、公式法、配方法解简单的数字系数的一元二次方程.

2. 经历用观察、画图或计算器等手段估计方程解的过程.

赛点直击

1. 一元二次方程是解数学问题的重要工具，应熟练求解. 解一般形式的一元二次方程，因式分解法较便捷，它体现了“降次求解”的基本思想；公式法具有一般性，是解一元二次方程的主要方法；配方法是推导公式法的关键，特殊情况下适用配方法.

2. 解有些与一元二次方程相关的问题时，直接求解常给解题带来诸多不便，若运用整体思想，构造零值多项式，降次变形等相关转化思想方法，往往能使问题获得简解. 如配方法把方程转化为$(x+a)^2=b$的形式，体现了形式的转化；公式法直接利用公式，把方程中的“未知”转化为“已知”；分解因式法通过“降次”把一元二次方程转化为两个一元一次方程等. 在其他数学领域中，转化思想方法运用也很广泛.

例题精析

例 1　（江苏初中数学竞赛题）自然数 n 满足$(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$，这样的 n 的个数是　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】　运用幂的性质，将问题转化为解方程.

例 2　（河北初中数学竞赛题）已知$\triangle ABC$的三边长为 a、b、c，且满足方程 $a^2x^2-(c^2-a^2-b^2)x+b^2=0$，则方程根的情况是　（　　）

A. 有两个相等实根　　B. 有两个相异实根

C. 无实根　　D. 不能确定

【分析】　解题的关键是对判别式进行变形，结合三角形三边关系判断其值的正负性.

例 3　（太原市初中数学竞赛题）已知 α、β 是方程 $2x^2-3|x|-2=0$ 的两个实数根，则 $\dfrac{\alpha\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ 的值是　（　　）

A. -1　　　B. 1　　　C. $-\frac{2}{3}$　　　D. $\frac{2}{3}$

【分析】 分类讨论,脱去绝对值符号,或运用 $x^2=|x|^2$ 性质,解关于 $|x|$ 的一元二次方程.

例 4 (天津初中数学竞赛题)已知 $m^2+n^2+mn+m-n+1=0$,则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值等于( )

A. -1　　　B. 0　　　C. 1　　　D. 2

【分析】 已知等式具有 $a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0$ 的特点,自然想到配方.

例 5 (河北初中数学竞赛题)已知实数 a、b、x、y 满足 $ax+by=3$,$ay-bx=5$,则 $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)$ 的值为________.

【分析】 把待求式用已知式表示,关键是展开后添项配方.

例 6 (全国初中数学竞赛题)若 $x^2+xy+y=14$,$y^2+xy+x=28$,则 $x+y$ 的值为________.

【分析】 恰当处理两个等式,解关于 $x+y$ 的一元二次方程.

例 7 (全国初中数学联赛题)已知 b^2-4ac 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个实数根,则 ab 的取值范围是________.

【分析】 由题意得 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac$ 或者 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac$. 因 $b^2-4ac=(\sqrt{b^2-4ac})^2$,故上述两个等式都可视作关于 $\sqrt{b^2-4ac}$ 的一元二次方程.

例 8 (河南中考)已知 $a>2$,$b>2$,试判断关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 与 $x^2-abx+(a+b)=0$ 有没有公共根,请说明理由.

【分析】 由于其中一个方程根的表达形式复杂,所以可设出两方程的公共根 m,建立 a 的等式,通过消去 a 的二次项寻找解题突破口,这是解公共根问题的基本策略.

例 9 (北京初中数学竞赛题)若 x、y 是实数,且 $m=x^2-4xy+6y^2-4x-4y$,确定 m 的最小值.

【分析】 选择 x 为主元,将条件等式重新整理成关于 x 的二次三项式,从配方的角度求 m 的最小值.

例 10 (1)(四川初中数学竞赛题)关于 x 的方程 $x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$ 只有一个实数根,求 a 的取值范围.

(2)(重庆初中数学竞赛题)设方程 $|x^2+ax|=4$ 只有 3 个不相等的实数根,求 a 的值和相应的 3 个根.

【分析】 对于(1),通过分解降低,将高次方程转化为一元二次方程根的情形讨论;对于(2),去掉绝对值符号,原方程可化为两个一元二次方程,原方程只有 3 个不相等的实数根,则其中一个判别式大于零,另一个判别式等于零.

例 11 (南京中考)如图 2-1,$AB\perp BC$,$DC\perp BC$,垂足分别为 B、C.

(1) 当 $AB=4$,$DC=1$,$BC=4$ 时,在线段 BC 上是否存在点 P,使 $AP\perp PD$? 如果存在,求线段 BP 的长;如果不存在,请说明理由.

(2) 设 $AB=a$，$DC=b$，$AD=c$，那么当 a、b、c 之间满足什么关系时，在直线 BC 上存在点 P，使 $AP\perp PD$？

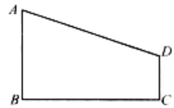


图 2－1

【分析】 对于(1)，将 $AP\perp PD$ 作为条件，运用相似三角形的性质列出方程讨论其根即可；对于(2)，假设 BC 存在点 P 使 $AP\perp PD$，设 $BP=x$，建立一个含有参变量 a、b、c 的关于 x 的一元二次方程，通过判别式对 a、b、c 之间的数量关系加以研究.

例 12 (南京中考)在一块长方形镜面玻璃的四周镶上与它的周长相等的边框，制成一面镜子. 镜子的长与宽的比是 2∶1. 已知镜面玻璃的价格是每平方米 120 元，边框的价格是每米 30 元，另外制作这面镜子还需加工费 45 元. 设制作这面镜的总费用是 y 元，镜子的宽度是 x m.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 如果制作这面镜子共花了 195 元，求这面镜子的长和宽.

【分析】 总费用＝镜面玻璃的费用＋边框的费用＋加工费.

例 13 (黄石中考)一次函数 $y=x+b$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k+3}{x}$ 图象的交点为 $A(m,n)$，且 m，$n(m<n)$ 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2+(2k-7)x+k+3=0$ 的两个不相等的实数根，其中 k 为非负整数，m，n 为常数.

(1) 求 k 的值；

(2) 求 A 点坐标与一次函数解析式.

【分析】 (1) 由方程有两个不等实根知 $b^2-4ac>0$，又 k 为非负整数，则可求出 k 值；(2) 解一元二次方程求出 m，n，并代入 $y=x+b$ 中得出 b 的值.

例 14 (吉林中考)如图 2－2，用同样规格黑白两色的正方形瓷砖铺设矩形地面，请观察下列图形并解答有关问题：

(1) 设铺设地面所用瓷砖的总块数为 y，请写出 y 与 n(n 表示第 n 个图形)的函数关系式；

(2) 按上述铺设方案，铺一块这样的矩形地面共用了 506 块瓷砖，求此时 n 的值；

(3) 若黑瓷砖每块 4 元，白瓷砖每块 3 元，在问题(2)中，共需花多少元钱购买瓷砖？

(4) 是否存在黑瓷砖与白瓷砖块数相等情形？请通过计算说明为什么.

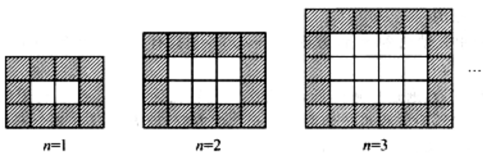


图 2－2

【分析】 瓷砖总块数分别为 12，20，30，…，白瓷砖总块数分别为 2，6，12，…发现这两组数的特点并能用 n 的代数式表示，这是解本例的关键.

例 15 (匈牙利奥林匹克竞赛题)怎样的整数 a、b、c 满足不等式：$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$？

【分析】 一个不等式涉及三个未知量，不妨从配方入手，由不等关系导出相等关系$\left(\text{若}\begin{cases}a^2\geqslant 0\\ a^2\leqslant 0,\end{cases}\text{则 } a^2=0\right)$.

考场练兵

1. (江西中考)下面是李刚同学在一次测验中解答的填空题，其中答对的是 ( )

   A. 若 $x^2=4$，则$\underline{x=2}$

   B. 方程 $x(2x-1)=2x-1$ 的解为$\underline{x=1}$

   C. 若方程$(m-2)x^{|m|}+3mx-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则$\underline{m=-2}$

   D. 若分式$\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$的值为零，则$\underline{x=1,2}$

2. (桂林中考)用换元法解方程：$x^2-3x+\dfrac{8}{x^2-3x+1}=5$，如果设 $x^2-3x+1=y$，那么原方程可化为 ( )

   A. $y^2-6y+8=0$ B. $y^2-6y-8=0$ C. $y^2+6y+8=0$ D. $y^2+6y-8=0$

3. (沈阳中考)某商品经过两次降价，由每件 100 元调至 81 元，则平均每次降价的百分率是 ( )

   A. 8.5% B. 9% C. 9.5% D. 10%

4. (太原中考)小萍要在一幅长 90 厘米、宽 40 厘米的风景画的四周外围，镶上一条宽度相同的金色纸边，制成一幅挂图(如图 2－3)，使风景画的面积是整个挂图面积的 54%. 设金色纸边的宽为 x 厘米，根据题意所列方程为 ( )

   A. $(90+x)(40+x)\times 54\%=90\times 40$

   B. $(90+2x)(40+2x)\times 54\%=90\times 40$

   C. $(90+x)(40+2x)\times 54\%=90\times 40$

   D. $(90+2x)(40+x)\times 54\%=90\times 40$

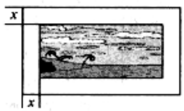


图 2－3

5. (大连中考)关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=2$，则 x^2+bx+c 分解因式的结果为________.

6. (玉林中考)把图 2－4 折叠成正方体，如果相对应的值相等，则一组 x、y 的值是________.

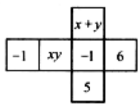


图 2－4

7. (常州中考)请写出一个根为 $x=1$，另一个根满足 $-1<x<1$ 的一元二次方程________.

8. (河南中考)如果$(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，那么 $a+b$ 的值为________.

9. (宁波中考)等腰三角形 ABC 中，$BC=8$，AB、AC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的

两根，则 m 的值是________.

10. (上海理科实验班招生试题)实数 a、b、c 满足 $a^2+6b=-17$，$b^2+8c=-23$，$c^2+2a=14$，则 $a+b+c=$________.

11. (海口中考)某水果批发商场经销一种高档水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克. 经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克涨价 1 元，日销售量将减少 20 千克. 现该商场要保证每天盈利 6 000 元，同时又要使顾客得到实惠，那么每千克应涨价多少元？

12. (南京中考)某灯具店采购了一批某种型号的节能灯，共用去 400 元. 在搬运过程中不慎打碎了 5 盏，该店把余下的灯每盏加价 4 元全部售出，然后用所得的钱又采购了一批这种节能灯，且进价与上次相同，但购买的数量比上次多了 9 盏. 求每盏灯的进价.

13. (桂林中考)为了保护环境，充分利用水资源，某市经过“调整水费听证会”讨论后决定：水费由过去每立方米 0.8 元调整为 1.1 元，并提出“超额高费措施”，即：每户每月定额用水不超过 12 立方米，超过 12 立方米的部分，另加收每立方米 2 元的高额排污费.

(1) 某户居民响应节水号召，计划月平均用水量比过去少 3 立方米，这使得 260 立方米的水比过去多用半年，问这户居民计划月平均用水量是多少立方米？

(2) 如果该户居民响应节水号召后，在一年中实际有四个月的月平均用水量超过计划月平均用水量的 40%，其余八个月按计划用水. 那么按照新交费法，该户居民一年需要交水费多少元？