教育部职业教育与成人教育司推荐教材

数学（下册）

SHUXUE

主编 曾庆柏

中国财政经济出版社

教育部职业教育与成人教育司推荐教材

数 学

（下册）

曾庆柏 主 编
张 波 副主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学．下册/曾庆柏主编．—北京：中国财政经济出版社，2007.8
教育部职业教育与成人教育司推荐教材
ISBN 978－7－5095－0026－2

Ⅰ．数…　Ⅱ．曾…　Ⅲ．数学课－专业学校－教材　Ⅳ．G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第092853号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www．cfeph．cn

E－mail：jiaoyu＠cfeph．cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036
发行电话：88190654　88190655（传真）
北京市慧美印刷有限公司印刷
787×1092毫米　16开　13.5印张　303 000字
2008年4月第1版　2008年4月北京第1次印刷
定价：18.00元
ISBN 978－7－5095－0026－2/O·0002
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本套教材，是根据《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》精神，并参照2000年教育部颁布的《中等职业学校数学教学大纲（试行）》及五年制高等职业教育数学课程教学要求，借鉴国外先进的职业教育理念和模式，结合我国职业教育的实际，按照以就业为导向、以培养能力为本位、以“必需、够用”为度的基本原则编写的，可供三年制中等职业教育和五年制高等职业教育的学生使用.

本套教材分上、下两册，共15章. 各册内容及每章建议学时如下：

上　册	学　时	下　册	学　时
第1章　集合与逻辑用语	10	第9章　直线的方程	12
第2章　不等式	8	第10章　二次曲线的方程	18
第3章　函　数	6	*第11章　直线、平面、空间几何体	22
第4章　指数函数与对数函数	10	第12章　排列、组合、二项式定理	12
第5章　三角函数（上）	14	第13章　概率初步	12
第6章　平面向量	12	*第14章　统计初步	10
第7章　三角函数（下）	8	*第15章　复数	10
第8章　数　列	10		

本套教材在体例上有下列特点：

1. 有些章节加了“*”号，供不同专业选修，其余内容为各专业必修.

2. 设置了“思考”栏目. 所提出的问题，有些是探索性的，有些是知识的延伸，有些是对数学思想的渗透. 这些问题一般没有给出明确答案，需要探索、讨论或学习了后续知识才能完成.

3. 每章设有“阅读空间”，介绍了数学应用、数学思想方法、数学史等方面的内容，为学生提供了丰富的课外材料，以拓展学生的知识视野，提高学生的数学文化素养.

4. 每章设有“文件夹”. 文件夹分成左右两部分，左边部分是本章知识点的逻辑关系图，右边部分是相应知识的归纳总结，并留有空格，需要学生自己完成. 旨在利用现代信息技术中收集、整理、归档文件的基本思想方法，帮助学生进行复习小结.

5. 每章设有“数学实验”，介绍了用MATLAB求解数学问题的方法，让学生了解数学应用的新技术. 在有条件的学校，可设立数学实验室，开设数学实验课程，开展研究性学习，以发掘学生的数学应用和创新实践能力. 这样，对于学

生学习计算机和其他学科以及对学生综合素质的培养都是很有裨益的.

6. 每一小节后面都配备了练习，以巩固教学内容，供课内外作业选用；每章最后配有一组复习题，供复习全章内容用. 其中部分加了“*”号的题，供学有余力的学生选做.

本套教材还配有练习册，主要作为课外作业使用.

本套教材由曾庆柏担任主编，张波担任副主编. 参加教材编写的还有：易涤尘、李杰、谢再新、秦丽辉、潘万伟、张建、曾蓉、张志强、裴红冰. 在本书出版过程中，得到了中国财政经济出版社的大力支持，谨在此表示衷心感谢.

由于成书仓促，不足之处在所难免，恳请专家和广大师生提出宝贵意见和建议.

编　者

2007年5月

目 录

第 9 章　直线的方程

我们知道，代数量可以用几何方法来说明，反之，几何量也可以用代数方法来说明. 直线是最基本的几何量之一，本章用代数方法对直线的一些特性进行研究. 首先讨论直线的倾斜角与斜率，再讨论直线的方程，然后研究两条直线平行、垂直的条件，以及两直线的交点与夹角，最后介绍点到直线的距离.

§9.1

直线的倾斜角与斜率

1. 直线的倾斜角

我们知道，在平面直角坐标系中，点可以用它的坐标表示，那么直线能否用平面直角坐标系中点的坐标表示呢？为此，我们首先来研究确定直线的条件.

在生活中，我们经常看到这样的两种情形(图 9－1)：

（1）用两颗钉子，就可以将一根木棒固定在墙上.

（2）在确定的平面内，给高射炮的炮筒指定一个倾斜角，就可以将炮筒固定.

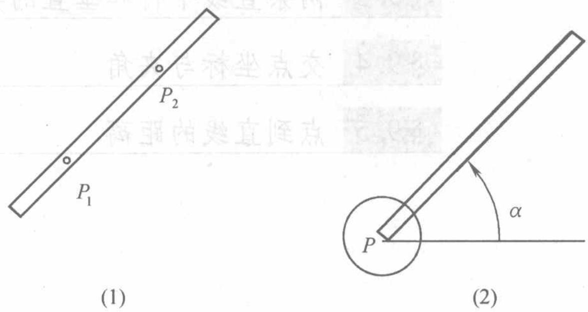


图 9－1

根据上述事实和类似经验，我们得出确定直线的条件有(图 9－2)：

（1）两点确定一条直线.

（2）一点和一个倾斜角确定一条直线.

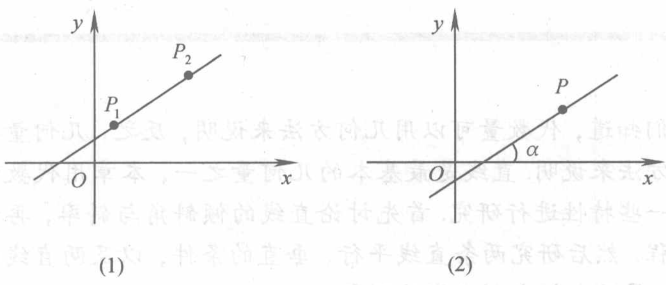


图 9－2

第一种情形我们是熟知的，第二种情形还比较陌生，下面重点讨论.

怎样规定一条直线的倾斜角呢？

如图 9－3，直线 l 与 x 轴相交，我们把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线 l 重合时所转过的最小正角 α，叫做直线 l 的**倾斜角**. 当直线 l 和 x 轴平行或重合时，我们规定 l 的倾斜角为0°. 因此，直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$（或 $0 \leqslant \alpha < \pi$）.

很明显，平面直角坐标系中，每一条直线都有一个确定的倾斜角.

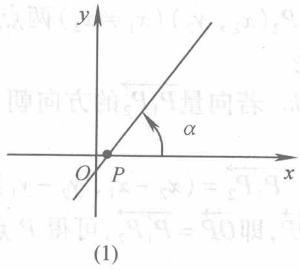


图 9－3

2. 直线的斜率

实际中，常用的还有下面的斜率概念.

如果直线 l 的倾斜角 α 不是 90°，那么倾斜角 α 的正切值叫做直线 l 的**斜率**，记作 k，即

$$\boxed{k = \tan\alpha \ (\alpha \neq 90°).}$$

如果直线 l 的倾斜角 α 是 90°，那么该直线没有斜率.

倾斜角与斜率有以下关系（图 9－4）：

（1）当 $\alpha = 0°$ 时，$k = 0$；

（2）当 $0° < \alpha < 90°$ 时，$k > 0$；

（3）当 $90° < \alpha < 180°$ 时，$k < 0$；

（4）当 $\alpha = 90°$ 时，k 不存在.

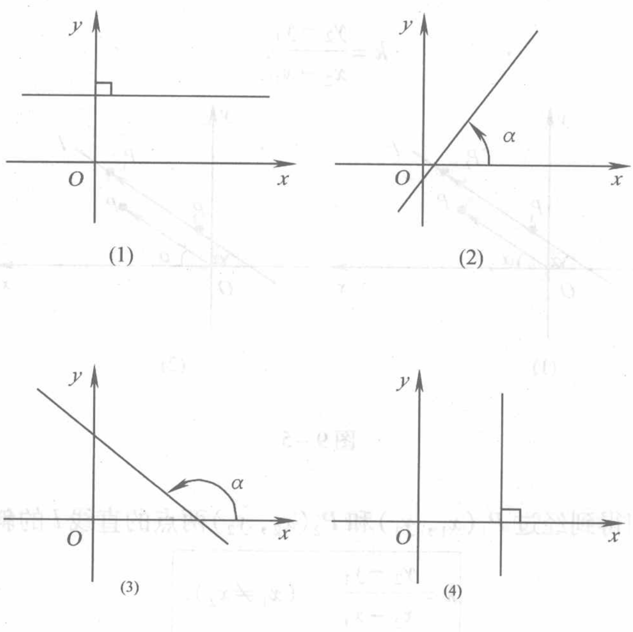


图 9－4

很明显，平面直角坐标系中，每一条倾斜角 α 不是 90° 的直线，都有一个确定的斜率.

思考　任何直线都有倾斜角吗？任何直线都有斜率吗？

下面我们来讨论，如何由直线上的两点坐标求直线的斜率.

如果直线 l 过 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)(x_1 \neq x_2)$ 两点，那么直线 l 惟一确定，如何用这两点的坐标表示直线 l 的斜率呢？

设 l 的倾斜角是 α，斜率是 k. 若向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向朝上（图 9－5(1)），则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

过原点 O 作与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 相等的向量 $\overrightarrow{OP}$，即 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_1P_2}$，可得 P 点的坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. 于是，根据三角函数中正切的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

即

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

若向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的方向朝上（图 9－5(2)），则可类似推得

$$\tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

即

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

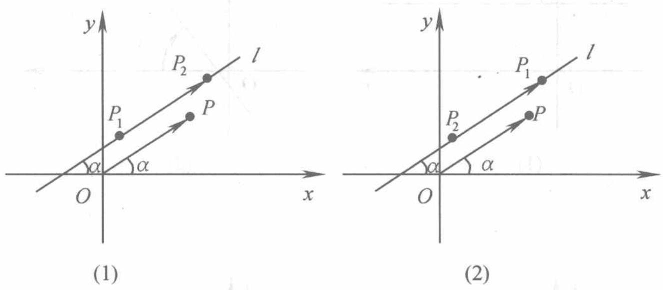


图 9－5

综上所述，我们得到经过 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点的直线 l 的**斜率公式**为

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2).}$$

思考　应用上述公式计算过 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点的直线斜率时，与 P_1 和 P_2 两点坐标的顺序有关吗？

例 1　已知直线 l 经过 $A(-2, 3)$，$B(2, -1)$ 两点，求 l 的斜率和倾斜角.

解　将两点的坐标代入斜率公式，得

$$k=\frac{-1-3}{2-(-2)}=-1,$$

即

$$\tan\alpha=-1.$$

因为 $0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$，所以倾斜角 $\alpha=135^\circ$.

因此，直线 l 的斜率是 -1，倾斜角是 135°.

例 2　设直线 l_1 的倾斜角 $\alpha_1=30^\circ$，直线 $l_2 \perp l_1$（图 9－6），求 l_1，l_2 的斜率.

解　设 l_2 的倾斜角为 α_2，l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2，则

$$k_1=\tan\alpha_1=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由已知 $l_2 \perp l_1$，得

$$\alpha_2=90^\circ+30^\circ=120^\circ.$$

于是

$$\begin{aligned} k_2&=\tan\alpha_2=\tan 120^\circ \\ &=\tan(180^\circ-60^\circ) \\ &=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}. \end{aligned}$$

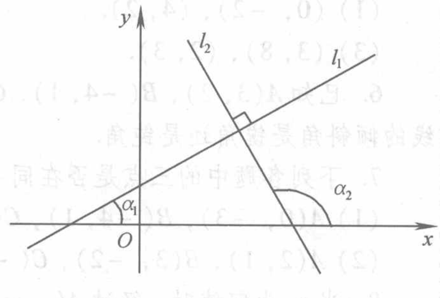


图 9－6

故 l_1 的斜率为 $k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，l_2 的斜率为 $k_2=-\sqrt{3}$.

例 3　证明 $A(3, 3)$，$B(-2, -1)$，$C(-7, -5)$ 三点在同一直线上.

证　设直线 AB、AC 的斜率分别为 k_{AB}，k_{AC}，则

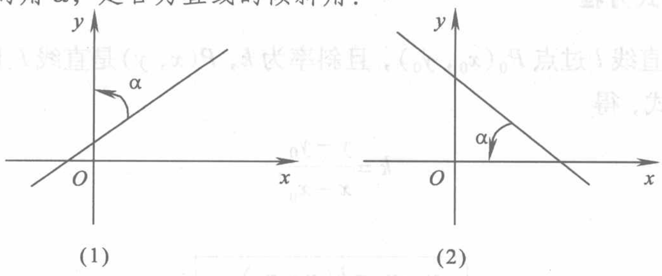
$$k_{AB}=\frac{-1-3}{-2-3}=\frac{4}{5},$$

$$k_{AC}=\frac{-5-3}{-7-3}=\frac{4}{5}.$$

因为 $k_{AB}=k_{AC}$，所以直线 AB、AC 的倾斜角相等. 又因为 AB 和 AC 有公共点 A，所以 AB、AC 重合，即 A、B、C 三点在同一条直线上.

练　习

1. 下述图中的角 α，是否为直线的倾斜角？



第 1 题图

2. 在平面直角坐标系，画出经过原点，且斜率分别为 1、-1、2 的直线.

3. 已知直线的倾斜角，求它的斜率：

(1) $\alpha=45°$. (2) $\alpha=150°$.

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. (4) $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

4. 已知直线的斜率，求它的倾斜角：

(1) $k=\sqrt{3}$. (2) $k=0$.

(3) $k=2$. (4) $k=-3$.

5. 求经过下列每两个点所确定的直线的斜率和倾斜角：

(1) $(0,-2)$, $(4,2)$. (2) $(0,0)$, $(-1,\sqrt{3})$.

(3) $(3,8)$, $(2,3)$. (4) $(0,4)$, $(1,-5)$.

6. 已知 $A(3,2)$, $B(-4,1)$, $C(0,-1)$, 求直线 AB、AC、CB 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

7. 下列各题中的三点是否在同一条直线上：

(1) $A(0,-3)$, $B(-4,1)$, $C(1,-1)$.

(2) $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(-4,19)$.

8. 当 m 为何值时，经过 $A(-m,6)$、$B(1,3m)$ 两点的直线的斜率是 12?

§9.2

直线方程的几种形式

由上节知道，在平面直角坐标系中，已知一个点 $P_0(x_0,y_0)$ 和斜率 k，或给定两点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$，就能惟一确定一条直线，那么我们能否用这些条件将直线上所有点的坐标 (x,y) 所满足的关系表示出来呢？这就是本节要研究的直线方程问题.

1. 直线的点斜式方程

如图 9-7，设直线 l 过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k，$P(x,y)$ 是直线 l 上不与 P_0 重合的任意一点. 由斜率公式，得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).} \tag{1}$$

很明显，过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 上的点的坐标都满足方程(1)；反之，坐标

满足方程(1)的点都在过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 上. 因此，方程(1)就是过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 的方程.

因为方程(1)由直线上一点及其斜率确定，所以叫做直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**.

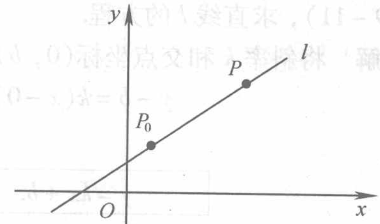


图 9－7

例 1　求经过点 $P_0(1, -3)$，且它的倾斜角为 45°的直线的方程，并画出图形.

解　由于直线过点 $P_0(1, -3)$，且它的斜率是

$$k=\tan 45°=1.$$

代入点斜式方程，得

$$y-(-3)=1(x-1),$$

即

$$x-y-4=0.$$

这就是所求的直线方程.

画图时，先在直角坐标系内画出点 $P_0(1, -3)$，再在直线上另取一点 P_1，由 P_0 和 P_1 即可画出直线. 为此，令 $y=0$，代入直线方程，得 $x=4$，因此点 $P_1(4,0)$ 在 l 上，于是过 P_0、P_1 点的直线即为所求(图 9－8).

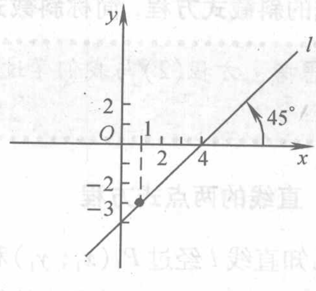


图 9－8

思考　在平面直角坐标系中，任何直线的方程都可以用点斜式表示吗?

如图 9－9，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，倾斜角 $\alpha=0°$. 这时，$k=\tan 0°=0$. 代入点斜式方程，得

$$y-y_0=0,$$

即

$$y=y_0.$$

这就是说，方程 $y=y_0$ 表示经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且平行于 x 轴的直线. 特别地，当 $y_0=0$ 时，方程 $y=0$ 表示 x 轴.

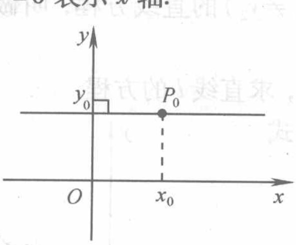


图 9－9

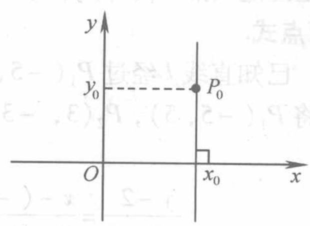


图 9－10

如图 9－10，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，倾斜角 $\alpha=90°$. 这时，直线没有斜率，它的方程不能用点斜式表示. 因为直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，因此它的方程为

$$x=x_0.$$

这就是说，方程 $x=x_0$ 表示经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且平行于 y 轴的直线. 特别地，当 $x_0=0$

时，方程 $x=0$ 表示 y 轴.

例 2 已知直线 l 的斜率为 k，且与 y 轴的交点为 $(0, b)$（图 9－11），求直线 l 的方程.

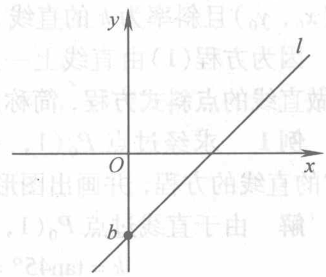


图 9－11

解 将斜率 k 和交点坐标 $(0, b)$ 代入点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$\boxed{y=kx+b.} \tag{2}$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b，叫做直线 l 的**纵截距**. 方程(2)由它的斜率 k 和纵截距 b 确定，所以叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式**.

> **思考** 方程(2)与我们学过的一次函数 $y=kx+b$ 类似，你如何从直线方程的角度认识一次函数？

2. 直线的两点式方程

已知直线 l 经过 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ $(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2)$ 两点，怎样求直线 l 的方程呢？

根据斜率公式，得直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

将斜率 k 和点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标代入点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

因为 $y_1\neq y_2$，所以上式两边同除以 y_2-y_1，得

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \tag{3}$$

这就是经过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ $(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2)$ 的直线方程，叫做**两点式方程**，简称**两点式**.

例 3 已知直线 l 经过 $P_1(-5, 2)$，$P_2(3, -3)$ 两点，求直线 l 的方程.

解 将 $P_1(-5, 5)$，$P_2(3, -3)$ 两点的坐标代入两点式方程，得

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)}.$$

整理，得所求直线 l 的方程为

$$5x+8y+9=0.$$

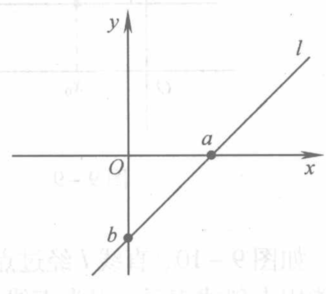


图 9－12

例 4 如图 9－12，已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$，与 y 轴的交点为 $B(0, b)$，其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，求直线 l 的方程.

解 将 $A(a, 0)$，$B(0, b)$ 的坐标代入两点式方程，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

整理，得直线 l 的方程为

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \tag{4}$$

我们把直线 l 与 x 轴的交点 $(a, 0)$ 的横坐标 a，叫做直线 l 的**横截距**. 方程(4)由直线的横截距 a 和纵截距 b 确定，所以叫做直线的**截距式方程**，简称**截距式**.

思考　直线的横截距 a 和纵截距 b 总为正值吗？

练　习

1. 求下列直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(3, -2)$，斜率 $k=5$.

(2) 经过点 $B(0, -4)$，斜率 $k=-2$.

(3) 经过点 $C(-3, 2)$，倾斜角 $\alpha=0°$.

(4) 经过点 $D(3, 0)$，倾斜角 $\alpha=90°$.

2. 求下列直线的斜截式方程，并画出图形：

(1) 倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$，纵截距是 $b=\sqrt{2}$.

(2) 斜率 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，经过点 $P(0, -3)$.

3. 求经过下列两点的直线方程：

(1) $A(-2, 1)$，$B(1, 3)$.

(2) $A(0, 4)$，$B(3, 0)$.

(3) $A(2, 3)$，$B(0, 0)$.

4. 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 横截距 $a=5$，纵截距 $b=6$.

(2) 横截距 $a=-3$，纵截距 $b=-6$.

5. 已知三角形三个顶点为 $A(0, -2)$，$B(3, 4)$，$C(-1, 0)$，求：

(1) 三条边所在的直线方程.

(2) 三条中线所在的直线方程.

6. 一直线经过点 $A(2, -7)$，它的倾斜角等于直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的倾斜角的 2 倍，求这条直线的方程.

3. 直线的一般式方程

观察直线的点斜式、斜截式、两点式和截距式知，它们都是关于 x，y 的二元一次方程，且都可写成 $Ax+By+C=0$ 的形式. 例如，斜截式方程 $y=kx+b$ 可写成

$$kx+(-1)y+b=0.$$