YANJIUSHENG RUXUE SHUXUE KAOSHI JIAOCHENG

研究生入学数学考试教程

【吕新民 吴阔华 主编】

华南理工大学出版社

研究生入学数学考试教程

（非数学类专业）

吕新民　吴阔华　主编

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书作为工科各专业考研的数学教材，内容严格按教育部制订的"数学考试大纲"编写．为了适应考生"提高"的特点，突出基本功和综合运用能力的训练，内容覆盖了数学一、数学二、数学三及数学四的所有考点和解题方法．

本书结构新颖，条理清楚，内容丰富，重点突出，可作为工科数学提高班的教材，也可用于考生自学．

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学数学考试教程/吕新民，吴阔华主编．—广州：华南理工大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5623-2925-1

Ⅰ．研…　Ⅱ．①吕…②吴…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 070124 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：z2cb@scut.edu.cn　　　　**http://www.scutpress.com.cn**

责任编辑：张　颖
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张**：9.75　**字数**：260 千
版　　次：2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000 册
定　　价：16.00 元

目　　录

第一部分　考点诠释

第二部分　专题讲座

第三部分　全真模拟

第一部分

考 点 诠 释

在这一部分里，我们主要就《高等数学》、《线性代数》及《概率论与数理统计初步》的整个内容结合考研大纲作一个全面的复习.当然，这里的“全面”并非面面俱到，有些熟知的内容我们只是点到为止.重点将放在以下几个方面：

1. 透视某些核心概念的理解，如函数的极限、矩阵的秩与方阵的逆、随机变量的分布函数等.

2. 阐述某些基本运算的解题技巧，如求极限、导数与积分，利用初等变换求矩阵的秩与方阵的逆，求随机变量的分布律与概率密度等.

3. 强调某些重要结果的应用，如微分中值定理的应用、行列式展开式定理的应用、抽样分布定理的应用等.

1 《高等数学》部分

1.1 函数与极限

1.1.1 大纲考点

(1) 极限与连续的概念以及它们与左右极限的关系；

(2) 无穷小的概念、性质，无穷小的比较以及应用等价无穷小替换求极限的方法；

(3) 极限存在的两个准则及两个重要极限的应用；

(4) 闭区间上连续函数的性质及其应用.

1.1.2 重点释疑

(1) 等价条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$均存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$. 这一等价条件主要用来判断分段函数在分段点处极限的存在性，指数函数在自变量的某一变化过程中当指数趋向于无穷大时的极限的存在性及反三角正切、余切函数在自变量趋向于无穷大时函数极限的存在性.

注 $+\infty,-\infty,\infty$**作为某一运算的结果，我们是不加区别的. 但是，从下面的例 2 中我们可以看出：作为自变量的变化趋势而言，必须严格区分开来.**

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & |x|\leqslant 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$，判断 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$是否存在？

解 因为

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=|-1-1|=2,$$

从而 $f(-1+0)\neq f(-1-0)$，故 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$不存在.

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，求 $f(1-0)$，$f(1+0)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在？

解

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

(2) 利用等价无穷小替换求极限必须熟练记住以下等价关系：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0, a\neq 1)$；$e^x-1\sim x$；$(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x$ $(\lambda>0)$.

与此同时，我们必须把握如下替换原则：被替换部分必须是作为整个表达式的一个广义因子，或以和或差形式表示的因子替换后不能为零.

请从下面两个实例体会利用等价无穷小替换求极限的替换原则.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\sin x\cdot\ln(1+3x)}$.

解 利用等价无穷小替换，我们有：当 $x\to 0$ 时，

$$e^{-x^2}-1\sim -x^2,\quad \sin x\sim x,\quad \ln(1+3x)\sim 3x,$$

进而，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x\cdot(3x)}=-\frac{1}{3}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{1-x}-1}$.

解 将 $e^{2x}-e^{-3x}$ 视为函数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{1-x}-1}$ 的一个广义因子，因为

$$e^{2x}-e^{-3x}=(e^{2x}-1)-(e^{-3x}-1)\sim 2x-(-3x)=5x\neq 0,$$

因此，我们有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)-(e^{-3x}-1)}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-(-3x)}{-\frac{x}{2}}=-10.$$

(3) 作为极限存在的一种特殊情形，必须掌握函数在一点处连续的等价条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f(x_0-0)$$

与 $f(x_0+0)$ 均存在，且

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

(4) 求极限是本章的一种基本的运算，求极限的方法除了本章介绍的方法以外，还分散在以后的各章节中. 基本的方法主要有夹逼准则；两个重要极限；等价无穷小替换；罗必塔法则(数列极限必须转化为对应的函数情形)；Taylor 展开式法(数列极限必须转化为对应的函数情形)；求连续函数的极限(仅对函数极限而言)；单调有界法(仅对数列极限而言)；定积分法(仅对数列极限而言)；级数法(仅对数列极限而言)等. 这些方法并不是孤立的，具体在求一个极限时，应该灵活运用，有时需将某几种方法联合使用.

1.1.3 函数与极限典型实例

1. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+x-t)\,dt}{(1-e^{x^2})(1+\cos x)}=$ ________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} & x<1\\ \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}} & x>1\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，则常数 $a=$ ________.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=1$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=$______.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$______.

(5) 设 $a,b\in\mathbb{R}$,$f(x)=\dfrac{1}{a+e^{bx}}$在$\mathbb{R}$上连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则 a,b 应满足的条件是______.

(6) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

(7) 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x}} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$______.

2. 选择题

(1) "对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|<2\varepsilon$"是数列 x_n 收敛于a 的(　)条件.

A. 充分但不必要　　B. 必要但不充分

C. 充要　　D. 既非充分也不必要

(2) 当 $f(x)$满足条件(　)时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})f(x)=0$.

A. 仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$　　B. 仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在

C. $f(x)$为有界函数　　D. $f(x)$为任意函数

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=2$, $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{g(x)}=e$,则 $g(x)$可取为(　).

A. $\sin^2x$　　B. $\cos^2x$　　C. $\tan^2x$　　D. $\cot^2x$

(4) 设 $f(x)=\int_0^x e^t\sin x^2\mathrm{d}t$,$g(x)=\int_0^x e^x\sin t^2\mathrm{d}t$,当 $x\to0$ 时有(　).

A. $f(x)$与 $g(x)$为同阶无穷小　　B. $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小

C. $f(x)$是比 $g(x)$更低阶的无穷小　　D. $f(x)$是比 $g(x)$更高阶的无穷小

(5) 设 $f(x)$和 $g(x)$定义在$\mathbb{R}$上,$f(x)$为连续函数且 $f(x)\neq0$,$g(x)$有间断点,则下列函数必有间断点的是(　).

A. $f[g(x)]$　　B. $g[f(x)]$　　C. $|g(x)|$　　D. $f(x)g(x)$

(6) 设正项数列$\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$(　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 可能存在,可能不存在

(7) 设数列$\{x_n\}$的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$,当 $n\to\infty$时,x_n 是(　).

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 有界变量　　D. 无界变量

3. 设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(a)=f(b)$,证明存在 $x_0\in[a,b]$,使 $f(x_0)=$

$f\left(x_0+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

4. 设 $x_0>0, x_n=\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$,其中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足:

(1) $a\leqslant f(x)\leqslant b$,对于任意 $x\in[a,b]$;

(2) $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\alpha|x_2-x_1|$ $(0<\alpha<1)$,其中 x_1、x_2 是 $[a,b]$ 中任意两点.

证明:对于任意 $x_1\in[a,b]$,数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程 $x=f(x)$ 在 $[a,b]$ 中唯一的解.

参考答案

1. (1) $-\dfrac{1}{4}$. 提示:令 $u=1+x-t$,则

$$\int_0^x\ln(1+x-t)\mathrm{d}t=-\int_{1+x}^1\ln u\mathrm{d}u=\int_1^{1+x}\ln u\mathrm{d}u,$$

对分母而言,当 $x\to0$ 时,$1-\mathrm{e}^{x^2}\sim-x^2$,$1+\cos x\to2$,替换后再用罗必塔法则求即可.

(2) $\ln2$. 提示:由题设,$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,则 $f(1+0)$ 与 $f(1-0)$ 均存在,且 $f(1+0)=f(1-0)$. 借助于此关系式即可求出 a.

(3) $2\ln2$. 提示:题设条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=1$,结合当 $x\to0$ 时 $2^x-1\sim x\ln2$,我们有 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim x\ln2$. 当 $x\to0$ 时 $x\ln2\to0$,即 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}$,也即 $\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim x\ln2$.

(4) $\dfrac{1}{6}$. 提示:令 $t=\dfrac{1}{x}\to0$,再用罗必塔法则求即可.

(5) $a\geqslant0, b<0$. 提示:因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续,故 $a+\mathrm{e}^{bx}>0$,而 $\mathrm{e}^{bx}>0$,所以 $a\geqslant0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}=0$,故只需当 $x\to-\infty$ 时,$\mathrm{e}^{bx}\to+\infty$,即 $b<0$.

(6) 12. 提示:当 $x\to0$ 时,$\mathrm{e}^{2x}-1\sim2x\to0$,于是 $\sqrt{1+f(x)\sin x}-1\to0$,从而 $f(x)\sin x\to0$ 且 $\sqrt{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\sin x$,进而有 $3=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{2x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(7) 1. 提示:先求出 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$,再利用函数在某点处连续的定义即可得.

2. (1) C. 提示:对于任意给定的充分小的正数 ε,2ε 依然还是一个充分小的正数,对照数列极限的定义,这是一个等价的充要条件.

(2) C. 提示:直接计算易得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$. 利用无穷小的性质:一个无穷小量与一个有界量的乘积还是一个无穷小量,即得.

(3) D. 提示:借助于重要极限,从第一个关系式可以推断:当 $x\to0$ 时,$f(x)\sim x^2$,再由第二个关系式可以推断 $g(x)$ 应该选取 $\cot^2x$.

(4) A. 提示:当 $x\to0$ 时,$f(x)=\int_0^x\mathrm{e}^t\sin x^2\mathrm{d}t=\sin x^2\int_0^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\sin x^2(\mathrm{e}^x-1)\sim x\sin x^2\sim x^3$,$g(x)=\int_0^x\mathrm{e}^x\sin t^2\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t$. 利用无穷小的比较,同时结合使用罗必塔法则即可得.

(5) D. 提示:用反证法结合连续函数的性质易知答案 D 是正确的.

(6) A. 提示:由题设知,$x_n>0$,该数列有下界. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$,知该数列是单调递减的(因为由数

列极限的保号性，必存在正整数N，使得当 $n>N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1$)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的. 由此易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(7) D. 提示：注意到如下重要结论：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n},\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}$均存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$. 针对该题而言，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\infty$，因此，它既不是无穷小量，也不是无穷大量，当然也不是有界量.

3. 作辅助函数 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$. 由连续函数的性质知：$F(x)$在闭区间$\left[a,\frac{b+a}{2}\right]$上连续，且

$$F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b).$$

若 $f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，由于 $f(a)=f(b)$，所以 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)=0$，此时我们只要取 $x_0=a$ 或$\frac{a+b}{2}$即可；

若 $F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq0$，由于 $f(a)=f(b)$，知 $F(a)$与 $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$异号，因而由介值定理必存在 $x_0\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)\subset(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right)$.

4. 因为

$$x_n=\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=1+\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}=2-\frac{2}{2+x_{n-1}},$$

所以 $1<x_n<2$，故数列$\{x_n\}$是有界的. 又因为

$$x_{n+1}-x_n=\left(2-\frac{2}{2+x_n}\right)-\left(2-\frac{2}{2+x_{n-1}}\right)=2\left(\frac{1}{2+x_{n-1}}-\frac{1}{2+x_n}\right)=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})},$$

不难知 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_1-x_0 具有相同的符号. 故当 $x_1>x_0$ 时，数列$\{x_n\}$是单调递增的；当 $x_1<x_0$ 时，数列$\{x_n\}$是单调递减的. 总之，数列$\{x_n\}$是单调有界的，从而其极限必存在，不妨令其为 a，进而有

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}=\frac{2(1+a)}{2+a},$$

故 $a=\sqrt{2}$.

5. 因为 $x_{n+1}=f(x_n)$，事实上，数列$\{x_n\}$收敛于方程 $x=f(x)$在$[a,b]$中的解，即是证明该数列存在极限. 由条件(2)易得：函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，从而

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|=|f(x_{n+1})-f(x_n)|\leqslant\alpha|x_{n+1}-x_n|,$$

故由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，因此数列$\{x_n\}$必收敛. 这样一来，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$，即极限值是方程 $x=f(x)$的根.

唯一性：假定还有 $y\in[a,b]$使得 $y=f(y)$，由条件(2)我们有

$$|x-y|=|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|,$$

这只能$|x-y|=0$，即 $x=y$.

1.2 一元函数微分学

1.2.1 大纲考点

(1) 导数与微分的概念；

(2) 显函数、复合函数、隐函数及由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数，简单函数

的 n 阶导数;

(3) 微分中值定理(包括 Rolle 定理,Lagrange 中值定理,Cauchy 中值定理,Taylor 展开式定理)及其应用;

(4) 微分学的几何应用(利用导数研究函数的性态,即作图)及分析应用(证明不等式,讨论方程根的个数等);

(5) 了解曲率的计算公式.

1.2.2 重点释疑

(1) 熟练把握导数定义的如下两种形式:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

依据导数的定义,导数事实上是一种特殊的极限.同时,导数作为一种特殊的极限,自然有

$$f'(x_0)=A\Longleftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A,$$

这一事实通常用来判断分段函数在分段点或指数函数在某点处是否可导.

值得注意的是,一旦涉及抽象函数在某一点处的可导性或求某一点的导数时,往往需要借助于定义来求.

例 1 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2}{x^3-1}=-\dfrac{1}{4}$,求 $f'(1)$.

解 因

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}=-\frac{1}{4},$$

且

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1)=0,$$

则

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+2)=0.$$

注意到 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,可得 $f(1)=-2$. 于是,依据导数的定义,我们有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}\cdot\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=-\frac{3}{4}.$$

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处的切线,关键在于求 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$. 即使对于某些抽象函数,只要知道了 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 的值,同样也能写出所需的切线方程:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

例 2 求下列曲线在指定点处的切线方程.

(1) 已知 $y=f(x)$ 为 $g(x)=e^x+\sin x$ 的反函数,求 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

(2) 求曲线 $r=6\cos\theta-2$ 在 $r=1$ 处的切线方程.

(3) 求曲线 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

解 (1) 我们只需要求出 $f(1)$、$f'(1)$ 即可写出所需的切线方程. 由题设 $g(0)=1$,借助于 $y=f(x)$ 为 $g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$ 的反函数,则 $f(1)=0$. 又由反函数的求导法则,知 $f'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{2}$,故所求的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

(2) **注意在极坐标系下,导数$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$不代表曲线上点$(r,\theta)$处的切线斜率(千万不能将此与直角坐标系下导数的几何意义混淆).**

欲求切线斜率,必须首先通过极坐标与直角坐标的如下关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 6\cos^2\theta - 2\cos\theta \\ y = 6\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta \end{cases}$$

转化为以 θ 为参数的参数方程进行.

当 $r=1$ 时,$\theta=\dfrac{1}{3}\pi$ 或 $\dfrac{5}{3}\pi$,此时$\left(1,\dfrac{1}{3}\pi\right)$与$\left(1,\dfrac{5}{3}\pi\right)$对应点为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$和$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3\cos2\theta - \cos\theta}{-3\sin2\theta + \sin\theta},$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{5\pi}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

故所求切线方程为

$$\left(y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

(3) 由于函数 $g(t)=|t|$ 在 $t=0$ 处不可导,因此,我们不能直接由参数方程的求导法则求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$. 这里必须回到导数的定义(定义既可判断可导性,同时在可导的前提条件下还可求出其导数),

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t\to0}\frac{y(0+\Delta t)-y(0)}{x(0+\Delta t)-x(0)} = \lim_{\Delta t\to0}(5|\Delta t|+4\Delta t)\cdot\frac{1}{1+2\dfrac{\Delta t}{|\Delta t|}}.$$

因 $\lim\limits_{\Delta t\to0}(5|\Delta t|+4\Delta t)=0$, 而 $\left|\dfrac{1}{1+2\dfrac{\Delta t}{|\Delta t|}}\right|\leqslant1$ (当 $\Delta t\neq0$ 时). 利用等价无穷小的性质,可得

$$\lim_{\Delta t\to0}(5|\Delta t|+4\Delta t)\cdot\frac{1}{1+2\dfrac{\Delta t}{|\Delta t|}}=0.$$

因 $t=0$ 所对应的点为$(0,0)$,故所求的切线方程为 $y=0$.

(3) 求导数是本章的一个基本运算. 首先必须熟记基本初等函数的求导公式及导数的运算法则,在此基础上,应熟练掌握显函数、复合函数、隐函数及由参数方程所决定的函数的一阶、二阶导数. 另外,关于简单函数的 n 阶导数及微分中值定理(包括 Rolle 定理,Lagrange 中值定理,Cauchy 中值定理,Taylor 展开式定理)及其应用,我们将在以后章节中专题探讨.

1.2.3 一元函数微分学典型实例

1. 填空题

(1) 已知 $f'(1)=4$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}=$__________________.

(2) 设 $f(x)$可微,定义 $D^*f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$,则当 $f(x)=$________时,$D^*f(x)=f'(x)$.

(3) 设 $y=x^{100}\arctan x$,则 $y^{(101)}(0)=$__________________.

(4) 设 R 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点 $M(x,y)$处的曲率半径,s 为该曲线上某一定点 $M_0(x_0,y_0)$到 $M(x,y)$的弧长,则$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=$__________________.

(5) 已知 $b>a>0, f'(a)=a$,则 $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln^2 b-\ln^2 a}=$__________________.

(6) 若$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x^4)]=\dfrac{1}{x}$,则 $f(x)=$__________________.

(7) 曲线 $y=3x+\dfrac{\ln x}{2x}+1$ 的斜渐近线为__________________.

(8) 曲线$\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$在 $t=2$ 处的曲率为__________________.

(9) 已知曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为$(\eta_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n^n=$__________________.

2. 选择题

(1) 设函数 $f(x)$对任何 x 均满足$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^x$,又 $f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$,则 $f(x)$在 x_0 处(　).

A. 必取极大值　　　　B. 必取极小值

C. 可能取极大值,也可能取极小值　　　　D. 不取极值

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导,则 $\lambda\in$(　).

A. $(0,1)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1]$

(3) 设 $f(x)=\sqrt[3]{x^4}\sin|x-2|$,则有(　).

A. 函数 $f(x)$在 $x=0$ 与 $x=2$ 处均可导

B. 函数 $f(x)$在 $x=0$ 与 $x=2$ 处均不可导

C. 函数 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,在 $x=2$ 处可导

D. 函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,在 $x=2$ 处不可导

(4) 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,则使不等式$\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$成立的条件是(　).

A. $0<a<b$　　B. $\mathrm{e}<a<b$　　C. $0<b<a$　　D. $\mathrm{e}<b<a$

(5) 设函数 $f(x)$对任何 x 均满足 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=2f(x)$. 已知 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$,则 $f'(1)=$(　).

A. 0　　　　　B. 1　　　　　C. 2　　　　　D. 无法确定

(6) 设函数 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)[1-|\ln(1+x)|]$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　)条件.

A. 充分但不必要　　B. 必要但不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

(7) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，则(　).

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)<0, f''(x_0)<0$，若 $\Delta x>0$，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，则有(　).

A. $\Delta y>\mathrm{d}y>0$　　B. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　C. $\mathrm{d}y>\Delta y>0$　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ $(a>0)$ 内有定义. 当 $x\in(-a,a)$ 时，$|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的(　).

A. 间断点　　　　　　　　B. 连续但不可导点

C. 可导点，且 $f'(0)=0$　　　D. 可导点，但 $f'(0)\neq0$

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有正的二阶导数，$A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上任意两点. 证明：对于任意的 $x\in(a,b)$，有 $f(x)<\dfrac{b-x}{b-a}f(a)+\dfrac{x-a}{b-a}f(b)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)>k>0$，若 $f(a)<0$，试证：方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有唯一的实根.

5. 设在 $[0,1]$ 上，$|f'(x)|\leqslant1$，且 $f(0)f(1)<0$，试证：$|f(0)|+|f(1)|\leqslant1$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，又 $f(a)=f(b)=0$，试证：在 (a,b) 内，$f(x)<0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：存在 $\xi>0$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

8. k 为何值时，方程 $x-\ln x+k=0$ 在区间 $0<x<+\infty$ 内：(1)有相异的两实根；(2)有唯一的实根；(3)无实根.

参考答案

1.(1) $-\dfrac{1}{8}$. 提示：注意到当 $x\to1$ 时，$2-2x\to0$，因此，利用导数的定义，我们有：

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\dfrac{f(3-2x)-f(1)}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{f(1+(2-2x))-f(1)}{2-2x}}=-\frac{1}{8}.$$

(2) 常数. 提示:$f(x)$可微,必连续. 由

$$f'(x)=D^*f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$$

$$=f'(x)\cdot\lim_{h\to 0}(f(x+h)+f(x))=2f'(x)f(x),$$

故 $f(x)=$常数.

(3) 101!. 提示:由 Netwon - Leibniz 公式,

$$y^{(101)}(0)=C_{101}^{100}(x^{100})^{(100)}(\arctan x)'\big|_{x=0}=101!.$$

(4) $6x$. 提示:利用曲率半径公式 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$,以及弧微分公式 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$,再由复合函数的求导法则,有

$$\frac{dR}{ds}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{3}{4}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y'\cdot y''\cdot(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}=6x.$$

(5) $\dfrac{a^2}{2\ln a}$. 提示:由导数的定义.

(6) $\dfrac{1}{4}\ln x+C$. 提示:由复合函数的求导法则,有$\dfrac{d}{dx}[f(x^4)]=f'(x^4)\cdot 4x^3=\dfrac{1}{x}$,从而 $f'(x^4)=\dfrac{1}{4x^4}$,即 $f'(x)=\dfrac{1}{4x}$. 故 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln x+C$.

(7) $y=3x+1$. 提示:设所求的斜渐近线为 $y=ax+b$, 则

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{x}\right)=3,\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{2x}+1\right)=1,$$

故 $y=3x+1$.

(8) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$. 提示:由参数方程的求导法则,得

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(t-1)^2},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5},$$

因而所求的曲率为

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=2}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

(9) e^{-1}. 提示:在点(1,1)处的切线斜率为 $k=f'(1)=n$,故切线方程为

$$y-1=n(x-1),$$

现令 $y=0$,得与 x 轴的交点 $\eta_n=1-\dfrac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

2.(1) A. 提示:由关系式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^x$ 及 $f'(x_0)=0$,我们有 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{x_0}}{x_0}$. 不论 $x_0>0$,还是 $x_0<0$,显然 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{x_0}}{x_0}<0$. 故函数在 x_0 处必取极大值.

(2) C. 提示:由定义知 $f(x)$在 $x=0$ 处连续导致 $\lambda>0$,又由 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,必导致 $\lambda\leqslant 1$.

(3) D. 提示:利用导数的定义直接进行验证.

(4) B. 提示:考察函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的单调性即可.

(5) C. 提示: 由导数的定义有

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}=2f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

(6) C. 提示：注意到函数 $F(x)$ 中含有 $|\ln(1+x)|$，因此讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性应从 $F'_+(0)$ 和 $F'_-(0)$ 入手.

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(x)\ln(1+x)}{x}\right]=f'(0)-f(0).$$

同样地，我们有 $F'_-(0)=f'(0)+f(0)$，可见 $f(0)=0$ 是 $F'_+(0)=F'_-(0)$ 的充要条件，即 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

(7) D. 提示：一般地，当涉及一个函数与其导函数的关系时，应考虑使用中值定理建立其关系. 对于任意的 $x>0$，我们有 $f(x)=f(0)+f'(\eta)x, 0<\eta<x$. 据此易推出结果.

(8) B. 提示：一般地，当涉及一个函数的二阶导数及二阶以上导数时，我们应考虑使用 Taylor 中值定理：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o(\Delta x)，即有\ \Delta y-\mathrm{d}y=\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o(\Delta x).$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y-\mathrm{d}y$ 的符号与 $\frac{f''(x_0)}{2!}$ 是一致的，从而 $\Delta y-\mathrm{d}y<0$，又因为 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x<0$，故应选(B).

(9) C. 提示：由 $|f(x)|\leqslant x^2$，易得 $f(0)=0$. 又因为 $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|$，故

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

3. 由 Lagrange 中值定理有

$$f(x)=f(a)+f'(\xi_1)(x-a),\quad (a<\xi_1<x).$$

进而有
$$f(x)(b-x)=f(a)(b-x)+f'(\xi_1)(x-a)(b-x) \tag{Ⅰ}$$

同样地，我们有

$$f(x)=f(b)-f'(\xi_2)(b-x),\quad (x<\xi_2<b),$$

于是有

$$f(x)(x-a)=f(b)(x-a)-f'(\xi_2)(b-x)(x-a) \tag{Ⅱ}$$

由式(Ⅰ)+(Ⅱ)，再用一次 Lagrange 中值定理即得所需结论.

4. 存在性. 取 $x>a$，在 $[a,x]$ 上由 Lagrange 中值定理有

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)>f(a)+k(x-a).$$

欲使 $f(x)>0$，只要 $x>a-\frac{f(a)}{k}$ 即可. 由介值定理知，方程 $f(x)=0$ 必有根.

唯一性. 假定方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有两个不同的根 ξ_1,ξ_2，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. 不失一般性，设 $\xi_1<\xi_2$，由 Rolle 定理，必存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'(\xi)=0$，这显然与 $f'(x)>k>0$ 是矛盾的.

5. 由题设 $f(0)f(1)<0$ 及介值定理，必存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$. 于是由中值定理，有

$$\begin{aligned}|f(0)|+|f(1)|&=|f(\xi)-f(0)|+|f(1)-f(\xi)|=|f'(\xi_1)(\xi-0)|+|f'(\xi_2)(1-\xi)|\\&\leqslant\xi+(1-\xi)=1\ (0<\xi_1<\xi<\xi_2<1).\end{aligned}$$

6. 因 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单增，又 $f(a)=f(b)=0$，从而由 Rolle 定理，必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$. 当 $a<x<\xi$ 时，$f'(x)<f'(\xi)=0$，则 $f(x)$ 单减，此时 $f(x)<f(a)=0$；当 $\xi<x<b$ 时，$f'(x)>f'(\xi)=0$，则 $f(x)$ 单增，此时 $f(x)<f(b)=0$.

利用 $f(x)$ 在 ξ 处的连续性，有 $f(\xi)\leqslant0$. 现假定 $f(\xi)=0$，则必存在 $\eta\in(a,\xi)$，使得 $f'(\eta)=0$，这显然是个矛盾. 故有 $f(\xi)<0$.

综上所述，在 (a,b) 内，$f(x)<0$.

7. 令 $F(x)=\frac{x}{1+x^2}-f(x)$，由题设 $f(0)=0$，则必有 $F(0)=0$. 又由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 必导致 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$. 于是对于充分大的实数 X，$F(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续，必在 $(0,X)$ 内取到最大值，不妨令最大