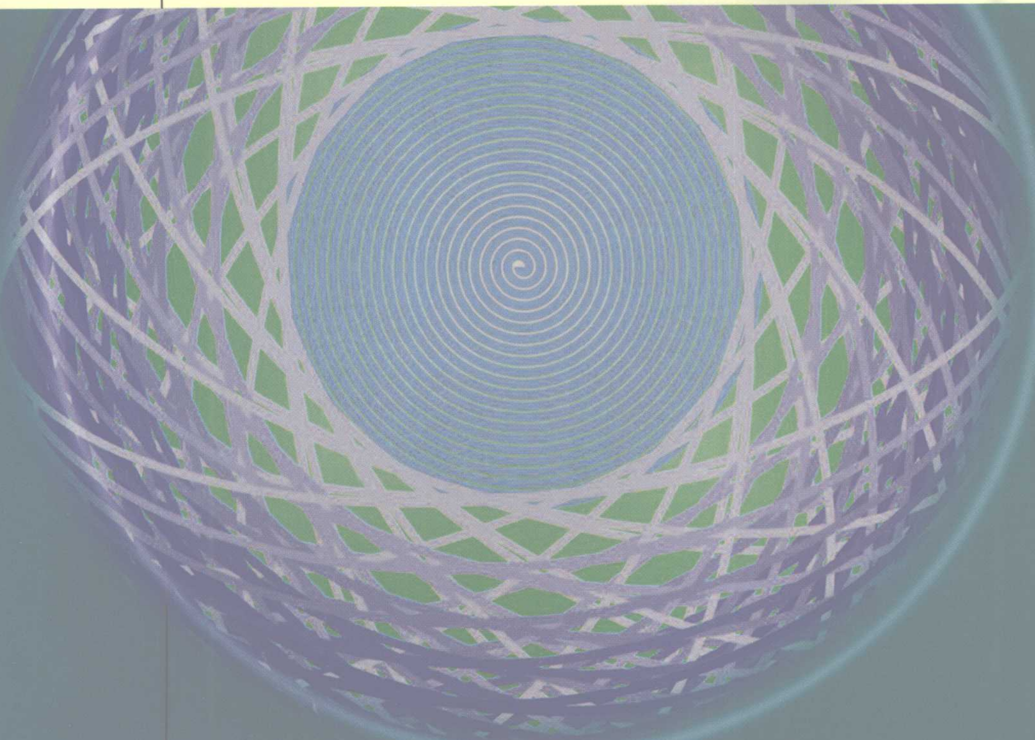
高等学校理工科数学类规划教材

近代组合学

MODERN COMBINATORICS

王天明 编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

近代组合学

MODERN COMBINATORICS

王天明 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

近代组合学/王天明编著. —大连:大连理工大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5611-4265-3

Ⅰ.近… Ⅱ.王… Ⅲ.组合数学—研究生—教材 Ⅳ.O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099366 号

大连理工大学出版社出版

大连市软件园路 80 号 邮政编码 116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm 印张:23.25 字数:391 千字

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 李 鸽 责任校对:婕 琳

封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4265-3 定价:40.00 元

序 言

记得全国第一次组合数学学术讨论会是于1983年在大连举行的,那时已迎来了“科学的春天”。当年的情景真可以引用欧洲一位几何学家的名言说“正好像春天的紫罗兰处处开放那样”。自此以后,中国组合数学的教学与科研就生气勃勃地在东南西北各地区几乎同时开展起来。时至今日,中国已有许多个教研中心了,培养出来的组合学硕士、博士总人数,猜想很可能已经超过美国和俄国了。(对此感兴趣的数学史研究者,或可作番调查研究。)

作为组合学教学科研中心之一的大连理工大学,从上世纪80年代以来,就一直为教材建设作努力。特别,在王天明教授积极主持下,有研究生们的集体合作,曾于1991年首次由大连理工大学出版社编译出版了L. Comtet名著《高等组合学》。此书概述了上世纪70年代前的许多经典成果,内容丰富多彩,例习题引人入胜,故颇为国内从事“离散数学”教学与研究的人们所欢迎。据我所知,有些年青人正是从此书获取必要的知识和有用的工具后,就能较顺利地阅读国内外组合学方面的文献资料,并能逐步走上科研创作之路。

但Comtet的原著也确实存在不足之处。一是命题论证往往过分简短,缺乏画龙点睛之笔,致使初学者难以既见树又见林;二是未能反映和适应计算机时代算法设计爱好者的兴趣和要求。又由于原书出版年代较早,自然不可能讲述近30多年来出现的一系列重要而有用的新题材。所以王天明教授在弟子们的精诚协作下,重新编写这本以“近代组合学”命名的新教材是完全必要的。

这本新教材重新梳理了Comtet原著中的大量宝贵题材,保留了原书中富有特

色的一系列“补充和练习”，并加进了原书所没有的新章节。特别，在第 4 章与第 9 章等章节中，还包含有编著者与弟子们的一些研究心得与新成果。

很明显，新教材比之 Comtet 原书内容，已有不少改进、刷新和补充。陈述方式的简明性与条理性也有所加强，这就对初学者增多了可读性。我认为此书更适合于研究生教学之用，故乐于推荐出版。还有一点期望是，如此书将来获得再版机会时，除了要参照教学实践经验作必要的修订之外，最好要在每章之末附加一些主要参考文献与成果的历史性注释。这将对年青的研究工作者起到指路明灯的作用。

徐利治

2008 年 8 月写于大连

前　言

从 1985 年开始,大连理工大学组合数学研究生就采用 L. Comtet 的《高等组合学》作为教材,至今已经二十多年了。使用它为学生们授课,对其内容逐渐地加深理解,也逐渐发现了它的优点与不足之处。它的优点是内容丰富,尤其是补充与练习部分,包含了许多当代组合学家的工作,这对研究生的学习和研究能力的培养都是非常有益的。因此,在组合文献中这本书被广泛地引用。不足之处是没有对内容进行系统整理,重内容,轻方法,不便教学。尽管如此我们的硕士生和博士生都从中受益颇多。

1988 年,在徐利治教授的关心和鼓励下,由当时的硕士研究生将该书译成中文,1991 年由大连理工大学出版社出版。该书出版至今也近二十年了,在这期间,不断有人给大连理工大学出版社来信,索购该书。但是该书早已卖完,不能满足读者需求。

2007 年暑假,大连理工大学出版社科技教育出版中心负责人向我提议改写《高等组合学》。《高等组合学》英文版原著于 1974 年出版,到现在已经三十多年了。这段时间正是组合学突飞猛进的时期,新成果、新方法层出不穷,在不断与其他学科结合的过程中产生了许多新分支。因此,《高等组合学》应该适当补充新内容以符合当前的需求。要全面介绍新进展,不是我能胜任的。所以,我们还是以《高等组合学》的内容为基础,适当增加些新内容,对原书内容重新组织,但保留原书的特点。在出版社组织讨论该书内容时,徐利治教授将本书定名为《近代组合学》。原因是有关组合数学的著作基本上是用书名界定其内容,书名较易重复,到目前为止还没有用时间确定书名的,而本书的主要内容是近现代成果,所以使用“近代组合学”是合适的。

我们对《高等组合学》进行了重组,去掉了 Stirling 数一章,增加了发生函数,组合反演和机械化方法三章。将 Stirling 数的相关内容加到发生函数一章中。其余

各章虽然保留了原有的名字，但是内容都有不同程度的变化，增加了一些新内容和我们的一些研究成果。补充与练习部分是原书的特色，认真钻研，系统地做某一专题的练习，对增加知识和提高研究能力很有好处。由于量大面广，不能要求一个人做完所有练习，可是做比不做好，多做比少做好。本着这种想法，我们保留了原书的绝大多数的练习，也增加了一部分新内容。

本书是我们师生共同劳动的成果。王伟平博士、方苓博士参加了本书的编写，每人承担了两章编写任务。王伟平博士除了完成编写任务外，还承担了全书电子版的编辑和排版工作，并用 Latex 绘制了全部插图。还应提到的是闫庆伦博士以及博士生王文文、刘迎照和代琦，他们协助完成了本书部分章节的录入。此外，东北大学的张祥德和孙平教授为本书的编写也提供了帮助。在此对他们的劳动表示感谢。

感谢大连理工大学出版社科技教育出版中心对本书出版的大力支持。

由于作者学术水平有限，不免会出现一些错误和不当之处，敬请各位读者批评指正。

王天明

于大连理工大学创新园大厦

2008 年 6 月 13 日

目 录

1 组合数学基本术语

本章介绍常用的术语、符号以及本书涉及到的基本概念。有些概念在其他各类书籍中介绍过，为便于以后使用，我们给予简洁的回顾。

1.1 集合及其运算

在这里只介绍集合论中的基本原理和记号。设 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示含零的非负整数集合、非零整数集合、实数集合和复数集合；记 $[k]=\{1,2,\cdots,k\}$ 为前 k 个不小于 1 的整数集合。我们有时要用到下列逻辑符号： $\exists$ (至少存在一个)， $\forall$ (对所有的)， $\Rightarrow$ (蕴涵)， $\Leftarrow$ (如果)， $\Leftrightarrow$ (当且仅当)。当一个集合 Ω 和它的一个元素 ω 给定时，“ $\omega\in\Omega$ ”表示“ ω 是 Ω 的元素”或“ ω 属于 Ω ”或“ ω 在 Ω 中”。设 P 为 Ω 中具有某种性质 $\mathscr{P}$ 的元素 ω 组成的子集，则它可以表示为

$$P=\{\omega \mid \omega\in\Omega,\ \mathscr{P}\}, \tag{1.1}$$

即“ P 等于 Ω 中满足 $\mathscr{P}$ 的元素 ω 的集合”。当 P 的元素 $a,b,c,\cdots,l$ 已知时，也可以写为

$$P=\{a,b,c,\cdots,l\}.$$

如果 N 是有限集合，则 $|N|$ 表示它的元素个数，即 $|N|=\mathrm{Card}N=N$ 的基，N 的元素个数也可以用 $\bar{\bar{N}}$ 表示。 $\mathfrak{P}(N)$ 是 N 的幂集，即包含空集的 N 的全体子集的集合， $\mathfrak{P}'(N)$ 表示 N 的所有非空子集 (或块) 的集合。当 A 是 N 的一个子集时，用 $A\subset N$ 或 $A\in\mathfrak{P}(N)$ 表示。对于 N 的子集 A 和 B，即 $A,B\subset N$， A 和 B 的交与并为

$$A\cap B:=\{x \mid x\in A,\ x\in B\},$$
$$A\cup B:=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

这个“或”不是排它的。为简洁起见，有时用 AB 代替 $A\cap B$ 。对于子集族 $\mathscr{F}:=(A_i)_{i\in I}$ ，有

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \mid \forall\, i\in I,\ x\in A_i\},\quad \bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists\, i\in I,\ x\in A_i\}.$$

N 的子集 A 和 B 的差集定义为

$$A\setminus B := \{x \mid x\in A,\ x\notin B\}. \tag{1.2}$$

若 $A\subset N$，则 A 的补集是 N 的子集 $N\setminus A$，也可以表示为 $\bar{A}$ 或 $\complement A$ 或 $\complement_N A$ 。把 $\bar{A}$ 指定给 A 的运算称为补运算，显然

$$A\setminus B = A\cap \bar{B}. \tag{1.3}$$

$\mathfrak{P}(N)$ 通过交、并、补运算构成一个布尔代数。交、并、补运算之间的重要联系是 Demorgan 公式。设 $(A_i)_{i\in I}$ 和 $(B_k)_{k\in K}$ 是 N 的两个族， $A_i\subset N$ ， $B_k\subset N$ ， $i\in I$ ， $k\in K$ ，则

$$\complement\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}\Big(\complement A_i\Big), \tag{1.4}$$

$$\complement\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}\Big(\complement A_i\Big), \tag{1.5}$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{k\in K} B_k\Big) = \bigcup_{(i,k)\in I\times K}\Big(A_i\cap B_k\Big), \tag{1.6}$$

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\cup\Big(\bigcap_{k\in K} B_k\Big) = \bigcap_{(i,k)\in I\times K}\Big(A_i\cup B_k\Big). \tag{1.7}$$

集合 N 的一个系 $\mathscr{S}$ 就是 N 的没有重复的块的非空 (无序的) 集合，即 $\mathscr{S}\in\mathfrak{P}'(\mathfrak{P}'(N))$ ， k - 系就是由 k 个块组成的系。

给定 m 个有限集合 N_i ，其中 $1\leqslant i\leqslant m$ 。它们的 Cartesian 积是 m - 元组 $(y):=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 的集合，此处 $y_i\in N_i$ ， $i=1,2,\cdots,m$ 。乘积集合记为 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_m$ ，在不出现混淆时，也可以简记为 $N_1N_2\cdots N_m$ 。称 y_i 为 (y) 在 N_i 上的投影，记为 $pr_i(y)$ 。当 $N_1=N_2=\cdots=N_m=N$ 时，乘积集合也可以表示为 N^m 。 N^m 的对角线 Δ 就是使得 $y_1=y_2=\cdots=y_m$ 的 m - 元组的集合。

定理 1.1.1 有限个有限集的乘积的元素个数满足

$$\Big|\prod_{i=1}^{m} N_i\Big| = \prod_{i=1}^{m}|N_i| = |N_1||N_2|\cdots|N_m|.$$

证明　事实上，m - 元组 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 的个数等于 N_1 中 y_1 可选择的个数 $|N_1|$ 乘以 N_2 中 y_2 可选择的个数 $|N_2|$，等等，再乘以 N_m 中 y_m 可选择的个数 $|N_m|$ (因为这些选择是相互独立的)。 □

例如，设 n 的素数分解为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，我们想求 n 的因子个数 $d(n)$。选择 n 的任何因子 $p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}$ 与选择 $\delta_i \in A_i$ 的指数序列 $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$ 是一样的，其中对 $i = 1, 2, \cdots, k$，$A_i = \{0, 1, 2, \cdots, \alpha_i\}$，所以

$$d(n) = |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_k| = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

设 $\mathfrak{F}(M, N)$ 或 N^M 为 M 到 N 的映射 f 的集合：对每个 $x \in M$，通过 f 就对应到 x 的象 $y \in N$，记为 $y = f(x)$。通常用 $f: M \mapsto N$ 代替 $f \in \mathfrak{F}(M, N)$。若 M 和 N 有限，$m = |M|$，$n = |N|$，则可以给 M 的元素编号，设 $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$。显然，给定 f 就等价于给出一个 N 的 m 个元素的表，比方说 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$，它们依一定的顺序允许重复地列出。这个表就意味着 y_i 是 x_i 的象，即 $y_i = f(x_i)$，其中 $1 \leqslant i \leqslant m$。换言之，给定 f 就等价于给出一个属于 N^m 的 m - 元组，也称为一个 m - 选择。这样我们就找到了把 $\mathfrak{F}(M, N)$ 记为 N^M 的理由。

定理 1.1.2　M 到 N 的映射个数为

$$|\mathfrak{F}(M, N)| = |N^M| = |N|^{|M|}. \tag{1.8}$$

对每一个子集 $A \subset M$，记

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

这样就定义了一个从 $\mathfrak{P}(M)$ 到 $\mathfrak{P}(N)$ 内的映射，称为 f 在 M 的子集集合上的扩张，也用 f 表示。对所有 $y \in N$，M 的子集

$$f^{-1}(y) := \{x \mid f(x) = y\}$$

称为由 f 得到的 y 的原象或逆象，该子集可以是空的。

定理 1.1.3　M 的子集 (包括空集) 的个数为

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

证明　设 N 是具有两个元素 0 和 1 的集合，我们把子集 $A \subset M$ 等同于由 $x \in A$ 则 $f(x) = 1$，否则 $f(x) = 0$ 所定义的从 M 到 N 的映射 f (我们通常称 f

为特征函数)。这样就建立了集合 $\mathfrak{P}(M)$ 与集合 N^M 之间的一个一一对应。因此 $\mathfrak{P}(M)$ 与 N^M 的元素个数相同，根据 (1.8)，这个数为 $|N^M| = 2^{|M|}$。

为了计算 $u_m = |\mathfrak{P}(M)|$，我们可以指出 M 的不含给定点 x 的子集与含 x 的子集一样多，在两种情况下都是 u_{m-1}。因此 $u_m = u_{m-1} + u_{m-1} = 2u_{m-1}$，结合 $u_0 = 1$，确有 $u_m = 2^m$。 □

给定 $f \in N^M$。如果两个不同元素的象也不同，即 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 称为单射；如果 N 的每个元素都是 M 中某个元素的象，即 $\forall\, y \in N$，$\exists\, x \in M$ 使得 $f(x) = y$，则 f 称为满射。如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射。在最后一种情况下，f 的逆记为 f^{-1}，定义为 $y = f^{-1}(x)$ 当且仅当 $x = f(y)$，其中 $x \in N$，$y \in M$。

要数一个有限集合 E，换言之，确定其大小，原则上就是建立 E 到另一个元素个数已知的集合 F 上的双射，从而 $|E| = |F|$。

例如，设 E 为 N 的所有具有偶数个元素的子集的集合，设 F 为其余子集 (具有奇数个元素) 的集合。我们可以选择 $x \in N$ 建立如下的 E 到 F 的双射 f：根据 $x \notin A$ 或 $x \in A$，$f(A) = A \cup \{x\}$ 或 $A \setminus \{x\}$。因此，$|E| = |F| = \frac{1}{2}|\mathfrak{P}(N)| = 2^{n-1}$。

定义 1.1.1 $m\ (\geqslant 2)$ 个子集 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ 间的 m - 元关系 $\mathfrak{R}$ 是乘积集合 $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_m$ 的子集 (有可能是空集)。称 m - 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 满足 $\mathfrak{R}$ 当且仅当 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathfrak{R}$。如果 $N_1 = N_2 = \cdots = N_m = N$，则称 $\mathfrak{R}$ 是 N 上的一个 m - 元关系，即 $\mathfrak{R} \subset N^m$。

我们感兴趣的是 N 上的二元 $(m = 2)$ 关系 $\mathfrak{R} \subset N^2$。在这种情况下，如果 $(u, v) \in \mathfrak{R}$ (或 $(u, v) \notin \mathfrak{R}$)，则记 $u\mathfrak{R}v$ (或非 $u\mathfrak{R}v$)。当 N 为有限集时，将 N 的元素编号，$N := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，画出由 n 条垂线 V_i 及 n 条水平线 H_j 组成的方格，其中每条垂线对应一个 $x_i \in N$，$i \in [n]$，每条水平线对应一个 $x_j \in N$，$j \in [n]$。由此可以得到 $\mathfrak{R}$ 的一个直观表示 (如图 1.1 所示)。V_i 和 H_j 的交点表示 N^2 的点，而 $\mathfrak{R}$ 中的点由 $\bullet$ 表示。例如，在图 1.1 中，$x_2\mathfrak{R}x_5$，非 $x_6\mathfrak{R}x_7$。点 (x_i, x_i)，$i \in [n]$ 是对角线 Δ 上的点。给定集合 N_1 和 N_2，若把 N_1 想象为“横坐标”，把 N_2 想象为“纵坐标”，则这种格也可以表示 N_1 和 N_2 间的任何关系。

设 $|N_1| = n_1$，$|N_2| = n_2$，关系 $\mathfrak{R} \subset N_1 \times N_2$ 还有一种矩阵表示。该表示就是将关系 $\mathfrak{R}$ 与一个 $n_1 \times n_2$ 的 0,1 矩阵对应。设矩阵的一般元素为 $a_{i,j}$，如果 $(x_i, x_j) \in \mathfrak{R}$，定义 $a_{i,j} = 1$，否则定义 $a_{i,j} = 0$。这个 0,1 矩阵称为 $\mathfrak{R}$ 的关联矩阵。

定义 1.1.2 设 $\mathfrak{R}$ 是 N 上的一个二元关系，$\mathfrak{R} \subset N^2$。

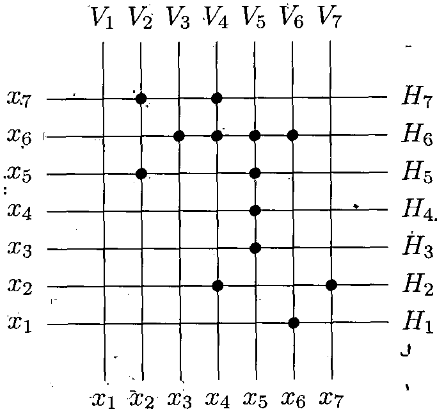


图 1.1

(1) $\mathfrak{R}$ 的逆关系记为 $\mathfrak{R}^{-1}$ ，由 $x\mathfrak{R}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$ 定义。 $\mathfrak{R}^{-1}$ 的格像由 $\mathfrak{R}$ 的格像经过对角线 Δ 反射得到。

(2) $\mathfrak{R}$ 称为完全的，当且仅当对所有的 $(x,y) \in N^2$ ，$x\mathfrak{R}y$ 或 $y\mathfrak{R}x$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{R}\cup\mathfrak{R}^{-1} = N^2$) 。一个关系不是完全的，则称为部分的或偏的。

(3) $\mathfrak{R}$ 称为自反的，当且仅当对所有的 $x \in N$ ， $x\mathfrak{R}x$ ($\Leftrightarrow \Delta \subset \mathfrak{R}$) 。 $\mathfrak{R}$ 称为反自反的当且仅当对所有的 $x \in N$ ，非 $x\mathfrak{R}x$ ($\Leftrightarrow \Delta \cap \mathfrak{R} = \emptyset$) 。

(4) $\mathfrak{R}$ 称为对称的，当且仅当 $x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{-1}$) 。 $\mathfrak{R}$ 称为反对称的或正常的，当且仅当 $(x\mathfrak{R}y, y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subset \Delta$) 。

(5) $\mathfrak{R}$ 称为传递的，当且仅当 $(x\mathfrak{R}y, y\mathfrak{R}z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z$ 。

(6) 对 $x \in N$ ，沿 x 的 $\mathfrak{R}$ 的第一截线 (或垂直截线) 是由满足 $x\mathfrak{R}y$ 的 $y \in N$ 组成的 N 的子集 $\langle x|\mathfrak{R}\rangle$ 。类似地，对于 $y \in N$ ，沿 y 的 $\mathfrak{R}$ 的第二截线 (或水平截线) $\langle \mathfrak{R}|y\rangle$ 是满足 $x\mathfrak{R}y$ 的 $x \in N$ 的集合。如果 $\mathfrak{R}$ 是对称的，则 $\langle x|\mathfrak{R}\rangle = \langle \mathfrak{R}|x\rangle$ 。

(7) $\mathfrak{R}$ 在 N 上的第一投影，记为 $pr_1\mathfrak{R}$ ，等于 $\{x \mid x \in N, \exists\, y \in N, x\mathfrak{R}y\}$ 。类似地，第二投影为 $pr_2\mathfrak{R} := \{y \mid y \in N, \exists\, x \in N, x\mathfrak{R}y\}$ 。

最后，我们回顾两个重要的二元关系。

定义 1.1.3　N 上的等价关系 $\mathfrak{R}$ 是自反的、对称的和传递的二元关系。

这样，我们说 x 和 y 是等价的，当且仅当 $x\mathfrak{R}y$ 。截线 $\langle x|\mathfrak{R}\rangle = \langle \mathfrak{R}|x\rangle$ 称为 x 的等价类，这是一个等价于 x 的 y 的集合。设 $|N| = n$ ， N 上的等价关系数 $b(n)$ ，或者说 N 的划分数，将在以后进行研究 (见 19 页和 77 页) 。

定义 1.1.4　N 上的序关系 $\mathfrak{R}$ 是自反的、反对称的和传递的二元关系。

对于序关系 $\mathfrak{R}$ ， $x\mathfrak{R}y$ 通常写作 $x\leqslant y$ 。称一个集合是有序的，如果给它提供了序关系；进而如果对所有 $x,y\in N$ 均有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$ ，则称这个集合为全序的，否则称为部分序的或偏序的．截线 $\langle x|\mathfrak{R}\rangle=\{v\mid x\leqslant v\}$ 称为 x 的上界集合，而截线 $\langle\mathfrak{R}|y\rangle=\{u\mid u\leqslant y\}$ 称为 y 的下界集合。对于 $x,y\in N$ ，线段 $[x,y]$ 是满足 $x\leqslant z\leqslant y$ 的 $z\in N$ 的集合。 $x<y$ 是指 $x\leqslant y$ 并且 $x\neq y$ 。一个连接 $x,y\in N$ 的有 k 个点 (长为 $k-1$) 的链是满足 $x=z_1<z_2<\cdots<z_k=y$ 的有限集合 $z_1,z_2,\cdots z_k$ 。

格是有序集 N ，使得对 N 的每对元素 (x,y) ： (1) 存在某个元素 $b\in N$ ，通常记为 $x\vee y$ ，是两个元素 x 和 y 的上界集的最小元素 (也称为最小上界)，即 $x\leqslant b,y\leqslant b$ 并且 $x\leqslant v,y\leqslant v\Rightarrow b\leqslant v$ 。 (2) 存在某个元素 $a\in N$ ，通常记为 $x\wedge y$ ，是两个元素 x 和 y 的下界集的最大元素 (也称为最大下界)，即 $a\leqslant x,a\leqslant y$ 并且 $u\leqslant x,u\leqslant y\Rightarrow u\leqslant a$ 。

1.2 排列与组合

定义 1.2.1 令 $1\leqslant k\leqslant n=|N|$ ，集合 N 的一个 k - 排列 α 就是一个从 $[k]$ 到 N 的单射 α (形式上称为“变差”)。用 $\mathfrak{U}_k(N)$ 表示 N 的 k - 排列的集合。

因此，给定这样一个 α 等价于：首先给出一个 N 的 k 个元素的子集

$$B=\alpha([k])=\{\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(k)\};$$

然后对 B 的元素给出从 1 到 k 的编号。这等价于给出一个 N 的 k 个元素的全部排序的子集，这一子集通常也称为 N 的一个 k - 排列。

下面介绍一些经常使用的记号：

$$n!:=\prod_{i=1}^{n}i=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n,\quad \text{如果 } n\geqslant1;\quad 0!:=1. \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}(n)_k:=\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)&=\frac{n!}{(n-k)!}\\&=n(n-1)\cdots(n-k+1),\quad \text{如果 } k\geqslant1;\quad (n)_0:=1.\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\langle n\rangle_k:=\prod_{i=1}^{k}(n+i-1)&=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\\&=n(n+1)\cdots(n+k-1),\quad \text{如果 } k\geqslant1;\quad \langle n\rangle_0:=1.\end{aligned} \tag{1.11}$$

$n!$ 称为 n 的阶乘，$(n)_k$ 称为 n 的 k 次降阶乘，$\langle n\rangle_k$ 称为 n 的 k 次升阶乘或 Pochhammer 符号。根据定义可以得到 $(n)_n=\langle 1\rangle_n=n!$，$\langle n\rangle_k=(n+k-1)_k$，$(n)_k=\langle n-k+1\rangle_k$，等等。在此引用的 $\langle n\rangle_k$ 并非标准，在有关超几何级数的文献中，常写作 $(n)_k$。上述记号可以用 Γ 函数表示：

$$n!=\Gamma(n+1),\quad (n)_k=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)},\quad \langle n\rangle_k=\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}. \tag{1.12}$$

此外，对于复数 z 和非负整数 k，$(z)_k$ 和 $\langle z\rangle_k$ 仍有意义：

$$(z)_k:=z(z-1)\cdots(z-k+1),\quad (z)_0:=1, \tag{1.13}$$

$$\langle z\rangle_k:=z(z+1)\cdots(z+k-1),\quad \langle z\rangle_0:=1, \tag{1.14}$$

所以可以把它们看成关于未定元 z 的 k 次多项式。

定理 1.2.1　设 $1\leqslant k\leqslant n=|N|$，$N$ 的 k - 排列个数等于

$$|\mathfrak{U}_k(N)|=(n)_k=n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{1.15}$$

证明　显然，$1\in[k]$ 的象 $\alpha(1)$ 有 n 种可能的选择；$\alpha(1)$ 选定之后，因为 α 是单射，$\alpha(2)\neq\alpha(1)$，所以 $\alpha(2)$ 只有余下的 $n-1$ 种可能的选择；类似地，因为 $\alpha(3)\neq\alpha(2)$ 并且 $\alpha(3)\neq\alpha(1)$，所以 $\alpha(3)$ 只有 $n-2$ 种可能的选择，等等；最后，对于 $\alpha(k)$，恰有余下的 $n-k+1$ 种可能的选择。因此，α 的个数等于所有这些选择数的乘积，即等于 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$。如果 $k>n$，则 $(n)_k=0$，从而 (1.15) 仍有效。 □

定义 1.2.2　集合 N 的置换是 N 到自身的双射，我们用 $\mathfrak{S}(N)$ 表示 N 的置换的集合。

定理 1.2.2　设 $|N|=n\geqslant 1$，集合 N 的置换的个数等于 $n!$。

证明　与定理 1.2.1 的证明类似。也可以注意到在 $\mathfrak{S}(N)$ 与 $\mathfrak{U}_n(N)$ 之间存在一个双射。 □

定义 1.2.3　有限集合 N 的一个 k - 组合或 k - 块 B 就是一个 N 的 k 个元素的非空子集，即 $B\subset N$ 并且 $1\leqslant k=|B|\leqslant n=|N|$。如果事先不知道是否有 $k\geqslant 1$，就只称 N 的 k - 子集，其中 $k\geqslant 0$。用 $\mathfrak{P}_k(N)$ 表示 N 的 k - 子集的集合。

设 $|N|=n$，下面给出规定 N 的 k - 子集的其他三种方式。