ZhXShX

中学数学丛书

伍家德

坐标系与坐标变换

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

坐标系与坐标变换

伍家德

湖北教育出版社

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版.

坐标系与坐标变换

伍家德

*

湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行

红安县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　10印张　1插页　232,000字

1985年8月第1版　1985年8月第1次印刷

印数：1－5,000

统一书号：7306·135　定价：1.50元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概

念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

前　言

本书内容主要包括常用的坐标系和它的规定方法，以及坐标变换和它们的基本应用。为便于研究问题，还介绍了向量和矩阵的基本知识。读者对象是中学学生和自学青年，也可供中学数学教师参考。

在编写时，注意从讲清基本概念出发，适当举例，以利自学。取材力求深浅适度，以中学数学为基准，作必要的归纳和概括，并稍加提高和拓广。为了帮助读者掌握内容、加强理解、熟练应用，各节都配有适量的习题。书末附有提示和解答，可供读者校核。

初稿承武汉大学张远达教授等同志仔细审阅并提供宝贵意见。华中师范学院柏盛桄副教授审阅了编写提纲和初稿，并提供了指导性意见。对于老师们的热情支持和帮助，谨在此表示谢意，由于编者水平有限，缺点和错误难免，恳请读者指正。

编　者

1983年7月

目　录

第一章　向　量……………………………………………1

§1. 向量的概念……………………………………………1

习题 1.1 ……………………………………………9

§2. 向量的线性运算……………………………………………11

习题 1.2 ……………………………………………45

§3. 平行投影·向量的乘法……………………………………………47

习题 1.3 ……………………………………………75

小结……………………………………………78

第二章　坐标系……………………………………………81

§1. 笛卡儿坐标系……………………………………………81

习题 2.1 ……………………………………………95

§2. 笛卡儿坐标系的推广……………………………………………98

习题 2.2 ……………………………………………112

§3. 关于笛卡儿坐标的基本课题……………………………………………114

习题 2.3 ……………………………………………160

§4. 其他坐标系……………………………………………163

习题 2.4 ……………………………………………211

小结……………………………………………213

第三章　坐标变换……………………………………………217

§1. 矩阵……………………………………………217

习题 3.1 ……………………………………………230

§2. 直角坐标变换……………………………………………231

习题 3.2 ……………………………………………268

§3. 仿射坐标变换……………………………………………269

习题 3.3 ……………………………………………304

小结……………………………………………306

习题解答或提示……………………………………………307

第一章 向 量

本章主要介绍有关向量的最基本的概念、性质和运算法则．向量是以后两章的工具．向量的观念不仅在数学的各个分支中地位重要，而且在物理、工程、经济和其他学科中也经常用到．因此，学习向量是很有用处的．

§1．向量的概念

一、有向线段

在初等几何里，一般不考虑直线和线段的方向．但是，在有的学科里，例如解析几何学，我们就需要考虑直线和线段的方向．规定直线和线段的方向有着广泛的实际意义，比方说，质点沿直线位移时，就有相对的两种可能的方向．

一条直线具有两个相反的方向．如果选定其中的一个方向作为正向，那么相反的那个方向就是负向．规定了方向的直线叫做有向直线，也叫做轴．

在图形上，往往用箭头表示轴的正向，与箭头相反的方向就是负向．如图 1.1，箭头表示自左到右是轴 l 的正向．

图 1.1

图 1.2

一条线段也有两个相反的方向．如图 1.2 中的线段，如果以 A 为起点，B 为终点，那么从 A 到 B 是一个方向；如果以 B 为起点，A 为终点，那么从 B 到 A 的方向就与从 A 到 B 的方向相反．象这样规定了起点和终点的线段，叫做有向线段．我们规定，有向线段的方向就是从起点到终点的方向．表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面．象上面所说的有向线段，如果 A 是起点，B 是终点，就写成 AB；如果 B 是起点，A 是终点，就写成 BA．因此，用 AB 和 BA 表示的有向线段，虽然长度相等，但它们的方向却相反．

现在考察在轴上的有向线段．要决定一条有向线段的方向是正是负，就要看这条有向线段的方向和它所在的轴的正向是不是一致．如果有向线段的方向和轴的正向相同，就说它的方向是正的；如果有向线段的方向和轴的正向相反，就说它的方向是负的．如图 1.3，有向线段 AB 的方向与轴 l 的正向一致，所以是正的；而 BA 的方向与轴 l 的正向相反，所以是负的．

图 1.3

选定一条线段作为长度单位，我们就可以量得一条有向线段的长度．轴上有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量或值．如图 1.3 中，a 是单位线段，轴上每个小格表示一个单位长，于是有向线段 AB 的数量是 $+5$，BA 的数量是 -5．为了简便，我们仍用 AB 和 BA 分别表示有向线段 AB 和 BA 的数量，即

$$AB=5,\quad BA=-5.$$

显然，对于同一轴上的两条有向线段 AB 和 BA，它们的数量之间有这样的关系：

$$AB=-BA \text{ 或 } AB+BA=0.$$

当然，如果 B 点与 A 点重合，有向线段 AB 或 BA 的数量就等于零：$AB=BA=0$.

如果只考虑有向线段的长度，而不考虑它们的方向，我们就把有向线段的数量加上绝对值的记号，叫做有向线段的绝对值．如图 1.3，有向线段 AB 和 BA 的绝对值都等于5：

$$|AB|=|BA|=5.$$

为了研究同一轴上有向线段之间的关系，我们引进轴上有向线段的和的概念．从位移合成的观点来看，质点由 A 沿直线位移到 B，再位移到 C，这两次位移的合成是位移 AC．因此，对于同轴上的两条有向线段 AB 和 BC，我们自然要规定 AC 为它们的和：

$$AC=AB+BC.$$

这意思是说，如果把第二个线段的起点叠合于第一个线段的终点，那么以第一个线段的起点为起点，以第二个线段的终点为终点的有向线段，就是两已知有向线段的和．

上面规定的等式也可以理解为轴上有向线段的数量间的关系式．下面的命题将说明这一点．

定理 设 A、B、C 是同一轴上的三个点，那么不论它们的位置怎样排列，有向线段 AB、BC 和 AC 的数量总满足下列关系式：

$$AB+BC=AC. \tag{1}$$

证明 当 AB 和 BC 至少有一个是零线段时，等式（1）显然成立．现在假定 AB 和 BC 都不是零线段；可分两种情况考虑．

(1) AB 与 BC 的方向相同．

图 1.4

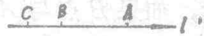


图 1.5

这时，线段 AC 的长度等于线段 AB 和 BC 的长度的和：

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

由于 AB、BC 和 AC 的方向同是正的或负的，故由上式得

$$AC = AB + BC \text{ 或 } -AC = (-AB) + (-BC)$$

总之，有 $$AC = AB + BC.$$

(2) AB 与 BC 的方向相反.

如果 $|AB| > |BC|$，那么

$$|AC| = |AB| - |BC|,$$

并且 AC 与 AB 同号. 因此，根据绝对值概念，

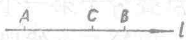


图 1.6

图 1.7

当 $AB > 0$，$BC < 0$ 时(图 1.6)，有

$$AC = AB - (-BC) = AB + BC;$$

当 $AB < 0$，$BC > 0$ 时(图 1.7)，有

$$-AC = (-AB) - BC \text{ 也有 } AC = AB + BC.$$

如果 $|AB| < |BC|$，那么

$$|AC| = |BC| - |AB|,$$

并且 AC 与 BC 同号. 因此，

图 1.8

图 1.9

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.co

当 $AB>0$，$BC<0$ 时(图 1.8)，有

$$-AC=(-BC)-AB \text{ 就是 } AC=AB+BC;$$

当 $AB<0$，$BC>0$ 时(图 1.9)，有

$$AC=BC-(-AB) \text{ 也是 } AC=AB+BC.$$

如果 $|AB|=|BC|$，那么由于 AB 与 BC 反向，所以 C 点与 A 点重合，即 AC 为零线段. 这时，AB 与 BC 互为反数，所以

$$AC=AB+BC.$$

综合上面的讨论，公式(1)总成立. 这个公式通常叫做沙尔公式.

沙尔公式可以推广到轴上任意 n 个点的情形.

事实上，设点 A_1，A_2，…，A_n 是轴上的任意 n 个点，那么不管它们排列的顺序如何，通过逐次使用公式(1)，总可得

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$$

或

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1=0.$$

例 设 A，B，C，D 是同轴上的任意四点，则

$$\begin{aligned}&AB+BC+CD+DA\\&=(AB+BC)+CD+DA\\&=(AC+CD)+DA\\&=AD+DA=0.\end{aligned}$$

二、向量及其表示方法

我们经常遇到的量可以分为两类：一类是用一个数便可以完全表示出来的，如时间、距离、温度、质量等等，这一类量就是通常说的数量；另一类量，例如力、速度、位移、动量等等，除了要用一个数以外，还要用一个方向才能完全表示出来，这就是我们将要研究的所谓向量.

定义 1 任何只有大小的量叫做数量，也叫做纯量或标量；任何不仅具有大小而且具有方向的量叫做向量或矢量.

向量的两个特征是大小和方向. 有向线段具有大小和方向，因此，有向线段是向量，并且任何向量都可以用有向线段形象地表示出来. 用有向线段表示向量时，起点可以任意选取，有向线段的长度表示向量的大小，而它的方向就表示向量的方向. 如图 1.10，有向线段 AB 表示起点为 A，终点为 B 的向量，并在向量的终点上画一个“箭头”. 用带有箭头的线段来表示向量的这个主意，应归功于著名的英国科学家牛顿 (Sir Isaac Newton，1642—1727).

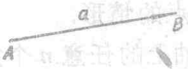


图 1.10

为了清楚地区别向量和数量，我们用带箭头的字母或黑体字母来表示向量，如

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{x},\ \cdots\text{或}\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x},\ \cdots.$$

而用通常的小写字母表示数量. 有时为了要表示出向量的起点和终点，就用形如 $\overrightarrow{AB}$ 的记号来表示从点 A 到点 B 的向量.

下面我们将建立向量与数的联系，以及在进一步研究向量时经常要使用的一些基本概念.

表示向量大小的数叫做向量的模，也叫长度或绝对值. 向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的向量叫做单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量常用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示. $\boldsymbol{a}^0$ 也叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的定向向量.

轴的定向向量便是方向与轴的正向相同，而长度为单位的向量.

模等于零的向量叫做零向量，记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$. 从几何上看，

零向量就是起点与终点重合的向量．所以 $\overrightarrow{AA}$，$\overrightarrow{BB}$ 等也是零向量的记法．零向量没有确定的方向，或者认为它的方向是任意的．

借助于向量的几何模型，我们可以形式地引进两个向量平行和垂直的概念．

如果两个向量可以用两条平行的有向线段来表示，我们就说这两个向量平行；用 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行．由于向量的起点可以任意选取，所以平行向量也叫共线向量．两向量共线有两种可能：或者同向（箭头指向一致，这时记为 $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$）；或者反向（箭头指向相反，这时记为 $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$）．可以认为，零向量与任何向量共线．

如果两个向量可以用两条互相垂直的有向线段来表示，我们就说这两个向量垂直，或者说正交；用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直．零向量也可认为垂直于任何向量．

对于一组向量，如果表示它们的有向线段平行于同一平面，我们就说这组向量是共面的．显然，任何两个向量都是共面的．零向量可认为与任何两个向量共面．

现在引进两向量相等的概念．

定义 2　如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，并且方向也相同，我们就说它们相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

根据定义，两向量相等的特征是同向、等长．因此，等长的向量不见得相等．特别地，两个单位向量不一定相等．两个等长的向量即令平行，也不一定相等，因为它们的方向可能相反．

两个长度相等、方向相反的向量互称为负向量．向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量用 $-\boldsymbol{a}$ 表示．自然，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$．

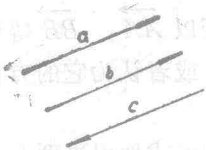


图 1.11

在图 1.11 中，有三个平行向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不仅长度相等，而且方向也相同，所以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$，虽说等长，但方向相反，所以 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$. 这三个向量可以用等式表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}.$$

必须指出，两个向量的比较，不存在"大于"或"小于"的关系. 大小比较仅仅对于向量的模来说才是有意义的.

例 1　如图 1.12，汽车从点 A 出发向东行驶 3 公里到 B，再从 B 继续向北行驶 4 公里到 C. 求汽车行驶的路程和位移.

解　设汽车行驶的路程为 S，则 S 是两段路程的算术和：

$$S=|AB|+|BC|=7\text{公里},$$

这是一个标量. 然而汽车从 A 到 C 的位移却是一个向量 $\overrightarrow{AC}$. 这个位移的大小是从 A 到 C 的一段距离. 由勾股定理可以算出：

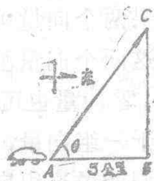


图 1.12

$$|AC|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

此即位移的大小为 5 公里；位移的方向决定于夹角

$$\theta=arc\operatorname{tg}\frac{4}{3}\approx 53^{\circ},$$

就是说，位移的方向为东偏北约 53°.

例 2　已知平行四边形 $ABCD$. （1）以这平行四边形的边可以作出几对相等的向量？（2）由这平行四边形各顶点所组成的有序点对可以确定多少个不同的向量？

解 (1) 四对：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

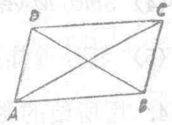


图 1.13

(2) 由各顶点所组成的有序点对，总数是从四个不同的顶点中每次取两个的排列：$A_4^2=\dfrac{4\,!}{(4-2)\,!}=12$. 就是说，各顶点可以确定12个向量. 但由于平行四边形有四组由对边构成的相等向量，所以由各顶点所组成的有序点对实际上只能确定8个不同的向量. 建议读者写出这些向量.

习 题 1.1

1. 在轴上有 A，B，C，D 四点，排列位置如图所示. 试求：

(1) AB，BC，CD，DA 的数量和长度；

第1题图

(2) $AB+BC-CD=$？

(3) $AB+BC+CD+DA=$？

(4) A 分 CD 的比 $CA:AD$，B分 CA的比 $CB:BA$.

2. 设 A，B，C，D 是同一轴上的四个点，求证无论它们的位置如何，总有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

3. 说明下列各量是向量还是数量：

(1) 20℃的温度；

(2) 渠道横断面的过水量；

(3) 使雨点斜向下落的风力；

(4) $5mv/M$（毫伏/米）的电场强度；

(5) 氢弹爆炸所释放的能量.

4. 用所给的数据，按比例画出下列各向量：

(1) 在 30° 斜坡上的一个大小为 20 公斤的拉力，比例为 1cm:20 公斤；

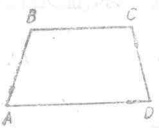
(2) 方向为东偏南 30° 的一个 150 公里/小时的速度 v. 比例取 1cm:100 公里/小时；

(3) 质点作匀速圆周运动时，在点 A 的 $\frac{\pi r}{6}$〔米〕〔秒〕$^{-1}$ 的速度 $\boldsymbol{v}_1$，以及从点 A 起经过 2 秒后到达 B 点的位移 $\boldsymbol{S}$ 和在点 B 的速度 $\boldsymbol{v}_2$.（r 表示圆的半径）.

(4) 物体在坡度为 30° 的光滑斜面上受重力 $\boldsymbol{G}$、支持力 $\boldsymbol{N}$、水平推力 $\boldsymbol{F}$ 三个力作用而处于平衡. 已知各力的大小分别为：

$$|\boldsymbol{G}| = 21\text{千克}，\ |\boldsymbol{N}| = \frac{|\boldsymbol{G}|}{\cos 30^\circ} \approx 24\text{千克}，$$

$$|\boldsymbol{F}| = G\operatorname{tg}30^\circ \approx 12\ \text{千克}.$$



第 5 题图

5. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$. 试以 B 为始点作 $\overrightarrow{DC}$ 的负向量 $\boldsymbol{a}$；以 C 为始点，作与 $\overrightarrow{BA}$ 相等的向量 $\boldsymbol{b}$，以及终点在 AD 上且垂直于 $\overrightarrow{AD}$ 的向量 $\overrightarrow{CE}$.

6. 在正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，哪些向量是：(1) 相等的；(2) 同向的；(3) 等长反向的；(4) 共线的.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com