管理运筹学

GUANLI YUNCHOUXUE

成晓红 田德良 编著

国防工業出版社

National Defense Industry Press http://www.ndip.cn

管理运筹学

成晓红　田德良　编著

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/成晓红,田德良编著. —北京:国防工业出版社,2004.1
ISBN 7-118-03325-1

Ⅰ.管… Ⅱ.①成…②田… Ⅲ.管理学:运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 101383 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京奥隆印刷厂印刷
新华书店经售

开本 787×960 1/16 印张 14½ 297 千字
2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册 定价:20.00 元

前　　言

运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策，提供定量依据。它在自然科学、社会科学以及工程技术生产实践、经济建设和现代化管理等方面有着重要意义。

运筹学作为一门新兴学科，第二次世界大战以后才从军事领域转到经济领域。随着科学技术尤其是计算机技术和社会经济建设的发展进步，运筹学得到了迅速的发展和广泛的应用，每一个细末分枝都发展了系统的理论和专用的技巧及方法，内容非常丰富。本书根据经济管理类专业特别是物流专业本科生知识结构的需要，系统地介绍了线性规划、运输问题、整数规划、图与网络、动态规划、对策论及决策论的基本思想、相关理论和应用方法，突出介绍了运输问题和路线问题。

作为具有一定针对性的教材，本书依据普通经济管理类院校学生的特点，在总结了多年来的教学和多次辅导学生进行数学建模竞赛经验的基础上，减少了许多不必要的数学论证，在介绍运筹学算法时深入浅出，通俗易懂。本书尤其重视运筹学模型与方法如何运用于解决实际问题，结合经济管理类专业的特点附加了一些比较复杂的案例，着重培养学生运用运筹学知识解决实际问题的能力，让学生真正领会运筹学的精神。

全书由田德良、成晓红讨论、确定和编写。在写作过程中参考了许多同行专家的著作，它们对本书的成文起了重要作用。在此对一切给予我们支持和帮助的朋友、同事、有关人员以及参考文献的作者一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，请广大读者批评指正。

编　者

2003 年 10 月

内 容 简 介

运筹学是一门应用性很强的交叉学科，它采用定量化的方法为管理决策提供科学依据，在工业、农业、经济和社会生活等各个领域都得到广泛的应用。本教材分7章，系统介绍了线性规划、运输问题、整数规划、图与网络、动态规划、对策论及决策论的基本思想、相关理论和应用方法，重点介绍了运输问题和路线问题。

本教材针对普通经济管理类院校学生的特点，总结了多年来的教学和多次辅导学生进行数学建模竞赛的经验编写而成，减少了不必要的数学论证，深入浅出，通俗易懂，并且结合经济管理类专业附加了一些比较复杂的案例，着重培养学生运用运筹学知识解决实际问题的能力，让学生真正领会运筹学的精神。

本教材适用于高等院校经济管理类专业的学生，特别是物流专业的学生。

目　　录

第一章 线性规划

线性规划是运筹学中在理论上比较成熟且被日益广泛地应用于实际的一个重要分支。它探讨的问题是在被提出问题的性质所决定的一系列约束条件下，如何把有限的资源进行合理分配，制定出最优的实施方案，以获得最好的收益。

第一节 线性规划问题及其数学模型

在日常经济活动中，经常会遇到这样两类问题：其一，如何合理安排现有的人力物力资源，以便创造出尽可能多的价值；其二，在接受某项任务后，如何进行统筹安排才能使完成这项任务的人力物力资源消耗最少。如物资的运输问题、生产的组织计划问题、配料问题、时间和人员安排问题等，都是这类问题。尽管在实际生活中，这是一些各不相同的问题，但是，将它们抽象成数学语言即数学模型表示时，却具有很多共性。我们可以看下面几个例子。

一、生产计划问题

【例 1.1】 某工厂生产化工产品，该产品有 1＃、2＃、3＃和 4＃ 4 种型号，它们需要 P_1、P_2、P_3 3 种原料，具体数据如表 1.1 所列。

表 1.1

消耗量 产品 原料/kg	1＃	2＃	3＃	4＃	原料拥有量/kg
P_1	0.8	0.8	1.1	1.2	160
P_2	0.6	0.6	0.7	0.8	120
P_3	0.4	0.5	0.7	0.7	100
利润/(千元/kg)	6	8	9	10	

问：如何安排这 4 种产品的产量，才能使工厂获得的利润最大？

解：设 x_i 分别表示 i＃型号产品计划生产的产量（$i=1,2,3,4$）。

分析：生产 4 种产品所消耗的 P_1 原料应不大于该厂对 P_1 原料的拥有量，即

$$0.8x_1+0.8x_2+1.1x_3+1.2x_4\leqslant 160 \qquad (1)$$

生产 4 种产品所消耗的 P_2 原料应不大于该厂对 P_2 原料的拥有量，即

$$0.6x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 + 0.8x_4 \leqslant 120 \qquad (2)$$

生产 4 种产品所消耗的 P_3 原料应不大于该厂对 P_3 原料的拥有量，即

$$0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 \leqslant 100 \qquad (3)$$

4 种产品的产量非负，即 $x_j \geqslant 0 (j = 1,2,3,4)$ (4)

式(1)、式(2)、式(3)、式(4)称为约束条件，其中式(4)为非负约束。

根据题意，该厂追求的目标为获得利润最大，可表示为：

$$\max f = 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 \qquad (5)$$

式(5)称为目标函数，所以线性规划的数学模型由目标函数与约束条件组成，可以写成：

$$\max f = 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 0.8x_1 + 0.8x_2 + 1.1x_3 + 1.2x_4 \leqslant 160 & (1) \\ 0.6x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 + 0.8x_4 \leqslant 120 & (2) \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 \leqslant 100 & (3) \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3,4) & (4) \end{cases}$$

生产计划问题数学模型的一般形式：

设有 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 种资源，可以生产 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 种产品。现有资源数、单位产品所需资源数及每单位产品可得利润如表 1.2 所列，问应如何组织生产才能使利润最大？

表 1.2

单位产品消耗资源 产品 / 资源	Q_1	Q_2	…	Q_n	现有资源
P_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
P_2	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P_m	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_m
单位产品利润	c_1	c_2	…	c_n	

解：设 x_i 分别表示计划生产 Q_i 产品的产量 $(i = 1,2,\cdots,n)$。

求一组变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足：

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i & (i = 1,2,\cdots,m)\\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数 $f = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ 的值最大。

二、运输问题

【例 1.2】 现有两个仓库(发点)运送库存原棉来满足 3 个纺织厂(收点)的需要。3 个纺织厂所需数量和两个仓库现有库存量以及每吨原棉从各个仓库运送到各个纺织厂所需的运费如表 1.3 所列。

表 1.3

运输费(元/t) 纺织厂 / 仓库	1^*	2^*	3^*	库存量/t
1#	2	1	3	50
2#	2	2	4	30
需求量/t	40	15	25	

解：设 x_{ij}表示 i # 仓库运送到 j^* 厂的原棉数量，即

$$s.t.\begin{cases}x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 & (1)\\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 & (2)\\ x_{11} + x_{21} = 40 & (3)\\ x_{12} + x_{22} = 15 & (4)\\ x_{13} + x_{23} = 25 & (5)\\ x_{ij} \geqslant 0;\quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3) & (6)\end{cases}$$

分析：式(1)、式(2)两个约束条件表示 i # $(i=1,2)$仓库运往 1^*、2^*、3^* 纺织厂的原棉总量不大于 i # $(i=1,2)$仓库的库存量；式(3)、式(4)、式(5)3 个约束条件表示 $j^*(j=1,2,3)$纺织厂收到的原棉应等于它的需求量；式(6)表示调运量非负。目标函数表示要求总运费最小，即

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2_{21} + 2x_{22} + 4x_{23}$$

运输问题的一般形式：

设某种物资有 m 个产地 $A_1, A_2,\cdots,A_m$，联合供应 n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。各

产地产量、各销地销量及各产地运到各销地的单位运费如表 1.4 所列。问应如何调运，才能使运费最小？

表 1.4

运费 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m_1}	c_{m_2}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

(1) 产销平衡，即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$。

解：设 x_{ij} 表示产地 A_i 运送到销地 B_j 的物资数量（$i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$）。这个问题的数学模型为：求一组变量 x_{ij}（$i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$）的值，使它满足：

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \geqslant 0 & (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

并使目标函数值 $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$ 的值最小。

(2) 产销不平衡，即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_i$。

解：设 x_{ij} 表示产地 A_i 运送到销地 B_j 的物资数量（$i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$）。这个问题的数学模型为：求一组变量 x_{ij}（$i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$）的值，使它满足：

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i & (j = 1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \geqslant 0 & (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

并使目标函数值 $f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

三、营养问题(配料问题)

【例 1.3】 某种作物在全部生成过程中至少需要氮肥 32kg、磷肥 24kg、钾肥 42kg。已知甲、乙、丙、丁 4 种复合肥每公斤的价格及含氮、磷、钾的数量如表 1.5 所列。问应如何配合使用这些肥料,既能满足作物对氮、磷、钾的需要,又使施肥成本最低?

表 1.5

含量 肥料 成分	甲	乙	丙	丁	氮磷钾肥的需要量/kg
氮	0.03	0.03	0	0.15	32
磷	0.05	0	0.2	0.1	24
钾	0.14	0	0	0.07	42
价格/(元/kg)	0.04	0.15	0.1	0.13	

解:设:x_1、x_2、x_3、x_4 分别表示甲、乙、丙、丁 4 种复合肥的用量。

分析:(1) 表示购买的 4 种复合肥中含氮量不能小于作物对氮的需求量;

(2) 表示购买的 4 种复合肥中含磷量不能小于作物对磷的需求量;

(3) 表示购买的 4 种复合肥中含钾量不能小于作物对钾的需求量;

(4) 表示购买的 4 种复合肥的量非负。

$$\min s = 0.04x_1 + 0.15x_2 + 0.1x_3 + 0.13x_4$$

$$s.t. = \begin{cases} 0.03x_1 + 0.3x_2 + 0.15x_4 \geqslant 32 & (1) \\ 0.05x_1 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \geqslant 24 & (2) \\ 0.14x_1 \quad 0.07x_4 \geqslant 42 & (3) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3,4) & (4) \end{cases}$$

四、时间和人员安排问题

【例 1.4】 某工厂的中心调度室,每昼夜 24h 都要有人员值班,已知每个时间段(每 4h 为一个时间段)所需要的值班人员如表 1.6 所列。又知每一调度人员在

任一时段开始上班后，要连续工作 8h(包括轮流吃饭时间)才能满足调度值班工作需要。为使参加值班的总人数最少，试列出数学模型。

表 1.6

序号	时间段	至少需要值班人数/人	每段开始上班工作人数/人
1	06 - 10	8	x_1
2	10 - 14	12	x_2
3	14 - 18	10	x_3
4	18 - 22	8	x_4
5	22 - 02	6	x_5
6	02 - 06	4	x_6

解：设每一时段开始上班工作人数分别为 $x_i(i=1,2,\cdots,6)$。由以上要求可列出线性规划数学模型如下：

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12 & (\text{第 1,2 时段交接时至少有 12 个人员}) \\ x_2 + x_3 \geqslant 10 & (\text{第 2,3 时段交接时至少有 10 个人员}) \\ x_3 + x_4 \geqslant 8 & (\text{第 3,4 时段交接时至少有 8 个人员}) \\ x_4 + x_5 \geqslant 6 & (\text{第 4,5 时段交接时至少有 6 个人员}) \\ x_5 + x_6 \geqslant 4 & (\text{第 5,6 时段交接时至少有 4 个人员}) \\ x_1 + x_6 \geqslant 8 & (\text{第 6,1 时段交接时至少有 8 个人员}) \end{cases}$$

从上述几个例题可以看出，线性规划的数学模型分为两部分，第一部分为目标函数(表示一定的目标要求)，由一组未知变量的线性函数表示；第二部分为约束条件，用一组等式或不等式表示。用一组数$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示某一方案；这组未知数的定值就为：求一组满足约束条件的非负变量，且使目标函数值最大(或最小)。

即求一组变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值，使它们满足：

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1(\text{或} \geqslant b_1,\text{或} = b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2(\text{或} \geqslant b_2,\text{或} = b_2) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m(\text{或} \geqslant b_m,\text{或} = b_m) \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

并使目标函数 $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$最大(或最小)。

第二节　单纯形法

一、线性规划问题的图解法及其解的情况

两个变量的线性规划问题可以用图解法求解，本节通过对线性规划问题的图解，了解线性规划问题各种解的情况。

定义 1.1　满足线性规划中约束条件的解称为可行解。满足约束条件的解的全体称为可行解集。

【例 1.5】　用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\max s = 2x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2) \end{cases}$$

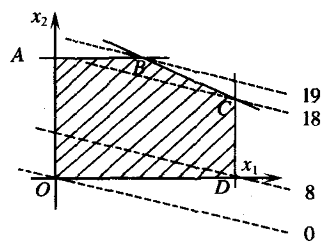

图 1.1

解：线性规划问题的 3 个约束条件和非负限制在图 1.1 上是 5 条直线，围出了一个凸多边形 $OABCD$。凸多边形 $OABCD$ 内的每一个点的坐标都对应着线性规划问题的一个可行解。所以凸多边形 $OABCD$ 称为线性规划问题的可行域，该可行域为有限区域。

我们分别令目标函数 $s = 0$ 和 8，可在图形上得到两条直线。可以发现，该直线越平行作业地向右上方推，目标函数值越大。最后得到的最优解为：$x_1 = 2$，$x_2 = 3$，目标函数值 $s = 19$。这时线性规划问题得到惟一解。

【例 1.6】　用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\max s = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2) \end{cases}$$

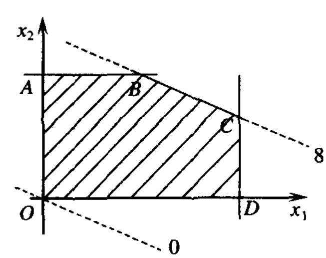

图 1.2

解：该例是在例 1.5 的基础上将目标函数改为 $\max s = x_1 + 2x_2$，其解见图 1.2。这样目标函数对应直线的斜率与第三个约束条件对应直线的斜率一样，故当该直线平行地向右上方推进时，必与直线 BC 相重合。因此，该问题有无穷多个最优解，其目标函数值为 8。

【例 1.7】 用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\min s = 2x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_{1,2} \geqslant 0 \end{cases}$$

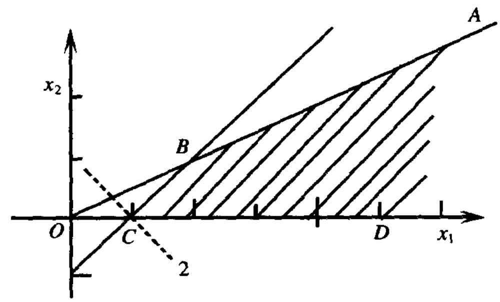

图 1.3

解:该例题的可行域为一个无限的区域 $ABCD$,如图 1.3 所示,目标函数对应直线的斜率为 -1,而目标函数为求最小,故目标函数对应直线向左下方推,得到的最优解为:$x_1 = 1, x_2 = 0$,目标函数值 $s = 2$,这时线性规划问题得到惟一解。

【例 1.8】 用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\max s = 2x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_{1,2} \geqslant 0 \end{cases}$$

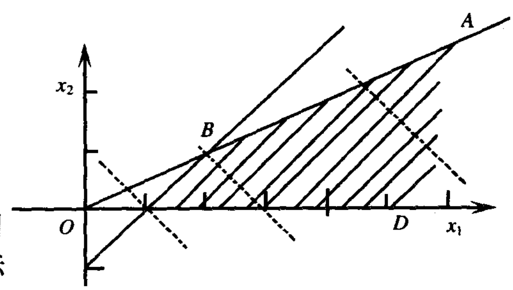

图 1.4

解:该问题在例 1.7 的基础上将目标函数改为 $\max s = 2x_1 + 2x_2$,这样目标函数对应直线平行地向右上方推进时(图 1.4),因可行域无上界,故找不到最优解,所以该问题为无最优解。

【例 1.9】 用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\min s = 2x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant -2 \\ x_{1,2} \geqslant 0 \end{cases}$$

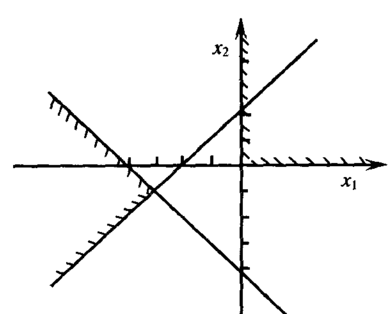

图 1.5

解:从图 1.5 可以看出,同时满足 4 个不等式的点不存在,显然不存在可行解,也没有最优解,所以该问题为无可行解。