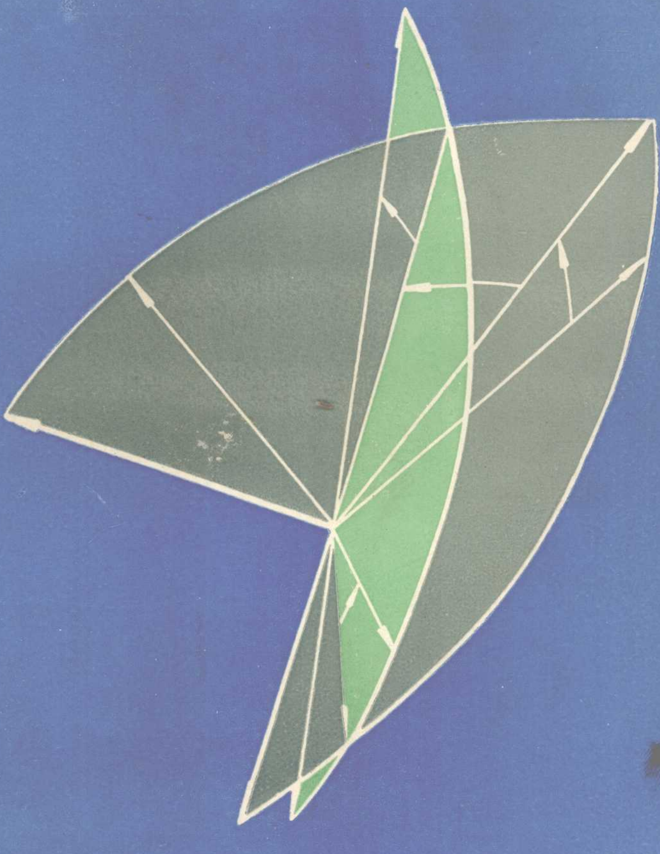
程国采 编著

国防科技大学出版社



# 四元数法及其应用

# 四元数法及其应用

程国采 编著

国防科技大学出版社

〔湘〕新登字009号

## 内 容 简 介

本书针对航天飞行器的姿态控制问题，首先叙述四元数的基本理论及其计算方法，然后研究了在刚体姿控中利用四元数作为误差信号的控制稳定性问题，以及四元数的最优控制问题。

本书可作为自动控制类研究生及科技人员的参考书。

四元数法及其应用

程国采　编著

责任编辑　钟　平

封面设计　侯　云

责任校对　朱宝龙

*

国防科技大学出版社出版发行

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

国防科技大学印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　印张：5.875　字数：142千

1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷　印数：700册

ISBN 7-81024-177-X

TP·32　定价：6.50元

# 序　　言

四元数的基本概念，早在1843年B.P.哈密顿就提出来了。但一直停留在理论概念的探讨阶段，没有 得到 广泛 的 实际应用。近年来，由于航天技术的发展，需要解决大姿态角的控制问题。传统的欧拉角法，由于在大姿态角情况下，欧拉方程是奇异的，给解大姿态角带来了困难。因而，四元数法日益受到重视。由于四元数方程是线性的，只有一个联系方程，在解算大姿态角时，带来很大方便，特别是可以直接用四元数分量作为控制信号，使四元数法的应用，得到很大的发展。

70年代以来，数字计算机和计算技术的发展，有可能进行误差信号的合理选择和控制，四元数作为最理想的控制参数，被广泛采用，诸如导弹制导、载人飞船和航天飞机中的很多姿态控制任务中，都引用了四元数法。

四元数具有很强的物理意义，它可以表征刚体姿态变换时的瞬时欧拉轴和所需的转角，作为一种姿态控制方法，是既古老而又年青的，在实际应用中，还有很多理论和实际问题需要解决。

本书前两章是基本理论部分，叙述四元数的基本理论及其计算方法。后两章是应用部分，首先研究了在刚体姿态控制中利用四元数作为误差信号的控制稳定性问题，并分别对姿态控制中的定向问题和定位问题进行了研究。然后，利用最优控制理论研究了四元数的最优控制问题。给出了飞行器姿态控制喷嘴的开关控制规律，并结合航天飞行器姿态控制典型情况进行

了研究。

本书引用了近年来有关四元数法的最新成果，可作为研究生教材和科研参考书。

研究生李华滨同志认真细致地校阅了全书，在此表示感谢。

程国采

一九九一年十月

# 目 录

## 第一章 四元数定义及其基本性质



## 第二章 四元数微分方程的建立



## 第三章 四元数在刚体运动控制中的应用

## 第四章 航天飞行器姿态控制的四元数法



## 参考文献

# 第一章　四元数定义及其基本性质

## §1　引　言

在研究航天飞行器的姿态控制问题时，经常遇到坐标变换运算。传统的解坐标变换的方法是三参数法、六参数和九参数法。

三参数法是解两坐标系中的三个欧拉角。以体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 对惯性坐标系 $ox_0y_0z_0$ 的变换为例，如图 1.1，其转换

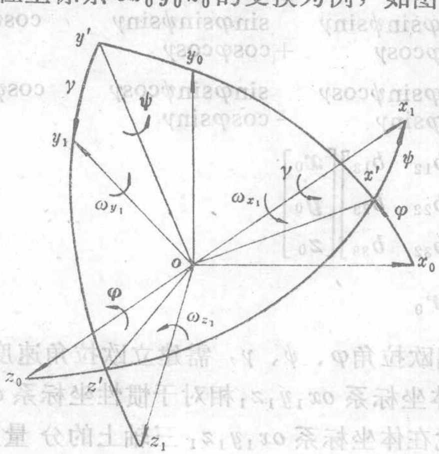



图 1.1　体坐标系与惯性坐标系关系图

次序为

$$ox_0y_0z_0 \xrightarrow{\varphi} ox'y'z_0 \xrightarrow{\psi} ox_1y'z' \xrightarrow{\gamma} ox_1y_1z_1$$

这里$\varphi$为俯仰角；

$\psi$为偏航角；

$\gamma$为滚动角。

如果以$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$；$\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{y}_1$、$\boldsymbol{z}_1$分别表示各轴向单位矢量，则

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{z}_1\end{bmatrix}
&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix}\\
&\quad\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\\
\cos\varphi\sin\psi\sin\gamma-\sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma\\
\cos\varphi\sin\psi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

即 $$\boldsymbol{r}_1=B\boldsymbol{r}_0 \tag{1.2}$$

为了解出欧拉角$\varphi$、$\psi$、$\gamma$，需建立欧拉角速度方程。

设$\omega_1$是体坐标系$ox_1y_1z_1$相对于惯性坐标系$ox_0y_0z_0$的旋转角速度，它在体坐标系$ox_1y_1z_1$三轴上的分量为$\omega_{x_1}$、$\omega_{y_1}$、$\omega_{z_1}$，则

$$\omega_{x_1}+\omega_{y_1}+\omega_{z_1}=\dot{\varphi}+\dot{\psi}+\dot{\gamma} \tag{1.3}$$

由图1.1知

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\varphi}\bar{z}_0 = \dot{\varphi}\cos\psi\bar{z}' - \dot{\varphi}\sin\psi\bar{x}_1 \\
\quad = -\dot{\varphi}\sin\psi\bar{x}_1 + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma\bar{y}_1 + \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma\bar{z}_1 \\
\dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\bar{y}_1 = \dot{\psi}\cos\gamma\bar{y}_1 - \dot{\psi}\sin\gamma\bar{z}_1 \\
\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\gamma}\bar{x}_1
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

故得欧拉角速度方程如下：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega_{y_1}\sin\gamma + \omega_{z_1}\cos\gamma}{\cos\psi} \\
\dfrac{d\psi}{dt} = \omega_{y_1}\cos\gamma - \omega_{z_1}\sin\gamma \\
\dfrac{d\gamma}{dt} = \omega_{x_1} + (\omega_{y_1}\sin\gamma + \omega_{z_1}\cos\gamma)\mathrm{tg}\psi
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

此方程组为非线性变系数微分方程组，如果知道瞬间角速度 $\omega_{x_1}$、$\omega_{y_1}$、$\omega_{z_1}$，则在给定的起始条件下，解方程组，即可求出 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\gamma(t)$。但存在如下两个问题。

(1) 方程组(1.5)为非线性变系数微分方程，只能用数值积分法求解，计算工作量大。

(2) 在大姿态角情况下，例如 $\psi \to \pi/2$，会引起较大的计算误差，且当 $\psi = \pi/2$ 时，方程是奇异的。

故往往要另寻其他解法，六参数法、九参数法和四元数法即是解姿态变化的其他几种方法。

六参数法和九参数法是解坐标变换的方向余弦，由(1.2)式

$$\boldsymbol{r}_1 = B\boldsymbol{r}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \dot{B}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \Omega\boldsymbol{r}_1 = \Omega B\boldsymbol{r}_0 \tag{1.7}$$

式中

$$\Omega=\begin{bmatrix} 0, & -\omega_{z_1}, & \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1}, & 0, & -\omega_{x_1} \\ -\omega_{y_1}, & \omega_{x_1}, & 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

故 $$\dot{B}=\Omega B \tag{1.9}$$

即
$$\begin{cases} \dot{b}_{11}=\omega_{y_1}b_{31}-\omega_{z_1}b_{21} \\ \dot{b}_{12}=\omega_{y_1}b_{32}-\omega_{z_1}b_{22} \\ \dot{b}_{13}=\omega_{y_1}b_{33}-\omega_{z_1}b_{23} \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \dot{b}_{21}=\omega_{z_1}b_{11}-\omega_{x_1}b_{21} \\ \dot{b}_{22}=\omega_{z_1}b_{12}-\omega_{x_1}b_{22} \\ \dot{b}_{23}=\omega_{z_1}b_{13}-\omega_{x_1}b_{23} \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} \dot{b}_{31}=\omega_{x_1}b_{21}-\omega_{y_1}b_{11} \\ \dot{b}_{32}=\omega_{x_1}b_{22}-\omega_{y_1}b_{12} \\ \dot{b}_{33}=\omega_{x_1}b_{23}-\omega_{y_1}b_{13} \end{cases} \tag{1.12}$$

由于$B$为正交变换阵，故需满足以下六个约束条件：

$$\begin{cases} b_{11}^2+b_{12}^2+b_{13}^2=1 \\ b_{21}^2+b_{22}^2+b_{23}^2=1 \\ b_{31}^2+b_{32}^2+b_{33}^2=1 \\ b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22}+b_{13}b_{23}=0 \\ b_{11}b_{31}+b_{12}b_{32}+b_{13}b_{33}=0 \\ b_{21}b_{31}+b_{22}b_{32}+b_{23}b_{33}=0 \end{cases} \tag{1.13}$$

九参数法即是在约束条件(1.13)下，解方程组(1.10)，(1.11)和(1.12)。而六参数法，则是在(1.13)约束下，解六个变量的微分方程。可以看出无论是九参数法还是六参数法，由于要满足六个非线性约束方程，计算起来是十分不方便的。

下面介绍的四元数法，则具有如下的优点：

(1) 四元数方程是线性微分方程，只有一个约束条件，便于计算，与欧拉角速度方程比，其计算量仅为欧拉方程的35%左右。

(2) 在进行模拟和数字计算时，精度高于欧拉方程，且不会出现奇异现象。

(3) 可直接用四元数作为捷连系统的控制量，便于系统分析和讨论，优于欧拉角。

早在1843年，哈密顿(Hamilton B.P.)就建立了四元数代数学。但一直没有得到任何实际的应用。近年来，随着计算技术的发展，四元数法在飞行器控制系统中得到日益广泛的应用，我国已故数学家关肇直同志就曾研究过用四元数法解飞行器的姿态问题。实践证明，四元数法在建立捷连式惯性系统、刚体姿态控制、定位和稳定的控制中都得到广泛的应用，并显示出其优越性。

## §2 四元数代数学

四元数是由于要将三维矢量代数运算推广到乘法和除法运算的必要性而产生的。

四元数是由一个实数单位和三个虚数单位 i, j, k 组成的，通常写成

$$\lambda=\lambda_0\cdot 1+\lambda_1 \mathrm{i}+\lambda_2 \mathrm{j}+\lambda_3 \mathrm{k} \qquad (1.14)$$

式中$\lambda_0$、$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$均为实数，i、j、k 服从以下运算规律，如图1.2，顺时针相乘为正，逆时针为负，即

$$\begin{cases} \mathrm{ij}=\mathrm{k}=-\mathrm{ji} \\ \mathrm{jk}=\mathrm{i}=-\mathrm{kj} \\ \mathrm{ki}=\mathrm{j}=-\mathrm{ik} \\ \mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1 \end{cases} \qquad (1.15)$$

图 1.2 乘法顺序图

可以看出，如果$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，则四元数退化为实数，如果$\lambda_2=\lambda_3=0$，则四元数退化为复数，所以称四元数为超复数。

如果把i、j、k理解为三维空间的互相正交的三个单位矢量，则可将四元数看成是由标量部分(通常以符号sqal或scal表之）和矢量部分（通常以vect表之）组成。

$$\lambda=\lambda_0+\boldsymbol{\lambda} \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\lambda_1\mathrm{i}+\lambda_2\mathrm{j}+\lambda_3\mathrm{k} \tag{1.17}$$

有时也可用一个四维矢量来表示四元数。

$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \tag{1.18}$$

下面我们将证明四元数组成四元数域（或超复法域）。

域的定义：在非空集合$Q$上，定义两种运算（加法和乘法）。适合

（1）加法适合交换律、结合律。

（2）乘法适合结合律、分配律。

（3）具有单元、零元和逆元。

则形成域(Field)。

现在来研究四元数。

（1）加法

任取两四元数

$$\begin{cases} q=q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k} \\ p=p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k} \end{cases} \tag{1.19}$$

则 $$q+p=(q_0+p_0)+(q_1+p_1)\mathrm{i}+(q_2+p_2)\mathrm{j}+(q_3+p_3)\mathrm{k} \tag{1.20}$$

可以看出任意两四元数相加仍为四元数，且可以证明四元数加法满足交换律和结合律。

（2）乘法

$$\begin{aligned} qp&=(q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})(p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k}) \\ &=[q_0p_0-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)] \\ &\quad+[q_1p_0+q_0p_1+(q_2p_3-q_3p_2)]\mathrm{i} \\ &\quad+[q_2p_0+q_0p_2+(q_3p_1-p_1q_3)]\mathrm{j} \end{aligned}$$

$$+[q_3p_0+q_0p_3+(q_1p_2-q_2p_1)]\mathrm{k} \qquad (1.21)$$

故四元数乘四元数仍为四元数，四元数乘法以符号“ * ”表之。

为了运算方便，四元数乘法可以有以下两种表示式：

1）借用矢量运算符号的表示法

设 $q=q_0+\boldsymbol{q}=q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k}$

$p=p_0+\boldsymbol{p}=p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k}$

则

$$\begin{aligned} q*p=&[q_0p_0-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)]\\ &+(q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})p_0\\ &+q_0(p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k})\\ &+[(q_2p_3-q_3p_2)\mathrm{i}+(q_3p_1-q_1p_3)\mathrm{j}\\ &+(q_1p_2-q_2p_1)\mathrm{k}]\\ =&q_0p_0-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})+\boldsymbol{q}p_0+q_0\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) \end{aligned} \qquad (1.22)$$

故 $p*q=p_0q_0-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+\boldsymbol{p}q_0+p_0\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})$

由于 $(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\neq(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})$

故 $q*p\neq p*q$

即四元数乘法不适合交换律，但可以证明它满足结合律和分配律。

2）矩阵形式的表示法

将四元数写成四维矢量形式

$$q=(q_0,q_1,q_2,q_3)^T$$
$$p=(p_0,p_1,p_2,p_3)^T$$

则

$$q*p=\begin{bmatrix} q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3 \\ q_1, & q_0, & -q_3, & q_2 \\ q_2, & q_3, & q_0, & -q_1 \\ q_3, & -q_2, & q_1, & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_0p_0 & -q_1p_1 & -q_2p_2 & -q_3p_3 \\ q_1p_0 & +q_0p_1 & -q_3p_2 & +q_2p_3 \\ q_2p_0 & +q_3p_1 & +q_0p_2 & -q_1p_3 \\ q_3p_0 & -q_2p_1 & +q_1p_2 & +q_0p_3 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

$$=\begin{bmatrix} p_0, & -p_1, & -p_2, & -p_3 \\ p_1, & p_0, & p_3, & -p_2 \\ p_2, & -p_3, & p_0, & p_1 \\ p_3, & p_2, & -p_1, & p_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

我们把矩阵

$$V(q)=\begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

称为核矩阵，由(1.23)和(1.24)式可以看出在用矩阵形式进行乘法运算时，如果欲将四元数次序颠倒，则需将核矩阵转置。

(3) 单元、零元和负四元数

四元数单元为 $I=1+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}$ (1.26)

四元数零元为 $0=0+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}$ (1.27)

四元数负元为 $-q=-q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}$ (1.28)

(4) 逆元

四元数逆元以$q^{-1}$表示之

$$q^{-1}=\frac{1}{q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k}}$$

$$=\frac{q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}}{(q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})(q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k})}$$

$$=\frac{q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\frac{q^*}{N^2(q)} \tag{1.29}$$

式中 $q^*=q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}$ (1.30)

称为四元数 $q$ 的共轭四元数。

$N(q)=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$ 称为四元数的范数。

若 $N(q)=1$，则

$$q^{-1}=q^* \tag{1.31}$$

即逆元素等于它的共轭元素。四元数 $q$ 是正规的。

(5) 除法：是唯一的，由于乘法是不可交换的，故除法分左除和右除。

例如$q$、$p$、$x$为三个四元数

$q*x=p$ 则 $x=q^{-1}*p$

$x*q=p$ 则 $x=p*q^{-1}$

因 $q^{-1}*p\neq p*q^{-1}$，故两 $x$ 不相等。

由以上叙述可知四元数全体，组成四元数域，或称超复数域，它包含了复数域和实数域。

根据四元数的定义，四元数具有如下性质：

(1) 四元数之和的共轭四元数等于共轭四元数之和。

$$(q+p+\lambda)^*=q^*+p^*+\lambda^* \tag{1.32}$$

(2) 四元数之积的共轭四元数等于其共轭四元数以相反顺序相乘之积

$$(q*p*\lambda)^*=\lambda^* * p^* * q^*$$
$$(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^*=\lambda_n^* * \lambda_{n-1}^* * \cdots * \lambda_2^* * \lambda_1^* \tag{1.33}$$

(3) 诸四元数之逆，由下式给出

$$(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^{-1}=\frac{(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^*}{\|\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n\|}=\lambda_n^{-1}*\lambda_{n-1}^{-1}*\cdots*\lambda_2^{-1}*\lambda_1^{-1} \tag{1.34}$$

(4) 四元数之积的范数等于其因子范数之积

$$\|\lambda_1 * \lambda_2 * \cdots * \lambda_n\| = \|\lambda_1\|\|\lambda_2\|\cdots\|\lambda_n\| \tag{1.35}$$

（5）仅在因子中的一个 等于 零时，两四元 数之积才 等于零。

例如　$q*p=0$，则$\|q*p\|=0$，$\|q\|*\|p\|=0$

因$\|q\|$，$\|p\|$为标量，故或者$\|q\|=0$，或者$\|p\|=0$，也即$q=0$或$p=0$时，$q*p=0$才有可能。

（6）诸四元数相乘，当其因子循环置换时，四元数乘积的标量部分不变。即

$$\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]=\mathrm{Scal}[q*p*\lambda]=\mathrm{Scal}[p*\lambda*q] \tag{1.36}$$

但　$\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]\neq\mathrm{Scal}[\lambda*p*q]$

**证**

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]&=\mathrm{Scal}\{(\lambda_0+\boldsymbol{\lambda})*[q_0p_0-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\\&\qquad+q_0\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}p_0+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})]\}\\&=\lambda_0q_0p_0-\lambda_0(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})-q_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p})\\&\qquad-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{q})p_0-\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

因

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ p_1 & p_2 & p_3\end{vmatrix}$$

故因子循环置换时，乘积的标量部分不变；而非循环置换时，则不相等。

（7）三个四元数相乘，当因子循环置换时，四元数乘积的矢量部分不相等，即

$$\mathrm{Vect}[\lambda*q*p]\neq\mathrm{Vect}[q*p*\lambda]$$

但有

$$\mathrm{Vect}[\lambda*q*p]=\mathrm{Vect}[p*q*\lambda] \tag{1.37}$$