GAODENG SHUXUE

高等数学

（下册）

罗晓晖　王晓艳　主编

中国财政经济出版社

高 等 数 学

（下 册）

主　编：罗晓晖　王晓艳
副主编：刘泮振　侯俊林　王军民

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:上、下册/罗晓晖,王晓艳主编.—北京:
中国财政经济出版社,2005.7

ISBN 7-5005-8147-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①罗…②王… Ⅲ.高等数学
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 042436 号

中国财政经济出版社出版

URL:http://www.cfeph.cn

E-mail:cfeph @ cfeph.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码:100036

发行处电话:88190406 财经书店电话:64033436

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 27.75 印张 661 000 字

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月北京第 1 次印刷

印数:1-3 000 定价:48.00 元(上、下册)

ISBN 7-5005-8147-5/O.0036

(图书出现印装问题,本社负责调换)

目　录

第七章　多元函数微分学 …… 477
第一节　多元函数的极限与连续性 …… 477
第二节　偏导数与全微分 …… 486
第三节　多元复合函数与隐函数的求导法则 …… 500
第四节　空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线、方向导数与梯度 …… 518
第五节　多元函数的极值 …… 531
第六节　综合举例 …… 546
第八章　二重积分与曲线积分 …… 556
第一节　二重积分的概念和性质 …… 556
第二节　直角坐标系下二重积分的计算 …… 562
第三节　极坐标系下二重积分的计算 …… 572
第四节　第一类曲线积分 …… 580
第五节　第二类曲线积分 …… 587
第六节　格林公式 …… 598
第七节　综合举例 …… 611
第九章　三重积分与曲面积分 …… 621
第一节　三重积分 …… 621
第二节　柱面坐标与球面坐标下三重积分的计算 …… 629
第三节　第一类曲面积分 …… 634

第四节 第二类曲面积分 …… 640
第五节 高斯公式与斯托克斯公式 …… 652
第六节 场论初步 …… 662
第七节 积分应用 …… 666
第八节 综合举例 …… 675
第十章 无穷级数 …… 684
第一节 常数项级数 …… 685
第二节 常数项级数判别法 …… 692
第三节 幂级数 …… 706
第四节 函数的幂级数展开及其应用 …… 717
第五节 函数项级数的一致收敛性 …… 730
第六节 傅立叶级数 …… 739
第七节 周期为T的函数的展开 …… 755
第八节 综合举例 …… 759
第十一章 常微分方程 …… 770
第一节 常微分方程的基本概念 …… 770
第二节 变量分离方程与变量代换 …… 778
第三节 一阶线性微分方程和全微分方程 …… 792
第四节 高阶微分方程 …… 804
第五节 常系数线性微分方程 …… 817
第六节 变系数线性方程和常系数线性方程组 …… 833
第七节 综合举例 …… 842

附录 习题答案(七—十二章) …… 849

第七章　多元函数微分学

在前面的章节中我们已经学完了一元函数的微积分,但在很多实际问题中所遇到的函数往往依赖于多个自变量,这就提出了多元函数及其微分、积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分学．多元函数与一元函数在理论上有许多共同点,但也存在不少差别,这种差别是由多元函数本身的特殊性决定的,所以在学习时要注意这些差别．本章主要以讨论二元函数为主,而从二元到二元以上的多元函数可以类推.

第一节　多元函数的极限与连续性

一、平面点集

在讨论一元函数时,经常用到区间与邻域的概念,由于讨论多元函数的需要,我们就将这些概念加以推广．首先需要讨论平面上点的集合,即平面点集,因为平面上的点与数对一一对应,所以在今后的讨论中,就将“平面上的点”与“数对”看作具有相同的含义而不加区别．

平面点集是满足某种条件 p 的数对 (x,y) 的集合,记为 $E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{满足条件 }p\}$.

例如全平面上的点构成的集合 R^2 是

$$R^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

平面上以原点为圆心,以 r 为半径的圆内(不包含圆周)所有点构成的集合是

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}.$$

定义 1　平面点集 $\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,\delta>0\}$ 称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 圆形邻域;平面点集

$$\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,\delta>0\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 方形邻域.

今后若不加指明,将不加区别地用"点 P_0 的 δ 邻域"泛指这两种邻域并以记号 $U(P_0,\delta)$ 表示.如果不强调邻域半径 δ,则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域.点 P_0 的空心邻域记作 $\dot{U}(P_0)$.

设 E 是平面点集,P_0 是平面上的一点,如果存在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$,使得 $U(P_0)\subset E$,则称 P_0 是 E 的内点,显然 E 的内点属于 E.

如果点 P_0 的任意一个邻域内,既含有 E 中的点,又含有不属于 E 的点,则称 P_0 是 E 的界点(E 的界点可以属于 E,也可以不属于 E),E 的全体界点称为 E 的边界.

例 1　点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 中的任何点都是 E 的内点,圆 $x^2+y^2=1$ 上的点都是 E 的界点.

例 2　点集 $E=\{(x,y)\mid 4<x^2+y^2\leqslant 9\}$ 是一个圆环,圆环内的点都是 E 的内点,外圆 $x^2+y^2=9$ 上的点(都属于 E)是 E 的界点;内圆 $x^2+y^2=4$ 上的点(都不属于 E)也是 E 的界点.

定义 2　设 E 是一个平面点集,如果 E 中的每个点都是内点,且 E 中任意两点都能用一条完全属于 E 的折线连接起来,即 E 是连通的,则称 E 为开区域,开区域连同它的边界所构成的集合称

为闭区域.

今后若不需要区分开、闭性,就把开区域或闭区域统称为区域.如果区域内任一点都包含在以定点 P_0 为圆心,以实数 R 为半径的一个圆内,则称该区域为有界区域,否则称为无界区域.

例 3　点集 $\{(x,y)|4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$ 是有界闭区域.

例 4　点集 $\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$ 是无界开区域.

讨论二元函数离不开二维空间(即平面)中的点集.在讨论 n 元函数时就有必要引入 n 维空间的概念.所谓 n 维空间 R^n 就是所有 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所构成的集合.而每个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点,数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该点的第 i 个坐标.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

前述二维空间中点集的一系列概念都可以推广到 n 维空间中去.

二、多元函数的概念

1. 多元函数的定义

在实际问题中经常会遇到一个变量要随两个、三个或更多个变量的变化而变化,这就是多元函数.

例 5　电流 $I=\dfrac{U}{R}$ 是随电压 U 及电阻 R 的变化而变化.

例 6　长方体的体积 $V=xyz$ 是由长方体的长 x、宽 y、高 h 而决定.

我们抽去具体含义,仅保留它们的数量关系就得到多元函数的概念.

定义 3　设有非空的 n 元有序数组集合 D,f 是某一确定的对应

法则,如果对于 D 中的每一个有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,通过 f 都有惟一的一个实数 z 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的 n 元函数,记为

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

彼此独立的变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为自变量,z 称为因变量.集合 D 称为 f 的定义域,记为 D(f).D 中任意一点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$根据对应法则 f 所对应的实数$z^0$称为 f 在点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$处的函数值,记为$z^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$.函数 f 的所有函数值的集合称为函数的值域.

当 $n=1$ 时 f 为一元函数,记为 $y=f(x),x\in D$.

当 $n=2$ 时 f 为二元函数,记为 $z=f(x,y),(x,y)\in D$.二元及二元以上的函数统称为多元函数.以下我们着重讨论二元函数.

2. 二元函数的定义域与几何意义

使二元函数 $z=f(x,y)$ 有意义的点构成的集合就称为这个函数的定义域.

例 7 函数 $z=\ln(4-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-1}$ 的定义域是 $D(f)=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}$.

例 8 函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域是

$$D(f)=\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,若把数对(x,y)和与其对应的 $z=f(x,y)$ 一起组成三维数组(x,y,z),当(x,y)取遍 D 内的所有点时,得到一个空间点集:

$$D=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

这个点集在三维空间所描绘

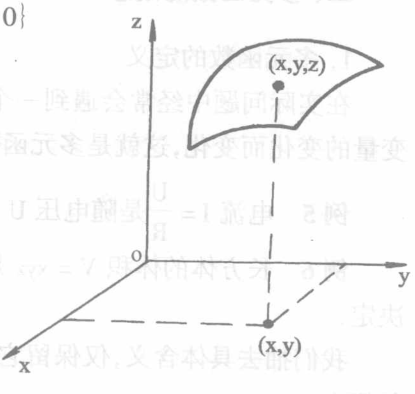

图 7-1

出的图形就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图象(如图 7-1).这个图象通常是空间曲面.二元函数的定义域就是这张曲面在 xoy 平面上的投影.

三、二元函数的极限与连续性

1. 二元函数的极限

与一元函数的极限概念类似,我们给出二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处极限的定义:

定义 4　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,$P(x_0,y_0)\in D$,A 为常数.如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得满足不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $(x,y)\in D$ 都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$$

为了区别于一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例 9　用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x+3y)=8$.

证　因为 $|2x+3y-8|=|2(x-1)+3(y-2)|$

而　$$|x-1|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$|y-2|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

所以,对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{1}{5}\varepsilon$,当

$$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \text{ 时}$$

恒有 $|(2x+3y)-8|<\varepsilon$ 成立.

由定义知 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}(2x+3y)=8$.

在二元函数的极限定义中,所谓二重极限存在,是指点 $P(x,y)$ 沿任何路线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 都无限接近于 A. 而在平面上 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 的路线有无数条,所以当 $P(x,y)$ 沿某一特定路线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,即使 $z=f(x,y)$ 无限接近于某一常数,我们也不能保证函数的极限就存在. 但如果 $P(x,y)$ 沿不同路线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数趋于不同的值,那么二重极限就一定不存在.

例 10 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的极限是否存在.

解 因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于(0,0)时,有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,kx)\to(0,0)}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然它是随着 k 值的不同而变化的,所以该函数在(0,0)处的极限不存在.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 11 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解 因为 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$,所以 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

例 12 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y\dfrac{\sin(xy)}{xy}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1\times 1 = 1$

2. 累次极限

在多元函数的理论中，我们还会遇到累次极限的概念，什么是累次极限呢？

设 $f(x,y)$ 是矩形

$$E = \{(x,y) \mid |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$$

上的函数. 如果对于 (y_0-b, y_0+b) 内任何异于 y_0 的点 $\bar{y}$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\bar{y})$ 都存在，这个极限当然是 $\bar{y}$ 的函数，记之为 $\varphi(\bar{y})$. 假如 $\lim\limits_{\bar{y}\to y_0}\varphi(\bar{y}) = A$，我们就称累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = A$.

类似地，如果对于 (x_0-a, x_0+a) 内任何异于 x_0 的点 $\bar{x}$，极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(\bar{x},y)$ 都存在，这个极限自然是 $\bar{x}$ 的函数，记之为 $\varphi(\bar{x})$，如果 $\lim\limits_{\bar{x}\to x_0}\varphi(\bar{x}) = B$，我们就称累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = B$.

一般来说，即使这两个累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$、$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在，但它们却不一定相等.

例 13 求

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & x+y\neq 0 \text{ 且 } x,y \text{ 都不等于 } 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

的两个累次极限.

解 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2-y}{y} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x} = 1$

注 二元函数的两个累次极限存在并且相等并不能保证二重极限存在.

3. 二元函数的连续性

有了二元函数的极限概念,就容易给出二元函数连续的定义.

定义 5 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)\in D$,如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.否则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点处都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续,或者称 $f(x,y)$ 是 D 内的连续函数.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的几何意义是:曲面 $z=f(x,y)$ 在这点的附近是连接着的.如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不连续,即可能是曲面 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有个孔或者在它附近有条缝.

多元连续函数的运算法则与一元连续函数是很相似的,我们不难证明:

(1) 如果 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 都在 D 上连续,则函数 $f(x,y)\pm g(x,y)$,$f(x,y)\cdot g(x,y)$,$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$(在 D 上 $g(x,y)\neq 0$)在 D 上都连续.

(2) 如果 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续,而 $\varphi(z)$ 是在整个实数轴上连续的函数,则复合函数 $\varphi[f(x,y)]$ 在 D 上连续.

与一元初等函数类似,多元初等函数是经过有限次加、减、乘、除及有限次复合且可用一个式子所表示的函数,根据上面指出的连续函数的和、差、积、商及复合函数的连续性我们可以得到如下结论:

一切多元初等函数在其定义域区域内连续.

这样以来,二元初等函数 $f(x,y)$ 在其定义域区域内的点 P_0

(x_0,y_0)处的极限就等于 $f(x_0,y_0)$.

即 $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

例如 $$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xe^y}{x^2+y^2}=\frac{1\times e^2}{1^2+2^2}=\frac{1}{5}e^2$$

与闭区间上一元连续函数的性质类似,在有界闭区域上多元函数也有如下性质:

性质 1　(最大值与最小值定理)在有界闭区域 D 上的多元连续函数,在 D 上一定有最大值和最小值.

性质 2　(介值定理)如果 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,M 与 m 分别为 $f(x,y)$在 D 上的最大值与最小值,则对于任何实数 c: $m<c<M$,在 D 内至少存在一点(ξ,η),使 $f(\xi,\eta)=c$.

习题 7－1

1. 求下列函数的定义域,并画出定义域的图形.

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$　　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

(3) $z=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$

(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(5) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$　　(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{3xy+x^2y^2}{x+y}$　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

3. 求下列函数在(0,0)处的累次极限,并判断函数在(0,0)处的极限是否存在.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

4. 证明函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

的累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在,但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

5. 求函数 $z=\dfrac{y^2+x}{y^2-2x}$ 的间断点.

第二节　偏导数与全微分

一、二元函数的偏导数

1. 偏导数的定义

对于多元函数,实际问题往往要求我们突出其中的某一个因素(或自变量),而把其余的自变量暂时固定下来,当作常数,来考察这个本质上是一元函数的变化率,这就是所谓的偏导数的概念.

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,固定 $y=y_0$,如果函数关于 x 的偏增量 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,$

y_0)与自变量 x 的增量 Δx 的比值

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在.

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ 存在,则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f'_x(x_0,y_0)$$

同样可以定义函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为 $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f'_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点处对 x 对 y 的偏导数都存在,那么这两个偏导数就是点(x,y)的函数,就称它们为函数 $z=f(x,y)$对自变量 x 或 y 的偏导函数,也简称为偏导数.记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x,\quad f'_x(x,y)$$

或 $$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y,\quad f'_y(x,y)$$

由定义可知,求二元函数的偏导数,只需将一个变量看作常量,然后用一元函数求导方法即可.求$\frac{\partial f}{\partial x}$时,把 y 看作常量而对 x 求导数;求$\frac{\partial f}{\partial y}$时,把 x 看作常量而对 y 求导数.至于$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处对 x,y 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$,其实就是偏导数 $f'_x(x,$

y)与 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值.与上述类似,可对 $n(n>2)$ 元函数求偏导数.

例 1 求 $z=x^3+2x^2y^3+e^xy$ 在(1,1)处的偏导数.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy^3+e^xy$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=6x^2y^2+e^x$$

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=7+e,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=6+e$

例 2 求 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 的偏导数.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

例 3 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 都看作常量,得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

类似可得 $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

2. 偏导数的几何意义

在空间直角坐标系中,二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是一个空间曲面 S.按定义,函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 是先固定 $y=y_0$,然后对一元函数 $z=f(x,y_0)$ 求出 x_0 处的导数,而 $z=f(x,y_0)$ 表示曲面 S 与平面 $y=y_0$ 相截而成的一条曲线 L_1,$f'_x(x_0,y_0)$ 是曲线 L_1 在 (x_0,y_0,z_0) 点之切线的斜率 $\tan\alpha$(如图 7-2).