北京市高等教育精品教材立项项目

万　敏　李东升　乔立红
王秀凤　金朝海　编著

板料成形计算机分析技术

北京航空航天大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

板料成形计算机分析技术

万　敏　李东升　乔立红
王秀凤　金朝海　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍了板料成形的计算机分析技术，包括有限元分析技术与人工智能分析技术两部分。在介绍两种分析方法的基本理论、公式推导和实施步骤的基础上，为推动工程应用，还列举了实例，以供参考。

本书可以用作航空宇航制造工程专业本科生、研究生的教材，也可为有关专业的学生和工程技术人员提供参考。

图书在版编目(CIP)数据

板料成形计算机分析技术/万敏等编著. —北京 ：北京航空航天大学出版社，2008.10

ISBN 978-7-81077-968-5

Ⅰ.板… Ⅱ.万… Ⅲ.板材冲压—成型—计算机辅助分析—高等学校—教材 Ⅳ.TG386.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 179590 号

板料成形计算机分析技术

万 敏 李东升 乔立红

王秀凤 金朝海 编著

责任编辑 魏军艳

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:13.25 字数:297 千字

2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷 印数:4 000 册

ISBN 978-7-81077-968-5 定价:22.00 元

序

板料成形是金属塑性加工的一个重要分支，在航空、航天、汽车和家电等许多工业领域都有着极为广泛的应用。它有着悠久的历史，长期以来却被视为“钣金工的手艺”，谈不上科学。因为生产力发展的需要，为了深入掌握各种板料零件的成形方法，正确理解板料成形中出现的各种现象，确定各种工艺参数，提高零件的成形极限与成形质量，改进已有的工艺过程，寻求新的更为完善的工艺方法，必须对金属板料在不同的变形条件和变形方式下塑性变形的实质取得规律性的了解。20 世纪 40 年代以来，经过几代学者的潜心研究，终于揭开了它的神秘面纱，实现了由“手艺”到科学的飞跃。然而还有许多充满魅力和奥秘的“黑匣子”，有待人们继续去探索和揭示。

塑性加工的研究是变形力学研究的扩展与延伸。在 20 世纪的后期得到了蓬勃发展，许多知名的塑性加工领域的研究家几乎都是变形力学的著名学者。他们的研究成果集中反映在 1983 年出版的，由国际知名学者 E·翁克索夫(苏)、W·约翰生(英)、工藤英明(日)等联合撰写的《金属塑性变形理论》一书中。其中，波波夫教授将板料成形方面的研究成果概括为“工程解析”，其特点是：针对简单、典型的轴对称问题，在满足一定精度要求的前提下，采用合理的简化假设，避开繁难的数学运算，取得用解析函数表达的比较简单的解答。这种封闭的解析解可以清楚地显示各个主要参数之间的关系和变化规律。人们可以通过这些简单、典型零件成形问题的解答，举一反三，思考更为复杂的实际问题。显然，“工程解析”提供的分析方法和解答，虽然可以有助于建立解决板料成形问题的基本概念，但距离取得复杂实际问题的较为精确的解答，还有相当距离。

20 世纪末，计算机技术飞速发展。应用计算机技术解决各领域的问题成为各个学科发展的一个突出特点。计算机技术在板料成形中的应用极为广泛，可以概括为两个方面：分析与控制。板料成形中的计算机分析技术，有两条途径可循：一条是基于非线性有限元力学理论的数值分析模拟技术；另一条是基于实践经验(包括实验)，以计算机作为思维载体的智能分析模拟技术。

有限元分析模拟技术从分析网格单元的应力应变入手，由局部到整体，研究

板料成形的规律，获得问题的数值解。智能分析模拟技术，以有限的实测数据为样本，建立多参数非线性神经网络映射模型，以分析解决板料成形中的多参数耦合问题；或以工艺专家多年积累的经验知识，归纳整理为计算机所能处理的形式，建立相应的专家系统，以解决板料成形中的某些问题。

以有限元为基础的数值模拟是揭示板料成形的变形规律和实质、求得解答的主要工具，有着深厚的学术积累，理所当然地较早为工程界所重视。在投入了大量的人力、物力研究开发后，一些商用软件陆续推出，其中，比较适用于板料成形数值分析的有 PAM－STAMP，AutoForm，eta/DYNAFORM 和 MSC，Marc 等。虽然有限元数值模拟是板料成形计算机分析的主干，但是由于板料成形问题的复杂多样，往往必须反复调试，才能获得满意的结果。据不完全统计，采用 PAM—STAMP 软件，分析模拟一个中等复杂汽车覆盖件的成形过程，大约需要 20 个回合（第一遍所需时间约 12 h，修改后再算一遍即累加一个回合）。每次修改都需要工艺工程师与模拟工程师的密切合作。这表明，板料成形是一个实践性很强的科学，必须尽量减少个人经验对数值模拟的约束。大力开发智能分析系统，有望缓解个人经验的约束，进一步充实和完善整个模拟过程，使之步入自适应模拟（adaptive simulation）的轨道。

近年来，不同学科引入智能技术，开拓了各自的研究领域和应用前景。智能控制、智能诊断和智能决策等层出不穷，但板料成形领域与其他制造领域（例如机械加工）相比，则很少开发应用。在板料成形领域，开发以模拟中发现的障碍为输入，以相应的工艺对策为输出的成形障碍分析与处理的智能分析系统，并将其与数值模拟系统有机结合起来。一个完整的、自动调整工艺参数的自适应模拟系统是可以实现的。

胡世光

前　言

《板料成形计算机分析技术》一书是胡世光教授倡议编写的。它承袭了《板料冷压成形的工程解析》(北京航空航天大学出版社,2004 年 7 月)、《板料成形中的计算机辅助技术》(北京航空航天大学出版社,1994 年 7 月)两书的编写主旨和主要思路,反映了编著者所在教研室 20 多年以来的教学、科研积累,内容包括板料成形有限元分析技术与人工智能分析技术两部分。本书侧重于工程应用的介绍,注重实例而不拘泥于理论建立的论述严谨和数学推导的精密严格。读者学习本书内容除需熟悉板料成形的工程解析外,最好具有弹塑性理论、变形稳定性理论和张量分析等方面的初步知识。

全书共 4 章。万敏教授和金朝海副教授负责第 1 章的撰写,李东升教授负责第 2 章的撰写,乔立红教授负责第 3 章的撰写,王秀凤副教授负责第 4 章的撰写。胡世光教授为本书作序。全书由万敏、王秀凤统稿,胡世光教授指导了全书的编写。

在编写工作中,施法中教授提供了大量的资料。刘玉芳副教授对全书进行了审阅,并提出了很好的建议。

由于作者水平有限,书中错误之处请读者指正。

编　者

2007 年 9 月于北京

目　录

第 1 部分　板料成形有限元分析技术

第 1 章　弹塑性有限元法

第 2 章　板料成形有限元数值模拟技术

第 2 部分　板料成形人工智能分析技术

第 3 章　人工智能技术、工作原理及实现方法

第1部分　板料成形有限元分析技术

第1章　弹塑性有限元法

1.1　引　言

板料塑性成形中涉及各种因素和遇到各种困难，其中最重要的就是成形过程中的力学分析，即成形过程中的应力应变计算问题。

经典的力学分析方法，正如在塑性理论中所知，根据微分平衡方程、几何变形方程及物理方程（包括屈服准则和应力应变关系），在给定的边界条件下求定解。这种方法的特点是根据实际问题中的几何关系和物理特性，经过合理的假设、恰当的简化而推导出相应的解析式，称为解析法。解析法在分析板料成形的应力应变关系上取得了很大的成效，因为它从几何和物理关系去推导公式，所以公式本身就蕴含着成形过程中各种因素的作用和相互关系。由于板料塑性成形是一个复杂的大变形过程，加之数学工具等方面的限制，该方法还难以取得整个变形过程的全解，特别是对于超出轴对称（旋转体）范围的复杂形状的板壳件的成形，用解析法计算还非常困难。

本章要介绍的有限元法，是一种与解析法完全不同的思路，它把整个受力结构划分成有限多个小的力学单元，互相连接而组成的集合体能提供整个结构的力学特性。其计算过程和计算结果都是一组离散的数值，故称为数值法。数值法能够按照实际情况选择计算模式，借助于计算机的高速运行和信息存储能力，以更多的变量求得板料成形过程中的应力应变全解，可计算的对象甚至是十分复杂的形状。

有限元分析起源于20世纪50年代航空工程中飞机结构的矩阵分析法。1960年Clough提出了“有限元法”(finite element method)这一术语，并将它用于求解弹性力学的平面应力问题。自此以后，有限元法和计算机的应用一起经历了一个蓬勃发展的时期，广泛应用于结构力学、弹塑性力学、液体力学、热传导及电磁场计算等各类问题的求解，目前已成为现代数值分析中最为重要的方法之一。

有限元法之所以能够迅速而广泛地得到应用，主要在于该方法本身的3个主要优点。其一是概念直观，使用方便。有限元法虽然要求数学基础坚实，但它并不会给使用它的工程技术人员造成大的困难，应用过程中，各步骤都具有明确的物理意义，便于使用者在不同的水平上

建立对方法的理解。其二是适应性强。该方法不仅能成功地处理各种结构的弹性力学问题，而且还可求解各种非匀质材料、非线性应力应变关系等几乎所有连续介质和场的分析计算问题。其三是该方法采用矩阵和张量形式表示，便于编制计算机程序。大型方程组的求解在计算机上完成，避免了人工计算的繁复，通过计算机的运算和存储能力发挥巨大的效益。

按照基本未知量的不同选择，有限元方法可以分为3类：位移法——以节点位移为基本未知量；力法——以节点力为基本未知量；混合法——以部分节点力和部分节点位移为未知量。由于位移法得出的方程和计算程序都比较简单，因而实际应用最多。

本章首先介绍有限元的基本方法，以简单的桁架结构分析，说明有限元的基本概念和解题步骤。在此基础上，针对线性问题和非线性问题的有限元法分别进行介绍。

1.2 有限元基本方法

1.2.1 简例——桁架结构分析

为了说明有限元分析的基本方法，首先以桁架结构分析作为一个简单的例子。

图1-1是一个由两根杆组成的桁架结构，两杆截面积和弹性模量均相同，分别为A和E。杆①长度为l_1，杆②长度为l_2。每根杆作为一个单元，杆的端点铰链作为节点，整个结构有3个节点。取坐标系Oxy来描述，可见，单元①连接着1,2号节点，单元②连接着2,3号节点。设节点处所受外力为P_1,Q_1,P_2,Q_2,P_3,Q_3，受力后所产生的位移相应地记为u_1,v_1,u_2,v_2,u_3,v_3。于是可对结构逐一做单元分析。

杆件在节点处铰接，因而不存在力矩。单元①共有4个自由度。由材料力学可知，力和位移的关系可用以下4个方程来确定

$$\begin{aligned}
P_{11} &= k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}u_2 + k_{14}v_2 \\
Q_{11} &= k_{21}u_1 + k_{22}v_1 + k_{23}u_2 + k_{24}v_2 \\
P_{12} &= k_{31}u_1 + k_{32}v_1 + k_{33}u_2 + k_{34}v_2 \\
Q_{12} &= k_{41}u_1 + k_{42}v_1 + k_{43}u_2 + k_{44}v_2
\end{aligned} \tag{1-1}$$

式中，$k_{ij}(i,j=1,2,3,4)$为刚度系数。

按照矩阵表示法，可将式(1-1)写成

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} \\ Q_{11} \\ P_{12} \\ Q_{12} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

或简记为

$$\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{F}_1 \tag{1-3}$$

刚度系数 k_{ij} 物理意义如下。若令式(1-1)或式(1-2)中的 $u_1=1, v_1=u_2=v_2=0$，则可得

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ Q_{11} \\ P_{12} \\ Q_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{Bmatrix} \tag{1-4}$$

即当节点 1 沿 x 方向产生单位长度的位移，而其余节点位移为零时，各节点作用于单元①上的力。这些力组成一个平衡力系，表示单元①抵抗位移 u_1 刚度。

如图 1-2 所示，单元①的长度将缩短 $\Delta l_1 \approx \cos\theta$，所需要的轴向压力为

$$\frac{EA\Delta l_1}{l_1} = \frac{EA\cos\theta}{l_2} \tag{1-5}$$

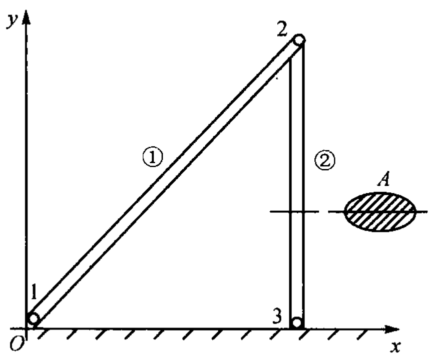


图 1-1　桁架结构

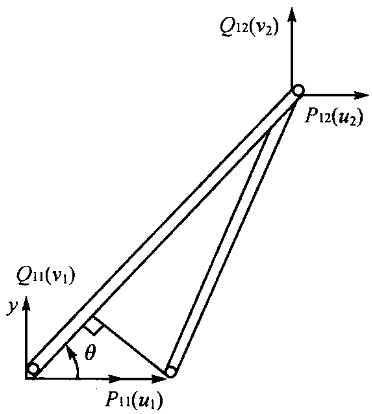


图 1-2　单元①在 $u_1=1, v_1=u_2=v_2=0$ 下的变形

根据几何关系，该力在 x 和 y 方向的分量分别是

$$k_{11} = \frac{EA\cos^2\theta}{l_1}$$

$$k_{21} = \frac{EA\cos\theta\sin\theta}{l_1}$$

在节点 2 处有大小相等、方向相反的力，因而

$$k_{31} = -\frac{EA\cos^2\theta}{l_1}$$

$$k_{41} = -\frac{EA\cos\theta\sin\theta}{l_1}$$

同样，对于 v_1，u_2 和 v_2 可做类似的分析，容易得到式(1-3)中 $\boldsymbol{K}_1$ 阵中其他各元素的值。将分析演算的结果汇集，可得到单元①的刚度矩阵为

$$[\boldsymbol{K}_1]=\frac{EA}{l_1}\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{1-6}$$

同理,对单元②进行分析,可得到与式(1-2)和式(1-3)相似的关系式,并整理得

$$\frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{21} \\ Q_{21} \\ P_{22} \\ Q_{22}\end{bmatrix} \tag{1-7}$$

或简记为

$$\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{F}_2 \tag{1-8}$$

完成了单元分析后,现在要将两个单元的力和位移关系式(1-3)和式(1-8)组合成整个结构的力和位移关系。组合时按两条规则进行:一是位移一致,二是节点力合成。例如节点2,在分析单元①和单元②时都用到其节点位移 u_2 和 v_2,实际是一组位移,这是位移一致;而节点力应该合成,即在节点 2 相关单元的合力作用下产生位移 u_2 和 v_2,记为

$$P_2=P_{12}+P_{21}=\frac{EA}{l_1}(-\cos^2\theta u_1-\cos\theta\sin\theta v_1+\cos^2\theta u_2+\cos\theta\sin\theta v_2)$$

$$Q_2=Q_{12}+Q_{21}=\frac{EA}{l_1}(-\cos\theta\sin\theta u_1-\sin^2\theta v_1+\cos\theta\sin u_2+\sin^2\theta v_2)+\frac{EA}{l_2}(v_2-v_3)$$

对于只涉及一个单元的节点力,有 $P_1=P_{11}, Q_1=Q_{11}, P_3=P_{22}=0, Q_3=Q_{22}$。整个结构的力与位移的关系组合后写成矩阵形式为

$$EA\begin{bmatrix}\cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1+1/l_2 & 0 & -1/l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \\ P_3 \\ Q_3\end{Bmatrix} \tag{1-9}$$

或简记为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F} \tag{1-10}$$

式中,$\boldsymbol{K}$ 为结构的总体刚度矩阵。

不难看出,式(1-9)方阵中左上方虚线框出的 4×4 子块正是单元①的刚度矩阵,右下方虚线框出的 4×4 子块是单元②的刚度矩阵,两者重叠的部分是同一位置上两单元刚度矩阵的元素之和。

结构的总体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有一些重要的特性，如根据马克斯威尔互换定理可以证明，$\boldsymbol{K}$ 是一个对称矩阵，且对角线上主元素 k_{ii} 总是非负的，否则作用力的方向将与它引起的对应位移的方向相反。此外，方程组(1-9)还不能立即求解，根据行列式性质可知，$\boldsymbol{K}$ 的行列式值为零，故 $\boldsymbol{K}$ 为奇异阵，其物理原因是，结构的几何约束没有加上，可能产生刚体位移。只要加上几何边界条件，对刚度矩阵进行适当的修改，排除刚体位移后才能解出全部位移分量。

通过这一简例，可以建立起有关刚度矩阵及其物理意义等概念，也可对有限元解题方法有一个初步印象。随着有限元方法的不断发展和完善，更多的、更深入的应用则是对连续体的分析和计算，当然，连续体的有限元分析比桁架的分析要复杂。

1.2.2 有限元法解题步骤

有限元分析的方法随着实际问题的不同有很大的差异，但就分析过程而言，一般可以分为以下几个步骤。

1. 结构离散化

结构离散化，简单地说，就是将分析的对象划分为有限多个单元体，并在单元体的指定点设置节点，把相邻的单元体连接起来组成单元的集合体，以代替原来的结构。

如果分析对象是与 1.2.1 节给出简例中类似的桁架，则划分的方法很明显，取每一根杆作为一个单元最为合理、方便。如果分析的对象是连续体，那么怎样划分单元就成为有限元分析首先遇到的问题。为了有效地逼近实际的连续体，就要合理选择单元的形状，确定单元数目和划分方案等。

对于连续体结构的离散，需要人为地设置一些节点，节点与节点之间的连线将成为单元的边界。设置节点和划分单元一般应做到以下几点。

① 集中载荷的作用点、分布载荷强度的突变点、分布载荷与自由边界的分界点以及支承点都应该取作节点。

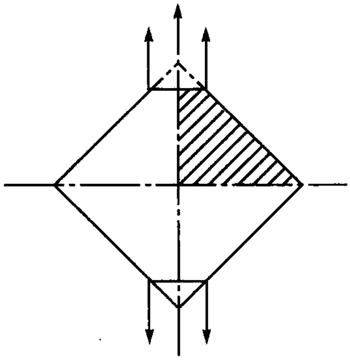
② 如果物体的厚度有突变或者由不同材料组成，在布置节点时不要把不同厚度或不同材料的物体划分在同一单元，要保证物性的单一性。

③ 情况相同区域的节点的布置尽可能均匀，使单元的各边长之差尽可能小，节点的多少或单元的大小是根据精度需要和计算机容量的大小确定的。

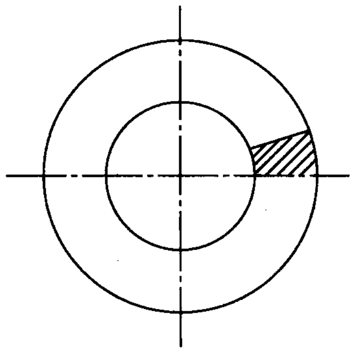
④ 要在保证精度的前提下采用较小的单元来描述分析对象，在应力变化急剧的区域将单元划小，而应力平缓变化区则可用大一点的单元。

结构离散化是有限元分析的第一步，它实际上涉及整个分析计算方案的确定。例如对称性的利用，在划分单元时，甚至在此之前就要考虑分析对象是否属于对称或反对称情况，确定计算中应取整个结构，还是取部分结构作为计算模型。如图 1-3 所示，图 1-3(a)中方板对角拉伸可取其四分之一；图 1-3(b)所示圆环的分析可取一个扇面。

结构离散化方案确定后，还要对节点进行编号。编号时有两点值得注意，如下。



(a) 方板对角拉伸



(b) 圆环

图 1-3　结构对称性的利用

① 尽量使同一单元的相邻节点的号码差最小，以利于缩小刚度矩阵的带宽（非零元素带宽），从而节约计算机内存；

② 在排列各单元所关系的节点时应按逆时针转向编排，以避免单元面积计算（特别是平面问题）时出现负值。

2. 选择位移模式

有限元分析的主要目的是计算出结构的应力、应变和位移，但在基本方程中，如式(1-9)中只有节点处的位移作为未知量。为了能用节点位移表示单元内任一点处的位移，必须对整个单元内位移的分布做出一定的假设，即必须假设位移是坐标的某种简单的函数，这种函数就称为位移模式，也称位移函数。

位移模式是指单元内位移（应变）分布状态，事先并不知道，合理地选择一种函数来逼近这种分布是有限元分析计算过程中关键性的一环。在实际应用中普遍采用的是多项式函数，这是因为多项式函数的数学运算（如微分和积分）比较方便，而且所有光滑函数的局部都可以用多项式来逼近，即不完全的泰勒级数。关于多项式的项数和阶次，要根据单元的自由度和有关解的收敛性等要求来确定。一般地说，多项式的项数应等于单元的自由度数，它的阶次至少应包含常数项和线性项。

按选定的位移模式，可以导出用节点位移表示单元内任一点位移的关系式，其矩阵形式为

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}^{e} \tag{1-11}$$

式中，$\boldsymbol{d}$ 为单元内任一点的位移列阵；$\boldsymbol{q}^{e}$ 为单元的节点位移列阵；$[\boldsymbol{N}]$为形函数矩阵，它的元素是位置坐标的函数；e 为单元序号。

3. 单元力学特性分析

单元的力学特性分析主要包括 3 部分的内容。

① 利用几何方程中的应变与位移关系，由位移表达式(1-11)导出用节点位移表示单元应变的关系式，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{q}^e \tag{1-12}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为单元内任一点的应变列阵；$\boldsymbol{B}$ 为单元应变阵。

② 利用物理方程，即应力应变关系 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ 及应变与位移关系式(1-12)可导出用节点位移表示单元应力的关系式，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}^e \tag{1-13}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为单元内任一点的应力列阵；$\boldsymbol{D}$ 为与材料性能相关的矩阵。在弹性范围内它表示的是广义虎克定律。

③ 按照虚功原理建立作用于单元上的节点力与节点位移的关系，即单元的刚度方程，记为

$$\boldsymbol{R}^e = \boldsymbol{K}^e\boldsymbol{q}^e \tag{1-14}$$

式中，$\boldsymbol{R}^e$ 为作用在单元上的节点力；$\boldsymbol{K}^e$ 为单元刚度矩阵。

4. 等效节点力的计算

结构离散化后，假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元的，这种假定的传力方式实际上只符合桁架结构的情况；对于连续体，力的传递是在相邻单元的公共边界上实现的。因此，对于一个单元来说，边界上的力需要等效移置到节点上来。

力的作用方式可以分为点、线、面和体四种。在结构离散化时，已将集中载荷作用点定为节点，也就是说，点力都已经在节点上了。线力、面力、体力则需要等效移置到节点上去，这就是计算等效节点力所需要完成的工作。移置的方法是按照虚功等效的原则进行的，即作用在单元上的力(线、面、体)与等效节点力在任何虚位移上的虚功都相等。

5. 建立总体平衡方程

在单元的力学分析中，已经建立了单元刚度方程，如式(1-14)。整个结构被划分成若干个单元，当然有若干个形同式(1-14)的单元刚度方程。现在需要把这有限多个方程按照一定规则组合到一起，建立结构的总体平衡方程。

建立总体平衡方程的主要内容是组成和修正总体刚度矩阵，当然也包括节点载荷列阵及节点位移列阵的相应的组成。

组成总体刚度矩阵最常用的方法是直接刚度法。组合的依据是，要求所有相关的单元在它们的公共节点处具有完全相等的位移值。

一般情况下，上述组合所得到的刚度矩阵都是奇异的。从数学上说，它对应的行列式值为零，所构成的方程组不能直接求解；从物理意义上说，它包含了结构的刚体位移，位移值不能确定。因此，要根据边界约束条件排除刚体位移，即指定某些已知的节点位移值，如某些固定的节点位移值为零，然后对相应的刚度矩阵做适当的修改而使之成为非奇矩阵。

对单元载荷列阵和节点位移阵进行组合，构成整个结构的节点位移列阵和载荷列阵。于