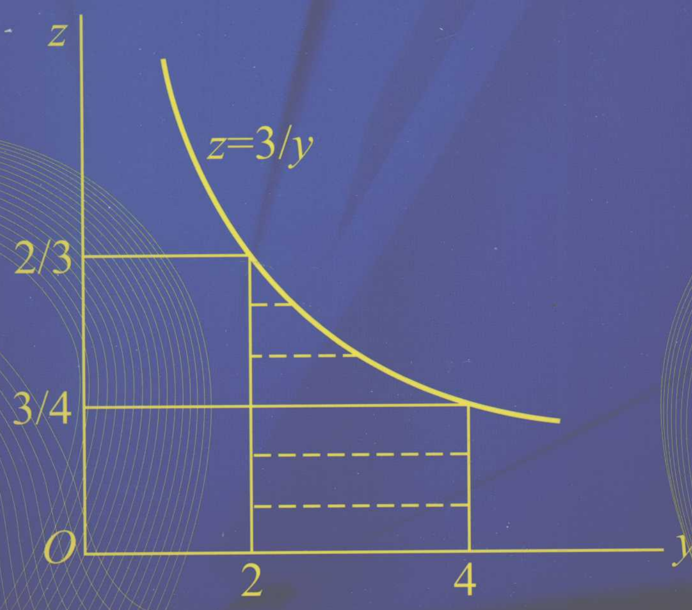
21世纪

高等学校工科数学系列辅导教材

概率论与数理统计学习指导与习题解析

李阳 苗晨 魏晓丽 姜凤利 等编著



化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学系列辅导教材

概率论与数理统计
学习指导与习题解析

李阳　苗晨　魏晓丽　姜凤利　等编著
聂宏　赵恒华　主审

化学工业出版社
·北京·

本书内容紧扣教学大纲，并与浙江大学《概率论与数理统计》教材相配套，主要包括概率论内容五章，数理统计内容三章，每章包括知识要点概要、例题精析、重要知识和方法的注解和释疑解难。书中习题难易结合，有助于读者开拓思路加深理解。书后附有五套自测题，并给出参考答案。

本书可作为高等学校工科、管理、财经及非数学类的理科专业的参考用书，也可供工程技术人员或科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导与习题解析/李阳等编著.
北京：化学工业出版社，2008.6
（21世纪高等学校工科数学系列辅导教材）
ISBN 978-7-122-02969-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第075978号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：周永红
责任校对：吴　静　　装帧设计：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 $10\frac{1}{2}$　字数260千字　　2008年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：18.00元

序

在工程问题中，随时都会产生数量关系和相互作用，而这正是数学所研究的重要内容。数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，反映这种内在数量关系的过程就是数学模型。数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的。微积分、线性代数等是其建模的基本数学工具。第二类为随机性模型，其所反映的实际问题具有偶然性或随机性。概率论与数理统计以及随机过程是其建模的基本数学方法。第三类为模糊性模型，该模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性。模糊数学理论是其建模的基本数学手段。

对工科高等学校各专业本科生而言，公共数学基础课程一般包括“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课程，它们都是必修的重要基础理论课程。通过这些课程的学习，学生可以掌握这三门课程的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。在学习过程中，通过数学知识与其实际应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力，综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力。

近年来随着普通高校教育规模的不断扩大，受教育群体的不同层次对数学的学习也提出了不同的要求，因此出版一套有针对性的辅助教材就显得十分必要。尽管目前数学教学辅助资料很多，但真正符合现在大学生学习数学需求的资料并不多。因此，辽宁石油化工大学理学院数学系的广大教师结合他们多年的教学经验，编写了这套数学辅导系列教材，以期帮助初学大学数学的学生学好数学基础课程。

这套数学辅导系列教材包括《高等数学学习指导与习题解析》、《线性代数学习指导与习题解析》、《概率论与数理统计学习指导与习题解析》，书中内容完全按照教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”所编写。该系列教材吸收了国内外同类辅导教材的精华，特别是采纳了近几年一批“面向21世纪课程”教材中的习题，同时也凝结了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验，总结了历年数学考研辅导班中学生反映的共性问题。编写中充分考虑了工科数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，以及与后续课程的衔接。本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，做到了科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一。注重理论联系实际，通过实际例题展示数学方法在工程领域中的应用。

本系列辅导教材在体系与内容编排方面，认真考虑了工科学生数学教材多采用同济大学《高等数学》、《线性代数》以及浙江大学《概率论与数理统计》的情况，为便于学习，本系

列辅导教材所列章节与之相配套。同时考虑到学生不同群体对数学学习的不同需求，书中所选择的习题对学有余力的同学可试做教材的全部练习题，其他同学可以根据自身的实际学习能力选择适当练习题试做。每章后面配备了练习题以及习题参考答案，书后给出了几套自测题及参考答案，供读者参考。

数学基础知识和基本方法的训练，是能力训练的主要手段，也是各类不同专业教学的迫切需要。相信这套系列辅导教材在具体的使用过程中应该获得成功，学习者的渴望会得到满足，教育者的愿望会得以实现。

吕方

2008 年 3 月于辽宁大学

前　言

“概率论与数理统计”课程是研究随机现象统计规律性的数学分支。随着现代科学技术的迅猛发展，“概率论与数理统计”的理论与方法已广泛地应用于许多科学领域，诸如工业、农业、医药、卫生等国民经济各个部门。“概率论与数理统计”是学习现代科学技术的重要理论基础，是高等学校理工科、经济、管理等专业重要的基础课程之一。

本书是与浙江大学《概率论与数理统计》相配套的辅导书。书中融入了作者多年教学实践中的经验体会，旨在帮助初学者尽快理解这门课程的基本理论，掌握其思维方式和解题技巧，培养分析问题和解决问题的能力。

本书以教材内容为主线，共分八章。内容包括：随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验。每章包括以下四个部分。

(1) 内容提要。简要列出了各章的基本概念、重要定理和结论。在内容综述上做到简练准确，科学规范，便于读者学习时掌握课程内容。

(2) 典型例题。每章都列举了大量的典型例题，并给出了详细的解答过程。通过这些典型例题的示范作用，指导学生掌握各类习题的解题方法，学会分析随机问题的思维方法，并逐步培养起独立分析和解决随机问题的能力。

(3) 练习题。每章还列出了各类考试中经常出现的试题，通过试做这些练习题，帮助学生掌握课程学习中的知识要点与解题方法。

(4) 练习题参考答案。为使学生更好地掌握每章重点内容，检验学习效果，我们给出了练习题的参考答案或提示，以巩固和提高学生解答各类随机问题的能力。

书后附有五套自测题，并给出参考答案，以便学习后自我测试。

本书第一章及第五章由魏晓丽编写，第二章和第六章由姜凤利编写，第三章、第四章和自测题由李阳编写，第七章和第八章由苗晨编写。全书由李阳组稿，宋岱才、路永洁教授修改定稿，聂宏、赵恒华教授主审。

在书稿完成的过程中，得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。本书编写时，编者参考了大量的资料和教材，在此谨向有关作者表示感谢!

由于编写时间仓促，难免有不足之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2008 年 3 月

目 录

第一章　随机事件和概率

一、内容提要

(一) 基本概念

定义 1　随机试验：(1) 相同条件下可重复试验；(2) 每次试验结果不唯一；(3) 试验的全部可能结果已知，但试验之前不知哪一个结果出现.

定义 2　样本空间：随机试验所产生可能结果的全体，一般记为 S. S 中的元素称为样本点，也称为基本事件. 样本点的集合称为随机事件，简称事件. 样本空间 S 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是样本空间 S 中的随机事件，它们之间的关系及运算如下.

定义 3　包含关系：$A\subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

定义 4　相等关系：$A=B$ 表示事件 A，B 相互包含.

定义 5　和事件：(1) 两个事件的和事件 $A\cup B$，表示事件 A,B 至少有一个发生；(2) 多个事件的和事件 $\bigcup\limits_k A_k$，表示事件 A_k 中至少有一个发生.

定义 6　积事件：(1) 两个事件的积事件 $A\cap B$ 或 AB，表示事件 A，B 同时发生；(2) 多个事件的积事件 $\bigcap\limits_k A_k$，表示事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 同时发生.

定义 7　差事件：$A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

定义 8　不相容（或互斥）事件：若事件 A，B 不同时发生，即如有 $AB=\varnothing$，则称事件 A，B 为不相容事件或互斥事件.

定义 9　互逆（或对立）事件：如有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A，B 为互逆（或对立）事件，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

(二) 事件的性质

1. 事件关系的性质

$A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$；$A\cup A=A$；$A-B\subset A$；$A-B=A\overline{B}$；$(A-B)\cup A=A$；$(A-B)\cup B=A\cup B$；$(A-B)\cap B=\varnothing$；$\overline{\overline{A}}=A$；$A\cup\overline{A}=S$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；$A\cap A=A$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cup S=S$；$A\cap S=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

2. 事件的运算性质

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4) De Morgan 对偶定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{\bigcup\limits_k A_k}=\bigcap\limits_k\overline{A}_k$；$\overline{\bigcap\limits_k A_k}=\bigcup\limits_k\overline{A}_k$.

(三) 事件的概率及其计算

1. 概率的定义

概率的定义是公理化的，即 P 是从 S 的子集族到$[0,1]$上的一个映射，若满足以下三个条件：

① $P(A)\geqslant 0$；② $P(S)=1$；③ 若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$，有 $P(\bigcup_k A_k)=\sum_k P(A_k)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2)（有限可加性）若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，一般的，若 $A\not\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB);$$

(5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 且

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. 等可能概型

特征：每个样本点被取到的可能性相等.

(1) 古典概型.

特征：样本空间是有限集，每个基本事件发生的可能性相同. 其计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中样本点数}}{S\text{ 中样本点数}}.$$

计算古典概型的基本公式是排列组合公式.

(2) 几何概型.

特征：样本空间是 n 维欧氏空间的子集，且每个样本点的取得具有等可能性. 其计算公式为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}.$$

其中，$\mu(A),\mu(S)$ 分别表示 A 及 S 在 R^n 中的度量，如长度、面积、体积等.

4. 加法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，若第 i 类方法包含 m_i 种方法，则 A 共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法出现.

5. 乘法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，另一事件 B 对每一种 A 的出现方法又有 m 种不同的方法出现，则事件 AB 以 nm 种不同的方法出现.

（四）条件概率与事件的独立性

定义 10 条件概率：设 A，B 是两个事件，若 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

定义 11 事件的独立性：若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 相互独立. 这时，显然以下三对事件：

$$\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$$

也两两独立.

当 $P(A)>0$ 时，A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$.

若对任意的 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件.

注：① $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件时，定义中共有 (2^n-n-1) 个等式.

② $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，反之不然.

（五）重要公式

1. 乘法公式

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3)P(A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

2. 概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，有 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$.

3. 贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，若 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n.$$

注意：① 贝叶斯公式是条件概率与全概率公式相结合的产物，其证明过程必须记住.

② 使用贝叶斯公式的关键是找到划分 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$.

（六）可靠性问题

设每个元件独立，第 i 个元件正常工作的概率为 p_i，$i=1,2,\cdots,n$. 若一个系统由 n 个元件组成，则有：

（1）串联系统：可靠度为 $\prod_{i=1}^{n}p_i$.

（2）并联系统：可靠度为 $1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$.

特殊的，若元件结构相同，就有 $p_i=p$，$i=1,2,\cdots,n$，则串联系统的可靠度为 p^n，并联系统的可靠度为 $1-(1-p)^n$，进而可以计算混联系统的可靠度.

二、典型例题

（一）单项选择题

【例 1】 投掷一枚骰子，设 $A=$“出现点数不超过 3”，则称 A 为______.

（A）不可能事件 （B）基本事件 （C）必然事件 （D）随机事件

解 $A=\{1,2,3\}$，它不是空集，故不选（A），不是单点集，故不选（B），A 也不是全集，故不选（C），A 可能发生也可能不发生，符合随机事件的定义，故应该选（D）.

【例 2】 下列各组事件中，互为对立事件的是______.

（A）$A=$“抽到的三个元件完全合格”，$B=$“抽到的三个元件全不合格”

(B) $A=$“抽到的三个元件中合格品不少于1个”，$B=$“抽到的三个元件中合格品不多于1个”

(C) $A=$“抽到的三个元件全不合格”，$B=$“抽到的三个元件至少一个合格”

(D) $A=$“抽到的三个元件中有2个不合格”，$B=$“抽到的三个元件中有2个合格”

解 对立事件的标准是交集为 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，故应该选 (C).

【例3】 设 A,B 是样本空间 S 中的随机事件，则 $(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示______.

(A) 不可能事件 (B) A,B 恰有一个发生 (C) 必然事件 (D) A,B 不同时发生

解 根据集合运算的性质，$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing\cup(A\overline{B})\cup(B\overline{A})\cup\varnothing$，它表示 A 发生且 B 不发生，或者，B 发生且 A 不发生，故应该选 (B).

【例4】 设 A,B 是随机事件，且 $P(AB)=0$，则下列命题正确的是______.

(A) A,B 互斥 (B) AB 是不可能事件

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ (D) AB 不一定是不可能事件

解 $AB=\varnothing\Rightarrow P(AB)=0$，反之未必. 如：做连续区间上取点的试验，设 A,B 都表示恰好取到中点，由几何概率知，$P(AB)=0$，但是 $AB\neq\varnothing$，故 (A)、(B) 不对. 再如：进行投一枚硬币的试验，$A=$“正面向上”，$B=$“反面向上”，满足 $P(AB)=0$，但是，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，故 (C) 不对. 综上所述，应该选 (D).

【例5】 假设 $B\subset A$，则下列命题正确的是______.

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)$ (B) $P(\overline{A}-\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{B})$

(C) $P(B|A)=P(B)$ (D) $P(A|\overline{B})=P(A)$

解 由 $B\subset A$ 知 $\overline{B}\supset\overline{A}$，故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})=1-P(A)$，(A) 正确，(B) 不对.

$P(B|A)=P(AB)P(A)=P(B)P(A)$，(C) 不对；$P(A|\overline{B})=P(A\overline{B})P(\overline{B})\leqslant P(A)$，(D) 也不对. 答案为 (A).

【例6】 设 A,B 是随机事件，$B\subset A$，且 $P(A)\neq P(B)$，$P(B)>0$，则下列命题正确的是______.

(A) $P(B|A)=1$ (B) $P(B|\overline{A})=1$ (C) $P(A|B)=1$ (D) $P(A|\overline{B})=0$

解 由 $B\subset A$ 知 $AB=B$，$P(AB)=P(B)$，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，答案为 (C).

【例7】 设 A,B 是随机事件，$B\supset A$，且 $P(B)>0$，则下列命题正确的是______.

(A) $P(A)<P(A|B)$ (B) $P(A)\leqslant P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$ (D) $P(A)\geqslant P(A|B)$

解 由 $B\supset A$ 知 $AB=A$，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$，答案为 (B).

【例8】 设 A,B,C 是随机事件，且有 $P(C|AB)=1$，则下列命题正确的是______.

(A) $P(AB)=P(C)$ (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(A\cup B)=P(C)$ (D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

解 由条件概率公式，$P(C|AB)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=1$，得 $P(AB)=P(ABC)$，$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，$P(ABC)\leqslant P(C)$，就有 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$，答案为 (B).

【例9】 $P(A)=p_1$，$P(B)=p_2$，$P(A\cup B)=p_3$，则为 $P(A\overline{B})=$______.

(A) p_1-p_2　(B) p_3-p_2　(C) $p_1(1-p_2)$　(D) p_2-p_1

解　$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A\cup B-B)=P(A\cup B)-P(B)$，答案为 (B).

【例 10】　设 A,B,C 是两两独立且不能同时发生的随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=x$，则 x 的最大值为______.

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解　考虑式 $P(AB\cup AC\cup BC)$，而

$$P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)+P(ABC)$$
$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)=3x^2,$$

而 $P(AB\cup AC\cup BC)\leqslant 1$，故答案为 (D).

(二) 解答题

【例 11】　写出下列随机试验的样本空间.

(1) 记录一个小班一次高等数学考试的平均分数（百分制）.

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

(5) 同时投掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和.

(6) 将一尺之棰折成三段，观察各段长度.

解　(1) $S=\left\{\frac{i}{n}\,\middle|\, i=0,1,2,\cdots,100n\right\}$，其中 n 为小班人数.

(2) $S=\{x\mid x\geqslant 10, x\in I\}$，其中 I 为正整数集合.

(3) $S=\{00,100,0100,1100,1010,0101,0110,1110,1011,1101,0111,1111\}$，其中 0 表示次品，1 表示正品.

(4) $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

(5) $S=\{3,4,\cdots,18\}$.

(6) $S=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x>0, y>0, z>0\}$，其中 x,y,z 分别表示所折三段长度.

注意：人们不能事先确定试验的哪一个结果发生，但是可以事先知道所有可能的结果，它们的集合就是样本空间，它是计算概率的前提.

【例 12】　设 A,B,C 是三个事件，试将下列事件用 A,B,C 的运算表示出来.

(1) 仅 A 发生；(2) A，B 发生，但 C 不发生；(3) 三个事件不都发生；(4) 三个事件至少一个发生；(5) 三个事件至多一个发生；(6) 三个事件都不发生；(7) 三个事件不多于一个发生；(8) 三个事件恰有一个发生；(9) 三个事件恰有两个发生；(10) 三个事件至少两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；　(2) $AB\overline{C}$；　(3) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；　(4) $A\cup B\cup C$；(5) $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$；(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；(7) $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；(8) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；(9) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；(10) $AB\cup AC\cup BC$.

【例 13】　设 A,B 是两个事件，那么事件“A,B 都发生”，“A,B 不都发生”，“A,B 都不发生”中，哪两个是对立事件？

解　上述三个事件可以表示为 AB，$\overline{AB}$，$\overline{A}\,\overline{B}$，显然，$AB$ 与 $\overline{AB}$ 是对立事件.

【例 14】　比较下列概率的大小.

$P(B)$；$P(A\cup B)$；$P(AB)$；$P(A)+P(B)$，其中，$P(A)>0,P(B)>0$.

解 因为 $AB\subset B\subset A\cup B$，就有 $P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B)$，另外，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$.

【例 15】 设 A,B 是两个事件，满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

解 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，$P(B)=1-p$.

【例 16】 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 全不发生的概率为______，A,B,C 至少有一个发生的概率为______.

解 A,B,C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right]=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

A,B,C 至少有一个发生的概率为 $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\dfrac{5}{8}$.

【例 17】 求证：对任意事件 A,B 有 $P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.

证明

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+\\&\quad P(AB)P(AB)\\&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]=P(A)P(B).\end{aligned}$$

【例 18】 设 $P(A)=p$，$0<p<1$，$P(B)=1-\sqrt{p}$，求证：$P(\overline{A}\,\overline{B})>0$.

证明

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\geqslant 1-p-(1-\sqrt{p})=\sqrt{p}(1-\sqrt{p})>0.\end{aligned}$$

【例 19】 袋子中有 7 只红球，5 只白球，不放回地陆续取出 3 只，求：

(1) 顺序为红、白、红的概率；(2) 有 2 只红球的概率.

解 (1) 样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的排列 P_{12}^3，以 A 表示所求事件，A 中共有 $7\times5\times6$ 个样本点，故

$$P(A)=\frac{7\times5\times6}{12\times11\times10}=0.1591.$$

(2) 不放回地陆续取出 3 只，有 2 只红球，与取球的顺序无关. 以 B 表示所求事件——2 只红球且 1 只白球，B 中共有 $C_7^2C_5^1$ 个样本点，样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的组合数 C_{12}^3，故

$$P(A)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}=0.4773.$$

【例 20】 n 对新人参加婚礼，现进行一项游戏：随机地把人分为 n 对，问每对恰为夫妻的概率是多少？

解 把这 $2n$ 个人，从左到右排成一排，共有 $(2n)!$ 种排法. 处在第 1、2 位的作为一对夫妻，第 3、4 位的作为一对夫妻，如此类推. 第一位可有 $2n$ 种排法，第二位只有 1 种排法，第三位有 $2n-2$ 种排法，第四位只有 1 种排法，如此类推. 故满足要求的排法总数是 $2n(2n-2)(2n-4)\cdots2=2^nn!$，以 A 表示所求事件，所以 $P(A)=\dfrac{2^nn!}{(2n)!}=0.1591$.

【例 21】 袋子中有 n_1 只白球，n_2 只黑球，n_3 只红球，从中任取 m 只，其中白球、黑球、红球分别为 m_1, m_2, m_3 的概率是多少？

解 以 A 表示所求事件——取到白球、黑球、红球分别为 m_1, m_2, m_3，取法共有 $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} C_{n_3}^{m_3}$ 种，样本空间中共有 $C_{n_1+n_2+n_3}^{m_1+m_2+m_3}$ 个样本点. 因此

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} C_{n_3}^{m_3}}{C_{n_1+n_2+n_3}^{m_1+m_2+m_3}}.$$

【例 22】 某市的电话号码由 8 位数构成，设 0～9 这 10 个数字在每位数中出现是等可能的. 求以下概率：(1) 8 位数全不同的概率；(2) 至少 2 个数字相同的概率；(3) 恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同的概率.

解 (1) 8 位数全不同的概率 $p_1=\frac{P_{10}^{8}}{10^8}=0.0181$；

(2)“至少 2 个数字相同”与“8 位数全不同”是对立事件，故概率为

$$p_2=1-p_1=0.9819;$$

(3) 要满足事件“恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同”，可以这样安排：从 8 位中任意取两个位置，有 C_8^2 种取法；从 0～9 这 10 个数字任意取一个数字，有 C_{10}^1 种取法，放在这两个位置上；其余 6 个位置由其他 9 个数字作全排列，得

$$p_3=\frac{C_8^2 \cdot C_{10}^1 \cdot P_9^6}{10^8}=0.1693.$$

【例 23】 口袋里有两个 5 角、三个 2 角、五个 1 角的硬币共 10 枚，从中任取 5 枚，求总值超过 1 元的概率.

解 样本点总数为 C_{10}^5，以 A 表示所求事件——取 5 枚且总值超过 1 元，A 发生，包含两种情况：(1) 取两个 5 角，其余三个任意取，取法总数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3=56;$$

(2) 取一个 5 角，要达到总值超过 1 元的要求，还至少要有两个 2 角，其他两枚任意取，取法总数为

$$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=70.$$

这样，事件 A 中样本点总数为 $56+70=126$，$P(A)=\frac{126}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$.

【例 24】 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

解法 1 样本点总数为 P_{10}^4，设 $A=$“4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”，考虑对立事件 $\overline{A}=$“4 只鞋子都不构成一双”. 第一只鞋子可从 10 只中任取一只，有 10 种取法；第二只鞋子从余下的 8 只中任取一只，有 8 种取法；第三只鞋子从余下的 6 只中任取一只，有 6 种取法；同理，第四只鞋子 4 种取法，故 $\overline{A}$ 中共包含了 $10\times8\times6\times4$ 个样本点，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

解法 2 $\overline{A}=$“4 只鞋子都不构成一双”也可以这样考虑：从 5 双不同的鞋子中任取 4 双，再从每双中任取一只，可得 $\overline{A}$ 中样本点数为 $C_5^4\cdot2^4$，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4\cdot2^4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【例 25】 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中，白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运

过程中，所有标签脱落，交货人随意将这些油漆交给顾客．问一个订货 4 桶白漆，3 桶黑漆，2 桶红漆的顾客能按所定颜色如数得到货的概率是多少？

解 从 17 桶中选 9 桶的方法总数为 C_{17}^{9}，顾客获得 4 桶白漆、3 桶黑漆、2 桶红漆的方法分别是 C_{10}^{4}，C_{4}^{3}，C_{3}^{2}，故所求概率为

$$\frac{C_{10}^{4}\cdot C_{4}^{3}\cdot C_{3}^{2}}{C_{17}^{9}}=\frac{252}{2431}.$$

【例 26】 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个，求 (1) 恰有 90 个次品的概率；(2) 至少有 2 个次品的概率．

解 样本点总数为 C_{1500}^{200}．

(1) 设 $A=$ “恰有 90 个次品”，它的样本点数为 $C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}$，于是

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}.$$

(2) 设 $B=$ “至少有 2 个次品”，$\overline{B}=$ “没有次品或有 1 个次品”，$\overline{B}$中样本点数为

$$C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}$$

因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

【例 27】 已知 $P(B)=0.3$，$P(\overline{A}|B)=0.2$，$P(A|\overline{B})=0.75$，求 $P(B|A)$．

解
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{(1-0.2)\times 0.3}{(1-0.2)\times 0.3+0.75\times(1-0.3)}=0.3137.$$

【例 28】 甲、乙两人独立地向同一靶子射击一次，其命中率分别为 0.7，0.8，若已知靶子被击中，求它只是被甲击中的概率．

解 设 $A=$ “甲击中靶子”，$B=$ “乙击中靶子”，因两个人独立射击，故 A,B 独立，于是 $P(AB)=P(A)P(B)=0.56$．又由题意知，这是一个条件概率，进而

$$P(A\overline{B}|A\cup B)=\frac{P(A\overline{B})\cap(A\cup B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$
$$=\frac{0.7\times 0.2}{0.7+0.8-0.7\times 0.8}=0.1489.$$

【例 29】 袋子中有 4 只红球，3 只白球，某人有放回地陆续取出 3 只，每次 1 只球，已知至少出现一次红球，求至少出现两次红球的概率．

解 设事件 $A=$ “至少出现一次红球”，$B=$ “至少出现两次红球”，样本点总数为 7^3，

$$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-\frac{P(A\overline{B})}{P(A)},$$

事件 $A\overline{B}$表示“至少出现一次红球”且“至多出现一次红球”，即 $A\overline{B}=$ “恰好出现一次红球”，它的取法数为 $C_{4}^{1}\cdot C_{3}^{1}\cdot 3^2$．$\overline{A}=$ “出现的都是白球”，它的取法数为 3^3．因而

$$P(B|A)=1-\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{(C_{4}^{1}\cdot C_{3}^{1}\cdot 3^2)/(7^3)}{1-(3^3)/(7^3)}=1-\frac{0.3149}{0.9213}.$$

【例 30】 一盒电子元件有 10 只，其中 7 只正品，3 只次品，从中不放回地抽取 4 次，每次 1 只，求第一、二次取得次品且第三、四次取得正品的概率．

解 设 $A_i=$ “第 i 次取得正品”($i=1,2,3,4$)，由条件概率有

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4)&=P(A_4\mid\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\
&=P(A_4\mid\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)\\
&=\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{20}.
\end{aligned}
$$

【例 31】 某厂仓库存有 1,2,3 号箱子分别为 10,20,30 个，均装有某产品．其中，1 号箱内装有正品 20 件，次品 5 件；2 号箱内装有正品 20 件，次品 10 件；3 号箱内装有正品 15 件，次品 10 件．现从中任取一箱，再从箱中任取一件产品，问：(1) 取到正品及次品的概率各是多少？(2) 若已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率．

解 (1) 设 A_i＝“取到第 i 号箱子”$(i=1,2,3)$，则 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 构成样本空间的一个划分，且

$$P(A_1)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6},\ P(A_2)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3},\ P(A_3)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

设 B＝“取得正品”，$\overline{B}$＝“取得次品”，则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{30}+\frac{1}{2}\times\frac{15}{25}=\frac{59}{90},$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{31}{90}.$$

(2) 已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率，这是一个条件概率问题．

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}}{\frac{59}{90}}=\frac{12}{59}.$$

【例 32】 商店里装箱子出售玻璃杯，每箱装 20 只相同型号的玻璃杯．设各箱中有 0,1,2 只残次品的概率为 0.8,0.1,0.1．顾客购买时，售货员任取一箱，由顾客随意从中抽取 4 只，若无残次品，则买下该箱．求：(1) 顾客买下该箱的概率．(2) 顾客买下该箱后，箱中无残次品的概率．

解 (1) 设 A_i＝“箱中有 i 只残次品”$(i=0,1,2)$，则 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 构成样本空间的一个划分，且 $P(A_0)=0.8$，$P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.1$．设 B＝“顾客买下该箱”，则

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.9432.$$

(2)
$$P(A_0\mid B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_0)P(A_0)}{P(B)}=\frac{0.8}{0.9432}=0.8482.$$

【例 33】 设有甲、乙、丙三名射手独立地向某一目标射击各一次，命中率分别为 0.2，0.3，0.5，目标被击中一发子弹而被击毁的概率为 0.2，目标被击中两发子弹而被击毁的概率为 0.6，目标被击中三发子弹而被击毁的概率为 0.9，求：(1) 三名射手射击一次击毁目标的概率；(2) 在目标被击毁的条件下，只有甲击中的概率．

解 (1) 设 A_i＝“目标被 i 发子弹击中”$(i=0,1,2,3)$，则 $\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$ 构成样本空间的一个划分，设 B_i＝“目标被第 i 名射手（甲、乙、丙）击中”$(i=0,1,2,3)$；设 C＝“击毁目标”，则

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(C\mid A_i).$$