面向21世纪课程教材

Linear Algebra

# 线性代数

（第二版）

贺铁山 张鸿亮 陈庆桢 编著

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

中山大学出版社

面向21世纪课程教材

# 线性代数

（第二版）

贺铁山　张鸿亮　陈庆桢　编著

中山大学出版社

·广州·

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/贺铁山，张鸿亮，陈庆桢编著. —2 版. —广州：中山大学出版社，2004.8

（面向 21 世纪课程教材）

ISBN 7-306-01785-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.①贺…　②张…　③陈…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 056593 号

责任编辑：周建华
封面设计：孔丽红
责任校对：舟　雨
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
　　　　　编辑部电话（020）84111996，84113349
　　　　　发行部电话（020）84111998，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传真：（020）84036565
印 刷 者：中山大学印刷厂
经 销 者：广东新华发行集团
规　　格：787mm×960mm　1/16　10.375 印张　214 千字
版次印次：2001 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 2 版　2004 年 8 月第 2 次印刷
定　　价：16.00 元　　印数：5001－14000 册

# 内容提要

本书是仲恺农业技术学院“面向21世纪教学内容与课程体系改革”的研究成果之一。全书共分五章，即线性方程组与矩阵、$n$阶行列式、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性代数的计算机解法。每章末配有习题，书未附有习题答案。

本书以矩阵的初等行变换为主线进行论述，突出了行列式在理论上的作用，简化了有关向量组线性相关性的理论，介绍了利用计算机求解线性代数问题的方法。在例题上适度引入了一些应用性的实例。

本书可作为高等农林院校各专业及其他院校相关专业的“线性代数”课程教材或教学参考书。

# 第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们这四年来的教学改革实践，按照新形势下教材改革的要求，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见，修订而成的。

这次修订，对第一章改动稍大，第二、三、四章也有改动，并增加了少量线性代数在农业技术、经济管理等方面的应用性例题和习题。此外，对第一版编写及排印中的错误作了改正，并对一些不很确切的文字叙述作了修改。

在本版的修订过程中，陈传勇、雷友发、严鸿鸣等同志提出了许多改进的意见，我们在此表示诚挚的谢意！

由于编者水平所限，本版中一定还存在不少错误和缺点，欢迎读者批评指正。

编著者

2004 年 5 月于广州

# 第一版序

我院按“以评促建，以评促改，评建结合，重在建设”的评价指导思想扎扎实实地进行了教学评价准备工作。通过评价工作，进一步端正了办学指导思想，规范了教学管理，加强了教学基本建设，提高了教学质量。1997 年 4 月，我院顺利通过了原国家教委组织的教学工作评价。评价之后，随即组织了教育思想观念转变的学习与讨论，开展了面向 21 世纪教学内容与课程体系的改革，确定了学科专业、人才培养模式、教学内容、教学方法、教学手段、教学保障等方面 24 个项目的教学研究。通过采取立项研究的方式，调动了广大教师投身教学改革的积极性，将转变教师的教育思想观念与教学内容、教学方法改革紧密结合起来，取得了实效。尤其在植物生产类专业教学内容与课程体系改革、基础课教学改革、“两课”教学改革、实践教学改革等方面，取得了比较明显的成效。教材建设与改革是教学改革的重要组成部分，也是教学改革的成果体现。我院注意根据本院实际，重视与加强教材建设与改革工作，组织了一批教师进行课程体系重组与教材编写工作。《线性代数》教材就是我院面向 21 世纪教学改革项目“农科线性代数教学内容与体系改革”的成果之一。几年来，贺铁山等在线性代数课程体系、教学内容、教学方法等方面进行了深入的探讨，开展了深入的研究，并经过了两轮的实践，在实践中进一步修改完善。以后将继续出版教学改革的有关成果。

我们期望这些教材的出版对推进我院教材建设、教学改革起到积极作用，也期望通过“抛砖引玉”，能够加强与兄弟院校的沟通，并得到兄弟院校的支持。

仲恺农业技术学院<br>教学委员会<br>2001 年 5 月 10 日

# 第一版前言

线性代数是应用非常广泛的数学分支，其理论与方法遍及自然科学与社会科学、工程技术、农业科技及经济等领域。进入21世纪，为了培养高素质的人才，教学改革正在不断地深入；基于我院立项的有关课题，经过多年的研究及实践，终于编成了本教材。

在编写过程中，我们特别注意到农学院这一层次的培养目标及学生的水平，力求使教材做到由浅入深，从具体到抽象；以矩阵为中心，以矩阵初等变换为主要方法。本教材具有如下几方面的特点：

(1) 以线性方程组为先导。开篇第一章首先介绍用消元法解线性方程组，并将消元过程规范化、程序化，这样可使学生从中学学过的代数知识平稳地、由浅入深地过渡到线性代数。

(2) 以矩阵的初等变换为主要手段。纵观线性代数的许多计算问题，如求逆矩阵、矩阵的秩、判别向量组的线性相关性及解线性方程组等都是用矩阵的初等变换来解决的。教材中突出了这一方法，从一开始就介绍它，先入为主地贯穿到整个教材中去。

(3) 突出了行列式在理论上的作用。为了使学生容易接受 $n$ 阶行列式的定义，采用简便的递推定义。淡化了元素为文字的 $n$ 阶行列式的计算，在第二章中将与行列式有关的一些重要内容，例如克莱姆法则、逆矩阵存在的充要条件、矩阵的秩及线性方程组有解的充要条件等集中在这一章中，旨在突出行列式在理论上的作用。

(4) 简化了有关向量组线性相关性理论。教材对内容进行了精选，保留了最基本的一些定理。对于定理的证明，从直观到抽象，尽量联系学生已学过的知识。

(5) 联系实际，在每一章中都适度地引入一些应用性的例题（或习题），这样做对学生理解所学的概念与理论、扩大学生的眼界是有帮助的。

(6) 编写了供线性代数实验课选用的内容。

在本书的编写过程中，杨逢建教授与张文华博士提出了大量重要的、有启发性的意见和建议，使本书增色不少，我们在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，本书难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编著者

2001年4月于广州

# 目　录

# 第一章　线性方程组与矩阵

线性方程组是线性代数的基本内容之一，它在数学的各分支、科学技术及生产实际中有着广泛的应用。本章包括两个内容：一是在中学代数中联立方程组求解的基础上，进行规范、概括，引入崭新的概念与方法——矩阵与矩阵的初等变换来研究线性方程组的求解问题；二是介绍矩阵的运算，为今后各章的学习提供必要的基础知识。

## 第一节　线性方程组与消元法

形如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

的方程组称为 ***n* 元线性方程组**（简称**线性方程组**）。其中：$x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 是 $n$ 个未知量；$m$ 是方程的个数；$a_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）称为方程组的系数；$b_j$（$j=1, 2, \cdots, m$）称为方程组的常数项。系数 $a_{ij}$的第一个下标表示它在第 $i$ 个方程，第二个下标 $j$ 表示它是未知量 $x_j$ 的系数。一般来说，未知量的个数 $n$ 与方程的个数 $m$ 不一定相等。

在中学的代数里，我们学习过用消元法解二元和三元线性方程组。消元法的基本思想是：通过消元变形把方程组化为容易求解的同解方程组。这种方法也适用于求一般的线性方程组。求解未知量较多的线性方程组时，我们需要使这种消元方法有规律可遵循，并且尽可能简便。下面通过具体的例子来说明。

**[例 1]**　解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ \phantom{2}x_1 + 2x_2 + \phantom{2}x_3 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases} \tag{1.2}$$

**解：**将第一、二两个方程互换，方程组变为：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9 \\ 3x_1+9x_2+2x_3=19 \end{cases} \tag{1.3}$$

由第二个方程减去第一个方程的 2 倍，第三个方程减去第一个方程的 3 倍，得：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ 3x_2-x_3=7 \end{cases} \tag{1.4}$$

在新方程组（1.4）中，把第二个方程的 3 倍与第三个方程的 2 倍相加，得：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ -17x_3=17 \end{cases} \tag{1.5}$$

由方程组（1.5）的最后一个方程易知 $x_3=-1$，将它回代第二个方程得 $x_2=2$，再回代第一个方程得 $x_1=1$。所以原方程组（1.2）的解为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=-1$。

形如（1.5）的方程组称为**阶梯形方程组**。从上述解题过程可以看出，用消元法解线性方程组的做法是对方程组反复施行下述三种变换：

（1）互换两个方程的位置；

（2）用一个非零的数乘一个方程；

（3）用一个数乘一个方程后加到另一个方程上。

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**。可以证明：线性方程组经过初等变换得到的方程组是原方程组的同解方程组，任一个线性方程组都可经上述初等变换化为同解的阶梯形方程组。

## 第二节　矩阵与矩阵的初等行变换

从上节例 1 的求解过程中可以看出，对方程组用方程组的初等变换作消元时，只是对方程组的系数和常数项进行运算，因此用消元法解线性方程组时，为简便起见，可以把未知量、加号和等号略去不写，剩下的数构成一张矩形数表。即线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

可用一张矩形数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

来表示。

**[定义 1]**　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）排成 m 行 n 列，并括以圆括弧的数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 **$m$ 行 $n$ 列矩阵**，简称 **$m \times n$ 矩阵**。通常用黑体大写字母 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 表示，有时也记作 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素。

$m \times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$。

当 $m = n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 **$n$ 阶方阵**。

方程组（2.1）对应的矩阵（2.2）称为方程组的**增广矩阵**，记作（$\boldsymbol{A}$，$b$）或简记为 $\bar{\boldsymbol{A}}$；而未知量系数排成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的**系数矩阵**。

**[定义 2]**　矩阵的下列三种变换称为**矩阵的初等行变换**：

（1）互换两行（互换 $i$，$j$ 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

（2）以非零数 $k$ 乘某一行中的所有元素（第 $i$ 行乘 $k$，记作 $kr_i$）；

（3）把某一行所有元素的 $k$ 倍加到另一行对应的元素上去（第 $j$ 行 $k$ 倍加到第 $i$ 行上，记作 $r_i + kr_j$）。

**[定义 3]**　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价**，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

用消元法解线性方程组的消元步骤可以在其增广矩阵上实现。以例 1 为例说明如下：

线性方程组（1.2）的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{pmatrix}$$

最后这个矩阵称为行阶梯形矩阵，它对应的线性方程组是阶梯形方程（1.5）。为了在求解时省去回代的步骤，可对此行阶梯形矩阵继续作初等行变换：

$$\underset{-\frac{1}{17}r_3}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-4&5\\0&-2&-5&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\underset{r_1+4r_3}{\overset{r_2+5r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-2&0&-4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{2}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

最后一个矩阵称为行最简形矩阵。它表示的方程组是：

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=-1\end{cases}$$

也就是原方程组（1.2）的解。

［例 2］ 解线性方程组：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ \qquad x_2-x_3+x_4=-3\\x_1+3x_2\qquad -3x_4=1\\ \quad -7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases} \tag{2.4}$$

**解**：对方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-3&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\overset{r_3-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&1&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+7r_2}{\overset{r_3-5r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\overset{r_4+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_2}{\overset{\substack{r_2+r_3\\r_1-3r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

最后一个矩阵是行最简形矩阵，它对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -8 \\ \quad x_2 \quad - x_4 = \ \ 3 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = \ \ 6 \end{cases}$$

把这个方程组改写为：

$$\begin{cases} x_1 = \qquad -8 \\ x_2 = \ \ x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 6 \end{cases}$$

这里 $x_4$ 可以自由取值（称为**自由未知量**），因而原方程组的解有无穷多个，可以表示为：

$$\begin{cases} x_1 = \qquad -8 \\ x_2 = \ \ k \ \ +3 \\ x_3 = 2k \ \ +6 \\ x_4 = \ \ k \end{cases} \quad \text{（其中 } k \text{ 为任意实数）}$$

［**定义 4**］　所谓**行阶梯形矩阵**，是指满足下列两个条件的矩阵：

（1）如果有零行（元素全为零的行），则零行全部位于该矩阵的下方；

（2）各个非零行（元素不全为零的行）的第一个不为零的元素（称为非零首元），它的列标随行标的递增而严格增大。

特别地，当行阶梯形矩阵满足：

（i）各个非零首元都是 1；

（ii）各个非零首元所在列的其余元素都是零。

则称此矩阵为**行最简形矩阵**（或**行最简形**）。

例如，矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个行最简形，但行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不是行最简形。

综上所述，用矩阵初等行变换的方法解线性方程组的步骤是：

（1）写出线性方程组的增广矩阵，运用矩阵的初等行变换把它化为行阶梯形矩阵（或进一步化为行最简形）；

（2）写出行阶梯形矩阵（或行最简形）所表示的方程组，对它求解。

这种解线性方程组的方法称为**高斯消元法**（Gaussian elimination）。

[**例 3**]　设有甲、乙、丙三种化肥，甲种化肥每公斤含氮 70 克、磷 8 克、钾 2 克；乙种化肥每公斤含氮 64 克、磷 10 克、钾 0.6 克；丙种化肥每公斤含氮 70 克、磷 5 克、钾 1.4 克。若把此三种化肥混合，要求总重量为 23 公斤，且含磷 149 克、钾 30 克，问三种化肥各需多少公斤？

**解**：设甲、乙、丙三种化肥各需 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 公斤，由题意可列出以下方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 23 \\ 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 149 \\ 2x_1 + 0.6x_2 + 1.4x_3 = 30 \end{cases}$$

对此方程组的增广矩阵施行初等行变换，得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 23 \\ 8 & 10 & 5 & 149 \\ 2 & 0.6 & 1.4 & 30 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-8r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & -3 & -35 \\ 0 & -1.4 & -0.6 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+0.7r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & -3 & -35 \\ 0 & 0 & -2.7 & -40.5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2.7}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & -3 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-r_3}{\overset{r_2+3r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix} \underset{r_1-r_2}{\overset{\frac{1}{2}r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

由此得到方程组的惟一解：$x_1=3$，$x_2=5$，$x_3=15$。因而甲、乙、丙三种化肥各需 3 公斤、5 公斤和 15 公斤。

[**例 4**]　解方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

**解**：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_2-r_1}{\overset{\substack{r_4-2r_1 \\ r_3-4r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1 & 1\\0 & 0 & 5 & -2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

最后一个矩阵对应的方程组为：

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1\\ 5x_3 - 2x_4 = 2\\ 0 = -4\end{cases}$$

从最后的一个方程"0 = －4"可以看出，原方程组无解。

**[例 5]**　$\lambda$为何值时，下述线性方程组有解？并求出其解。

$$\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2\\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -1\\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 = \lambda + 1\\ -x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4\end{cases} \tag{2.6}$$

**解：**

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & -2 & 2\\1 & -5 & 2 & 1 & -1\\2 & 6 & -3 & -3 & \lambda+1\\-1 & -11 & 5 & 4 & -4\end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\3 & 1 & -1 & -2 & 2\\2 & 6 & -3 & -3 & \lambda+1\\-1 & -11 & 5 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+r_1}{\overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 16 & -7 & -5 & \lambda+3\\0 & -16 & 7 & 5 & -5\end{pmatrix} \underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda-2\neq 0$ 时，方程组（2.6）无解；而当 $\lambda-2=0$ 即 $\lambda=2$ 时，方程组（2.6）有解，且有无穷多解。因为：

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \overset{\frac{1}{16}r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+5r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最后这个最简形对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{16}x_3 - \frac{9}{16}x_4 = \frac{9}{16} \\ x_2 - \frac{7}{16}x_3 - \frac{5}{16}x_4 = \frac{5}{16} \end{cases}$$

也可表示为：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{16}x_3 + \frac{9}{16}x_4 + \frac{9}{16} \\ x_2 = \frac{7}{16}x_3 + \frac{5}{16}x_4 + \frac{5}{16} \end{cases}$$

其中：$x_3$，$x_4$ 是自由未知量。若令 $x_3 = k_1$，$x_4 = k_2$（$k_1$，$k_2$ 是任意常数），则在 $\lambda = 2$ 时，方程组（2.6）的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_2 + \frac{9}{16} \\ x_2 = \frac{7}{16}k_1 + \frac{5}{16}k_2 + \frac{5}{16} \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

## 第三节　矩阵的运算

在上一节，我们介绍了求解线性方程组的矩阵初等变换法，使得整个计算过程及计算格式完全程序化，既简便，又容易掌握。随着时代的发展，人们发现许多理论与实际问题都与矩阵有着密切的联系，这就使得矩阵成为数学中一个极其重要且应用广泛的工具。这一节将介绍矩阵的运算及其运算性质。为讨论和叙述方便，先定义几类特殊的矩阵。

### 一、几类特殊矩阵

只有一行的矩阵：