

浙江大学数学系列丛书



Analytical geometry

解析几何学

沈一兵 盛为民 张 希 夏巧玲 编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

●浙江大学数学系列丛书

解析几何学

沈一兵 盛为民 张 希 夏巧玲 编

内
容
简
介

本
书
是
浙
江
大
学
数
学
系
教
授
沈
一
兵
、
盛
为
民
、
张
希
、
夏
巧
玲
等
教
授
合
作
编
写
的
。
本
书
是
浙
江
大
学
数
学
系
教
授
沈
一
兵
、
盛
为
民
、
张
希
、
夏
巧
玲
等
教
授
合
作
编
写
的
。



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何学 / 沈一兵等编. —杭州: 浙江大学出版社,
2008.8

(浙江大学数学系列丛书)

ISBN 978-7-308-06149-0

I. 解… II. 沈… III. 解析几何学—高等学校—教材
IV. 0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 130880 号

解析几何学

沈一兵 盛为民 张 希 夏巧玲 编

责任编辑 徐素君

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571—88925592, 88273066(传真)

排 版 杭州中大图文设计有限公司

印 刷 浙江中恒世纪印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 11.5

字 数 290 千

版 印 次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06149-0

定 价 22.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

序

为了弘扬浙江大学数学系的优良传统和学风,适应当代数学研究和教学的发展,2004年起浙江大学数学系组织力量对本科生课程设置的教材进行了重要改革,尤其是对数学系主干课程如数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、常微分方程、科学计算、概率论等的教材进行了重新编写,并在浙江大学出版社出版浙江大学数学系列丛书。这是本套系列丛书的第一部分。

丛书的主要特点:

一、加强基础,突出普适性。丛书在内容取舍上,对数学核心内容不仅不削弱,反而有所加强,尤其注重数学基本理论、基本方法的训练。同时,为了适应浙江大学“宽口径”的学生培养制度,对数学应用、数学试验等内容也给予了高度关注。

二、关注前沿理论,强调创新。丛书试图从现代数学的观点审视和选择经典的内容,以新的视角来处理传统的数学内容,使丛书更加适合浙江大学教学改革的需要,适合通才教育的培养目标。

三、注重实践,突出适用性。丛书出版以前,有的作为讲义或正式出版物在浙江大学数学系试用过多次,使丛书的内容和框架、结构比较完善。同时,为了适合不同层次的学生合理取舍,丛书在内容选取上,为学生进一步学习准备了丰富的材料。

在编写过程中,数学系教授们征求了许多学生的意见,并希望能够在教学使用过程中对这套教材作进一步完善。今后我们还会对其他课程的教材进行相应的改革。

为了这套丛书的编写和发行,浙江大学数学系的许多教授和出版社的编辑投入了巨大的精力,我在此对他们表示衷心的感谢。

刘克峰

浙江大学数学系主任

2008年2月

来;以仿射几何为主线,欧氏几何作为其特殊情形,射影几何看作其延伸;适当介绍了非欧几何。具体内容如下:第1章以向量代数为主,介绍向量的各种运算。第2和第3章,以向量和坐标并举的方法,介绍空间直线、平面、二次曲面等传统空间解析几何的内容,用代数的方法讨论了二次曲面的分类。第4章介绍等距变换和仿射变换。第5章在射影几何的基础上,介绍非欧几何。附录一作为第3章的补充,介绍利用不变量讨论二次曲面分类问题。附录二介绍矩阵与行列式的基本概念,附录三简单介绍几何基础,作为第5章的补充。

考虑到工科与理科的不同需要和近年来提倡的“大类”招生,本书的教学课时可以有适当的伸缩性。如讲授本书全部内容,建议每周4学时。如每周3学时,建议略去第5章及附录。如每周2学时,可再略去第4章。

在浙江大学最近几年解析几何课程的教学过程中,我们相继采用了国内多种不同版本的教材,使我们收益很大,并使我们在编写本书过程中得以借鉴。我们对这些教材的作者表示衷心的感谢。本书是浙江大学2005年校级精品课《几何学》建设的组成部分,得到了浙江大学教务处的资助。浙江大学几何学方向的研究生李本伶、韩敬伟、吴超等同学帮助我们打印了大部分的书稿,特别是吴超同学,他为我们制作了书中大部分图片。对他们的工作,我们一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中不妥甚至错误之处,在所难免。恳请读者提出宝贵意见,以供将来作进一步修订之用。

最后,对浙江大学理学院、数学系和浙江大学出版社的大力支持,谨致深切谢意。

编者

2008年元月

前 言

几何学(Geometry),这个源自人类早期文明的响亮名词,至今仍焕发着灿烂的光辉。

古代的几何学主要是研究平面和空间的直观图形的性质,具有很强的现实性和朴素的辩证逻辑。集其大成者,当推欧几里德(Euclid)的《几何原本》。感谢笛卡儿(R. Descartes)等创建了坐标法,使得几何学的研究从“形”转换成“数”。就像几何学大师陈省身先生所比喻:从“裸体人”(综合几何)进化到“原始人”(坐标几何)。这是几何学发展中十分关键的一步。后来,克莱因(F. Klein)用变换群的观点刻画几何学,提出了著名的“爱尔兰根纲领”。从此,坐标及其变换成了几何学中最基本和最重要的观念。传统的大学解析几何课程,主要就是介绍这方面的内容。

我国的高等教育,一直把“分析、几何、代数”列为最重要的必修基础课(通称为“三高”),其中“几何”包括了传统的“解析几何”。遗憾的是,正如姜伯驹先生在为陈维桓教授所编著的《微分流形初步》一书的序言中所写道:“从20世纪50年代到70年代我国大学的几次教学改革中,几何课程曾被一再削弱,当时吴光磊先生就一语双关地批评这种现象为‘得意忘形’,历史的发展证明他是有远见的。”前事不忘,后事之师。我们今天的教学改革应当引以为鉴。这也是本书编写的目的之一。

几何学历来是浙江大学的特色课程,其历史渊源可追溯到苏步青先生所开创的老浙大几何学派。原杭州大学数学系,在白正国教授的指导下,对微分几何和黎曼几何都有相当的研究。20世纪80年代,丰宁欣老师等也编写了适合当时教学需要的教材《空间解析几何》(浙江科学技术出版社,1982),颇受广大读者欢迎。进入21世纪以来,随着我国高等教育改革的进一步深化,为了提高本科教学的质量,有必要重新撰写一本适应教学需要的解析几何学教材。

根据认识论的基本原则——从特殊到一般和从简单到复杂,本书从欧氏几何(传统解析几何的内容)入门,把仿射几何和射影几何有机地结合起

目 录

第 1 章 向量代数	1
§ 1.1 向量及其线性运算	1
§ 1.2 标架与坐标	9
§ 1.3 向量的内积	13
§ 1.4 向量的外积	19
§ 1.5 向量的多重乘积	23
第 2 章 空间的直线与平面	27
§ 2.1 图形与方程	27
§ 2.2 平面的方程	33
§ 2.3 直线的方程	37
§ 2.4 平面和直线的位置关系	40
§ 2.5 平面束及其应用	45
第 3 章 二次曲面	49
§ 3.1 柱面、锥面和旋转面	49
§ 3.2 其他二次曲面	57
§ 3.3 二次直纹面	63
§ 3.4 坐标变换	70
§ 3.5 二次曲面的分类	78
§ 3.6 曲面的相交	91
第 4 章 等距变换与几何变换	95
§ 4.1 平面上的等距变换	95
§ 4.2 平面上的仿射变换	100
§ 4.3 空间等距变换	109
§ 4.4 空间仿射变换	111
§ 4.5 变换群与几何学 二次曲面的度量分类和仿射分类	113
第 5 章 射影几何初步	115
§ 5.1 扩大的欧氏平面	115

§ 5.2	射影平面	116
§ 5.3	射影坐标	119
§ 5.4	射影几何的内容 对偶原理	122
§ 5.5	交 比	125
§ 5.6	透 视	132
§ 5.7	配 极	135
§ 5.8	Steiner 定理和 Pascal 定理	140
§ 5.9	非欧几何简介	143
附 录		152
附录一	第 3 章定理 3.5.1 的证明	152
附录二	矩阵与行列式	156
附录三	几何基础简介	160
习题解答		165
参考文献		173

第1章 向量代数

向量代数和坐标法是研究几何问题的基本工具,也是学习其他数学课程的基础,本章主要介绍向量代数的基本知识(如线性运算,内积,向量积).为了丰富向量代数的内涵,我们将引入仿射坐标系和直角坐标系,并将有关向量概念用坐标表示.在介绍用坐标表示向量的内积、外积以及多重向量积时,利用直角坐标来表示,将特别简洁.不同于一般线性代数课程,我们将着重于三维欧氏空间并注重用几何的方法来叙述向量的概念及运算.

在反映现实世界的各种量中,一般可分为两类:一类在取定单位后可以用一个实数来表示,例如距离、时间、温度、体积、质量等,这类只具有大小的量叫做数量;另一类量不仅有大小,而且有方向,例如位移、力、速度、加速度等,这类量称为向量或矢量.向量虽然与数量不同,但也可以像数量那样引入运算,并有类似的运算规则.向量代数就是研究向量的运算及其运算规则的.利用向量可以简明地把基本的几何对象表示出来,并通过向量的运算解决许多几何问题.另一方面,通过引入坐标系,向量的运算归结为其坐标的代数运算.向量代数与坐标法相结合是解析几何研究中的最重要方法.

§ 1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量及其表示

定义 1.1.1 向量(或矢量)是既有大小又有方向的量.

向量既有大小,又有方向,因此我们常用带箭头的线段(即有向线段)来表示.线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向.如图 1-1 中的向量记作 $\overrightarrow{AB}$, A 称为该向量的始点, B 称为终点.有时向量不标明始、终点,只用一个黑体字母或带箭头的字母表示,例如向量 $a, b, c, \dots$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等.

向量的大小也叫做它的长度或模,通常向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$, 向量 a 的长度记作 $|a|$. 长度等于 1 的向量称为单位向量.

定义 1.1.2 若两向量具有相同的长度和方向,则称这两个向量相等.向量 a 与 b 相等,记作 $a = b$.

由上面的定义,两向量是否相等与它们的始点无关,只由它们的长度和方向决定.像这种始点可任意选取,而只由其长度和方向决定的向量通常叫做自由向量.也就是说,自由向量可任意平移,平移后的向量与原来的向量相等.本书中所讲的向量都是指自由向量.图

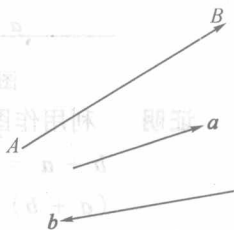


图 1-1

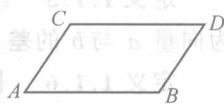


图 1-2

1-2 中, 平行四边形 $ABCD$, 根据上面定义就有, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

定义 1.1.3 两个模长相等方向相反的向量叫做互为负向量, 向量 a 的负向量记作 $-a$.

显然, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为负向量, 即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. 如果两向量通过平行移动可以移到同一直线上, 则称这两向量共线(平行). 如果 a 与 b 共线, 记作 $a // b$. 平行于同一平面的一组向量, 称为共面向量.

1.1.2 向量的加法

物理学中力、位移的合成分别遵循“平行四边形法则”和“三角形法则”. 如图 1-3 中的两个力 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ 的合力就是以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量 $\overrightarrow{OB}$. 如图 1-4 中接连两次位移 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的合成就是 O 到 B 的位移即 $\overrightarrow{OB}$.

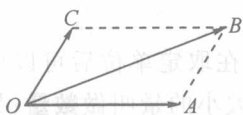


图 1-3

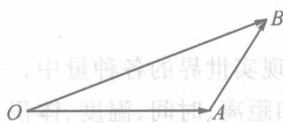


图 1-4

在自由向量的意义下, “平行四边形法则”和“三角形法则”是可以互推的.

定义 1.1.4 设已知向量 a, b , 以空间任一点 O 为始点作向量 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b$, 得到一条折线 OAB , 向量 $\overrightarrow{OB} = c$ 称作向量 a 与 b 的和, 记作 $c = a + b$.

定理 1.1.1 向量加法满足下面的运算规律:

- 1) 交换律 $a + b = b + a$; (1.1.1)
- 2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$. (1.1.2)

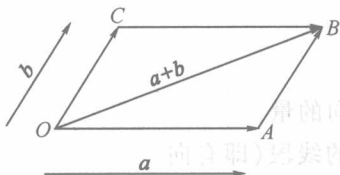


图 1-5

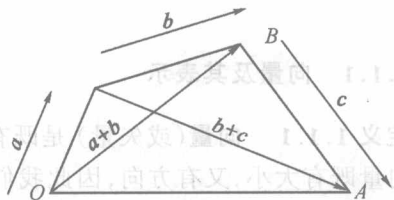


图 1-6

证明 利用作图法立刻得到这两条规律, 如图 1-5 和图 1-6 所示,

$$b + a = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a + b,$$

$$(a + b) + c = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + (b + c). \quad \square$$

由上面规则, 任三个向量 a, b, c 相加, 不论它们的先后顺序与结合顺序如何, 它们的和是一样的, 因此可以写成 $a + b + c$. 多个向量的和也可简单写作 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

作为加法的逆运算, 我们可以自然地定义向量的减法.

定义 1.1.5 给定两向量 a 和 b , 如果向量 c 与 b 的和为 a , 即 $c + b = a$, 则向量 c 称为向量 a 与 b 的差, 记作 $c = a - b$.

定义 1.1.6 长度为零的向量称为零向量, 以 0 表示.

用有向线段来表示, $\overrightarrow{OA} = 0$, 即 O 和 A 两点重合. 根据定义知, $a = 0$, 即 $|a| = 0$. 零

向量没有确定的方向,它与任何向量平行.容易验证:

$$(1) a + 0 = a;$$

$$(2) a + (-b) = a - b;$$

$$(3) a + (-a) = a - a = 0.$$

根据向量的减法,我们可得向量等式的移项法则:由 $b + c = d$ 可得 $b = d - c$.

另一方面,对于任何两向量 a 和 b ,成立下面三角不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1.1.3)$$

等式成立当且仅当 a, b 同向.

例 1.1.1 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA_1} = c$, 试用 a, b, c 来表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1C}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \\ &= a + b - c. \end{aligned}$$

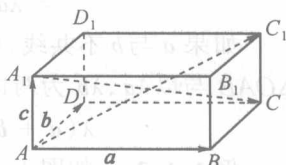


图 1-7

例 1.1.2 设 a 和 b 都是非零向量且不共线,证明:

$$2(|a|^2 + |b|^2) = |a + b|^2 + |a - b|^2,$$

并说明这个等式的几何意义.

证明 如图 1-8,利用余弦定理可得

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle OBC,$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOB,$$

$$\text{两式相加得 } |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{BA}|^2 = 2(|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2),$$

$$\text{即 } 2(|a|^2 + |b|^2) = |a + b|^2 + |a - b|^2.$$

此等式说明平行四边形的两条对角线长度的平方和等于两边长度的平方和的两倍.

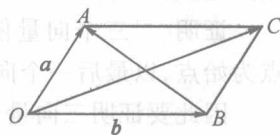


图 1-8

1.1.3 向量的数乘

定义 1.1.7 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量,记作 λa ,它的模为 $|\lambda||a|$,即 $|\lambda a| = |\lambda||a|$, λa 的方向,当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同,当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.这种运算我们称为实数与向量的乘法,简称为数乘.

已知非零向量 a 和与它同向的单位向量 a^0 ,则下面的等式显然成立.

$$a = |a|a^0, \text{ 或 } a^0 = \frac{a}{|a|}.$$

根据上面的定义,我们可以得到下面运算规律.

定理 1.1.2 实数与向量的乘法满足:

$$1) 1 \cdot a = a, 0 \cdot a = 0, (-1) \cdot a = -a; \quad (1.1.4)$$

$$2) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a; \quad (1.1.5)$$

$$3) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a; \quad (1.1.6)$$

$$4) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b. \quad (1.1.7)$$

这里 a, b 为向量, λ, μ 为实数.

证明 这里我们仅给出 4) 的证明, 其余留给读者.

不妨设 $a \neq b, b \neq 0, \lambda \neq 0$ 或 1, 否则等式显然成立.

如果 $a \parallel b$, 则取实数 k , 使得 $a = kb$ (a 与 b 同向时

取 $k = \frac{|a|}{|b|}$, 反向时取 $k = -\frac{|a|}{|b|}$). 则有

$$\begin{aligned}\lambda(a+b) &= \lambda(kb+b) = \lambda[(k+1)b] \\ &= (\lambda k + \lambda)b = (\lambda k)b + \lambda b \\ &= \lambda a + \lambda b.\end{aligned}$$

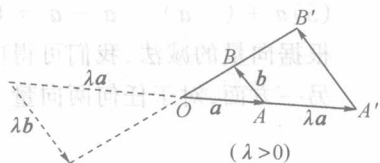


图 1-9

如果 a 与 b 不共线, 如图 1-9 所示, 以 a, b 为两边的 $\triangle OAB$ 与以 $\lambda a, \lambda b$ 为两边的三角形 $\triangle OA'B'$ 相似, 因此由平面几何知识可得

$$\lambda(a+b) = \lambda \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \lambda a + \lambda b.$$

□

例 1.1.3 如图 1-10, 已知三角形 ABC , 三边 BC, CA, AB 的中点分别设为 D, E, F . 证明: 顺次将三向量 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 的终点和始点连接, 正好构成一个三角形.

证明 三个向量依次终点与始点连接, 则以第一个向量的始点为始点, 以最后一个向量的终点为终点的向量即是三向量之和.

因此要证明三向量依次终点与始点连接能构成三角形的等价条件, 即这三个向量之和为零向量.

图 1-10

因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

这表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 构成一个三角形.

□

1.1.4 向量的线性关系与向量的分解

定义 1.1.8 由向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 及实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 所组成的向量 $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ (即 $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$) 称为向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的一个线性组合. 此时也称 a 可以由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示.

利用向量的线性运算 (即加法和数乘), 我们在下面给出向量共线、共面的充要条件.

定理 1.1.3 如果向量 $a \neq 0$, 则向量 b 与 a 共线的充要条件是

$$b = ka,$$

其中 k 是由 a 和 b 唯一确定的数量.

(证明略, 留给读者作为习题.)

定理 1.1.4 如果 a 和 b 不共线, 则向量 c 和 a, b 共面的充要条件是

$$c = k_1 a + k_2 b,$$

其中 k_1, k_2 是由 a, b, c 唯一确定的数量.

证明 因为 a, b 不共线, 所以 a, b 都不是零向量.

充分性 如果 k_1, k_2 中至少有一个是零, 则 c 必与 a, b 之一共线, 从而 a, b, c 共面. 如果 $k_1 k_2 \neq 0$, 则由向量加法的定义知 c 和 $k_1 a, k_2 b$ 共面, 因此也和 a, b 共面.

必要性 将共面向量 a, b, c 的始点都移到同一点 O . 设 $\overrightarrow{OB} = c$, 做平行四边形 $OACB$, 使 $\overrightarrow{OA}$ 与 a 共线, $\overrightarrow{OC}$ 与 b 共线, 则必存在 k_1, k_2 使得 $\overrightarrow{OA} = k_1 a, \overrightarrow{OC} = k_2 b$, 所以 $c = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = k_1 a + k_2 b$.

图 1-11

余下证明 k_1, k_2 是唯一确定的.

假设 $c = k_1 a + k_2 b = \lambda_1 a + \lambda_2 b$, 则有 $(k_1 - \lambda_1)a + (k_2 - \lambda_2)b = 0$. 如果 $k_1 - \lambda_1$ 和 $k_2 - \lambda_2$ 中有一个非零, 例如 $k_1 - \lambda_1 \neq 0$, 则有 $a = -\frac{k_2 - \lambda_2}{k_1 - \lambda_1}b$, 从而 a 和 b 共线, 这跟定理的假设矛盾. 因此必有 $k_1 = \lambda_1, k_2 = \lambda_2$. $\square$

定理 1.1.5 如果三向量 a, b, c 不共面, 则空间中任意向量 r 可以表示为

$$r = k_1 a + k_2 b + k_3 c,$$

其中 k_1, k_2, k_3 是由向量 a, b, c, r 所唯一确定的实数.

证明 因为 a, b, c 不共面, 所以 a, b, c 都不是零向量, 也不相互平行. 将向量 a, b, c, r 移至同一始点 O , 设 $\overrightarrow{OR} = r$, 如图 1-12 所示. 过 R 点作三张平面分别平行 c 与 b, a 与 c, a 与 b 所张成的平面, 并与 a, b, c 所在的三条直线的交点分别记为 A, B, C . 由向量的加法的定义可得

$$r = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

另一方面, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 分别与 a, b, c 共线, 则存在实数 k_1, k_2, k_3 使得 $\overrightarrow{OA} = k_1 a, \overrightarrow{OB} = k_2 b, \overrightarrow{OC} = k_3 c$, 所以 $r = k_1 a + k_2 b + k_3 c$.

再证实数 k_1, k_2, k_3 是唯一确定的. 假设存在另一分解 $r = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$, 则 $(k_1 - \lambda_1)a + (k_2 - \lambda_2)b + (k_3 - \lambda_3)c = 0$. 如果上式系数中不全为零, 例如 $k_1 - \lambda_1 \neq 0$, 则 $a = -\frac{k_2 - \lambda_2}{k_1 - \lambda_1}b - \frac{k_3 - \lambda_3}{k_1 - \lambda_1}c$, 此时 a, b, c 共面, 与原题设矛盾. 因此必有 $k_1 = \lambda_1, k_2 = \lambda_2, k_3 = \lambda_3$, 即 r 的分解是唯一的. $\square$

定义 1.1.9 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个向量, 如果存在不全为零的 n 个数 $k_1, \dots, k_n$, 使得

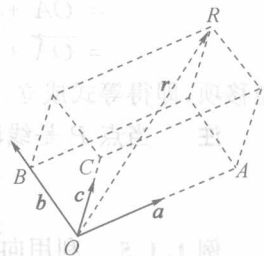
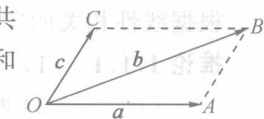
$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0, \text{ 即 } \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0,$$

则称 n 个向量 $a_1, \dots, a_n$ 是线性相关的, 否则称这 n 个向量是线性无关.

根据定义, 我们可得下面定理.

定理 1.1.6 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性相关的充要条件是其中必有一向量是其余 $n-1$ 个向量的线性组合.

定理 1.1.7 如果向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中有一部分向量组线性相关, 则原来的 n 个



向量构成的向量组也线性相关.

根据线性相关的定义及定理 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 容易得到下面结论.

推论 1.1.1 1) 一个向量 a 线性相关的充要条件是 $a = 0$.

2) 两个向量线性相关的充要条件是这两个向量共线.

3) 三个向量线性相关的充要条件是这三个向量共面.

4) 空间中任意四个向量总是线性相关的.(上面结论留做习题).

例 1.1.4 设一直线上三点 A, B, P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB} (\lambda \neq -1)$, O 是空间任意一点. 求证:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

证明 如图 1-13, 直接利用向量加法的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{PB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})\end{aligned}$$

经移项, 即得等式成立. $\square$

注 当点 P 是线段 AB 的中点时, $\lambda = 1$. 此时, 中点公式为

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

例 1.1.5 利用向量法证明三角形的三条中线相交于一点, 且这点与每一顶点的距离等于从该顶点所引中线长的 $\frac{2}{3}$.

证明 设 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是边 BC, AC, AB 的中点(图 1-14). 作中线 BE 与 AD 相交于一点 G , 设 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{BE}$, 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \lambda (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BG} = \mu (\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA})$.

又因为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = 0$, 即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \mu (\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}) - \lambda (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}) \\ = (1 - \lambda) \overrightarrow{AB} + (\mu - \frac{1}{2} \lambda) \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \mu \overrightarrow{CA} = 0.\end{aligned}$$

由于 $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, 代入上式得

$$(1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} (\mu - \lambda) \overrightarrow{BC} = 0.$$

由于 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 不共线, 则必有 $1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu = 0$, $\lambda - \mu = 0$. 可得

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}, \text{ 即}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE}.$$

这表明, 中线 AD 和 BE 的交点与顶点 A, B 的距离分别等于相

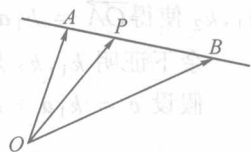


图 1-13

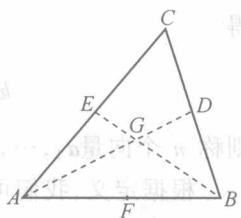


图 1-14

应中线的 $\frac{2}{3}$. 另一方面, 同理可证中线 AD 与 CF 的交点与 A, C 的距离也等于相应中线的 $\frac{2}{3}$. 因此三中线必交于一点, 且这点与 A, B, C 的距离分别等于相应中线的长的 $\frac{2}{3}$. $\square$

例 1.1.6 证明四面体对边中点的连线交于一点, 且互相平分.

证明 如图 1-15, 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点分别为 E, F , EF 的中点设为 G_1 , 其余两组对应中点连线的中点分别设为 G_2, G_3 . 下面仅需证明 G_1, G_2, G_3 三点重合.

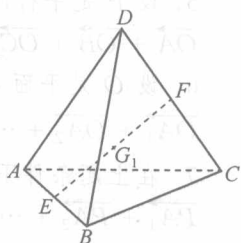


图 1-15

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_1} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}).\end{aligned}$$

同理可证: $\overrightarrow{AG_i} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}), (i = 2, 3)$.

所以 $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{AG_3}$, 即 G_1, G_2, G_3 三点重合, 命题得证. $\square$

例 1.1.7 已知向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 不共面, 判定 $a = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, b = \xi_1 + 2\xi_2, c = \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$ 是否共面.

解 由推论 1.1.1 知, 判定 a, b, c 是否共面即判定 a, b, c 是否线性相关.

设 $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$, 则

$$\lambda_1(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \lambda_2(\xi_1 + 2\xi_2) + \lambda_3(\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3) = 0,$$

$$\text{即 } (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\xi_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\xi_2 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)\xi_3 = 0.$$

$$\text{由于 } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ 不共面, 则有 } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{由于此齐次线性方程组的行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 所以方程组只有零解. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

$= 0$, 因此 a, b, c 不共面.

1.1 习 题

1. 设 $ABCDEF$ 为正六边形, O 是中心, 在向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FA}$ 中哪几个是相等的?

2. 根据向量加法法则, 用作图法证明下列等式

$$(1) (a + b) + (a - b) = 2a; \quad (2) \frac{a - b}{2} + b = \frac{a + b}{2}.$$

3. 向量 a, b 必须满足什么几何性质, 以下各式才成立.

$$(1) |a + b| = |a - b|; \quad (2) a + b = \lambda(a - b);$$

$$(3) \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}; \quad (4) |a + b| = |a| + |b|;$$

$$(5) |a + b| = |a| - |b|; \quad (6) |a - b| = |a| + |b|.$$

4. 用向量法证明任意三角形两边中点的连线平行于第三边, 而且它的长等于第三边长的一半.

5. 设 P 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}.$$

6. 设 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, 证明:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$

7. 在上题条件下, P 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = n\overrightarrow{PO}.$$

8. 已知 $\overrightarrow{OA} = r_1, \overrightarrow{OB} = r_2, \overrightarrow{OC} = r_3$ 是以原点 O 为顶点的平行六面体的 3 条边, 设过点 O 的对角线与平面 ABC 的交点为 M , 求向量 $\overrightarrow{OM}$.

9. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的内心, O 是空间任意一点. 求证:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}, \text{ 其中 } a = |\overrightarrow{BC}|, b = |\overrightarrow{AC}|, c = |\overrightarrow{AB}|.$$

10. 已知不共线向量 $\overrightarrow{OA} = e_1, \overrightarrow{OB} = e_2$, 求 $\angle BOA$ 的角平分线上的单位向量.

11. 在四面体 $OABC$ 中, 设点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心(三中线之交点). 求向量 $\overrightarrow{OP}$ 关于向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的分解式.

12. 用向量法证明:

(1) P 是 $\triangle ABC$ 重心的充要条件是 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$;

(2) 三角形三条角平分线共点;

(3) 平行六面体的四条对角线交于一点, 而且互相平分.

13. 已知向量 $a = e_1 - 2e_2 + 3e_3, b = 2e_1 + e_3, c = 6e_1 - 2e_2 + 6e_3$, 问 $a + b$ 和 c 是否共线.

14. 已知向量 a, b, c , 设三个不共面向量 e_1, e_2, e_3 分解时, 其分解式为:

(1) $a = 2e_1 - e_2 - e_3, b = -e_1 + 2e_2 - e_3, c = -e_1 - e_2 + 2e_3$;

(2) $a = e_3, b = e_1 - e_2 - e_3, c = e_1 - e_2 + e_3$;

(3) $a = e_1 + e_2 + e_3, b = e_2 + e_3, c = -e_1 + e_3$.

问 a, b, c 是否共面. 如果共面, 写出它们之间的线性关系.

15. 证明三个向量 $a e_1 - b e_2, b e_2 - c e_3, c e_3 - a e_1$ 共面.

16. 设 $\overrightarrow{OP_i} = r_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 试证: P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i r_i = \mathbf{0}, \text{ 其中 } \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0.$$

§1.2 标架与坐标

1.2.1 标架, 坐标系

定义 1.2.1 空间一定点 O , 连同三个不共面的有序向量 e_1, e_2, e_3 , 称为空间中的一个仿射标架, O 称为这个仿射标架的原点, 记这个仿射标架为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$; 如果向量 e_1, e_2, e_3 都是单位向量, 且两两相互垂直, 则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 称为直角标架, 或么正标架.

给定一标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 由于 e_1, e_2, e_3 不共面, 由定理 1.1.5 知, 空间任何向量 a 都可以由 e_1, e_2, e_3 线性表示, 即

$$a = x e_1 + y e_2 + z e_3, \quad (1.2.1)$$

这里唯一确定的有序三元实数组 (x, y, z) 称为向量 a 关于标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标, x, y, z 称为对应的坐标分量. 通常简写为 $a = \{x, y, z\}$. 对于空间任意点 P , 向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为 P 点的径向量或向径, 径向量 $\overrightarrow{OP}$ 关于标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标 (x, y, z) 也称为点 P 关于标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标. 这样取定标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 之后, 空间全体点的集合与全体有序三元实数组 (x, y, z) 的集合构成一一对应的关系, 这种一一对应的关系称为空间的一个仿射坐标系, 简称坐标系.

由于坐标系由标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 完全决定, 因此空间坐标系也常用标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 来表示, 此时点 O 叫做坐标原点, 而向量 e_1, e_2, e_3 称为坐标向量.

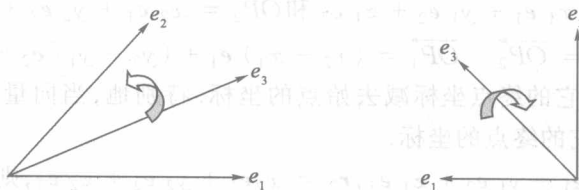


图 1-16

对于标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 如果 e_1, e_2, e_3 间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同, 则此标架叫做右旋标架或右手标架. 如果 e_1, e_2, e_3 和左手拇指、食指、中指相同, 则此标架叫做左旋标架或左手标架. 等价地: 用右手四指转动方向表示从 e_1 转到 e_2 , 如果 e_3 与大拇指方向一致, 则称标架 e_1, e_2, e_3 为右手标架; 用左手四指转动方向表示从 e_1 转到 e_2 , 如果 e_3 与大拇指方向一致, 则称标架 e_1, e_2, e_3 为左手标架 (图 1-16).

由右旋标架决定的坐标系叫做右旋坐标系或右手坐标系, 由左旋标架决定的坐标系叫做左旋坐标系或左手坐标系; 直角标架所确定的坐标系叫做直角坐标系.

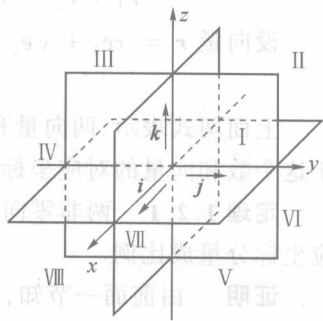


图 1-17

通常在讨论空间问题时, 所采用的坐标系一般都是右手直角坐标系. 特别约定, 在用到直角坐标系时, 坐标向量用 i, j, k 来表示, 即用 $\{O; i, j, k\}$ 来表示直角坐标系. 过 O 点