“考研直通车”真题解析系列丛书

2009年

全国硕士研究生入学考试历年真题解析

总主编　新　罗
本册主编　肖新玲

数学二

齐鲁书社

2009年
全国硕士研究生入学考试
历年真题解析

数学二

"考研直通车"真题解析系列丛书

2009年
全国硕士研究生入学考试
历年真题解析

数学二

总 主 编　新 罗
本册主编　肖新玲

齊魯書社

图书在版编目（CIP）数据

2009年全国硕士研究生入学考试历年真题解析——数学二/总主编：新罗　本册主编：肖新玲．—济南：齐鲁书社，2008.6

ISBN 978-7-5333-2006-5

Ⅰ．2… Ⅱ．肖… Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ．G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第054981号

2009年全国硕士研究生入学考试历年真题解析

数学二

总 主 编　新　罗

本册主编　肖新玲

出版发行	齊魯書社
社　　址	济南经九路胜利大街39号
邮　　编	250001
网　　址	www.qlss.com.cn
电子邮箱	qlss@sdpress.com.cn
印　　刷	山东新华印刷厂
开　　本	787×1092 /16
印　　张	12.75
插　　页	2
字　　数	319千
版　　次	2008年6月第1版
印　　次	2008年6月第1次印刷
标准书号	ISBN 978--7—5333—2006—5

定价：23.00元

总 主 编　新　罗
本册主编　肖新玲
本册编委　(以姓氏笔画为序)
　　　　　刘广丽　肖新玲　张艳燕

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

有人说，“吃透真题，考研就成功了一半。”这是至理名言，因为历年真题最直接、最全面地显现着命题的方向趋势和基本原则。这也是广大考生对真题重视的原因所在。

“历年真题”，是最经典的试题，是命题专家认真研究分析考试大纲后形成的，既反映了考试大纲的基本要求，又蕴涵着命题的指导思想和发展趋势，是广大考生了解全国硕士研究生入学考试最直接的第一手资料，考生从中可直观地了解到硕士研究生入学考试的试题类型、考点分布和难易程度。

“历年真题”的构成最大限度地体现了考试大纲的基本精神，是检验考生对考试大纲理解和对基础知识掌握的标尺。考生对基础知识进行了一轮复习后，做一遍真题是对自己最好的检验。既能从中找到考研的信心，又能找出自己的不足，使以后的复习更有目的性和针对性，做到心中有数，了然于胸。因此，做一遍真题，本身就是一次收获。

由专家对“历年真题”进行解析，从中可看到解答问题的方法和规范，开阔解题思路，增强答题技巧，提高应试水平，最大限度地发挥自己的水平。有许多考生反映，该看的教材都看了，辅导书也读了不少，自认为对基础知识掌握得比较好，却考不出好的成绩来。这其中一个重要的原因就是答题技巧和应试水平的欠缺，通过看专家对历年真题的解析，可从根本上解决这一问题。

基于以上认识，我们编写了全国硕士研究生入学考试历年真题解析系列丛书。包括政治、英语、数学一、数学二、数学三、数学四、历史学、教育学、心理学、金融学联考、法律硕士联考、西医综合 12 册，以期对广大考生有所帮助。

本书汇集了 1996 年至 2008 年历届全国硕士研究生入学考试数学二的试题，并根据评卷的基本原则进行了解析，供广大考生参考使用。希望考生能从中提取精华，受到启示，获得收益。起到举一反三、触类旁通的效果。解析时参考了多部大学经典教材和教学参考书，由于体例的原因未能在解析时一一注明，在此对教材和教学参考书的编写者表示衷心的感谢。

编　者

2008 年 3 月

目　录

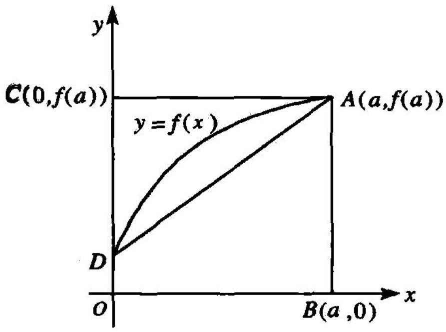
2008 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定的位置上.）

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

(D) 三角形 ACD 的面积

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点

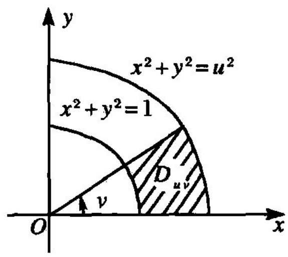
(D) 2 个无穷间断点

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$ (　　).



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵,E 为 n 阶单位矩阵.若 $A^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $E-A$ 不可逆,$E+A$ 不可逆　　(B) $E-A$ 不可逆,$E+A$ 可逆

(C) $E-A$ 可逆,$E+A$ 可逆　　(D) $E-A$ 可逆,$E+A$ 不可逆

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定的位置上.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ____.

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ________.

(11) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

(12) 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

(13) 设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ____________.

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$.若行列式 $|2A|=-48$,则 $\lambda=$ ________.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\displaystyle\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$ 确定,其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0,\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解.求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\displaystyle\iint_D\max\{xy,1\}\,dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数,且 $f(0)=1$.对任意的 $t\in[0,+\infty)$,直线 $x=0,x=t$,曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体.若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍,求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$；

（Ⅱ）若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满中 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)（本题满分 11 分）

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

(22)（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(23)（本题满分 10 分）

设 A 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $P^{-1}AP$.

2008年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题答案与解析

一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定的位置上.)

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【思路点拨】本题的考点是求函数导数.可以直接运用导数的乘法运算法则:$(uv)'=u'v+uv'$;或者先计算 $f(x)$ 的解析式,再运用幂函数求导公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

【解题分析】解法一:由 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,根据导数的乘法法则:

$$f'(x)=2x(x-1)(x-2)+x^2(x-2)+x^2(x-1)=x(4x^2-9x+4)$$

令 $f'(x)=0$.由 $\Delta=9^2-4\times4\times4=17>0$ 知方程 $4x^2-9x+4=0$ 有两个不等实根.故 $f'(x)$ 的零点个数为3.

故选(D)

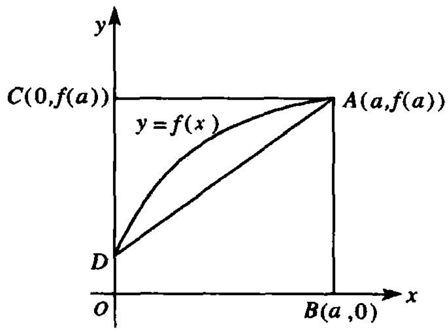
解法二:$f(x)=x^2(x-1)(x-2)=x^4-3x^3+2x^2$.由幂函数求导公式:

$$f'(x)=4x^3-3\times3x^2+2\times2x=4x^3-9x^2+4x=x(4x^2-9x+4).$$

令 $f'(x)=0$.由 $\Delta=9^2-4\times4\times4=17>0$ 知 $4x^2-9x+4=0$ 有两个不等实根.因此 $f'(x)$ 的零点个数为3.

故选(D).

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

(D) 三角形 ACD 的面积

【思路点拨】本题的考点是定积分的计算及其几何意义.先对题目所给的定积分运用分部积分公式,再结合定积分的几何意义即可得结果.

【解题分析】 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 的面积,$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 是曲边梯形 $ABOD$ 的面积,所以 $\int_0^a xf'\mathrm{d}x$ 为曲边三角形 ACD 的面积.

故选(C).

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

【思路点拨】本题的考点是线性齐次微分方程的特征根与通解的关系. 若 λ 为单实根，则方程有解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$；若 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 为单复根，则方程有两个解 $y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$，$y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$；若 λ 为 k 重实根，则方程有 k 个解 $y=x^i\mathrm{e}^{\lambda x}(i=0,1,\cdots,k-1)$；若 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 为 k 重根，则方程有 $2k$ 个解，$y=x^i\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$，$y=x^i\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x(i=0,1,\cdots,k-1)$.

【解题分析】由 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\cos_2x+c_3\sin2x$ 知方程有特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2i,\lambda_3=-2i$. 故对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$. 所以所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$.

故选(D).

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点

(D) 2 个无穷间断点

【思路点拨】本题的考点是间断点类型的判定. 首先找出函数的间断点，然后根据定义进行判定，在求极限过程中经常利用洛必达法则，等价无穷小代换等.

【解题分析】由 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$ 知 $f(x)$ 有间断点 $x=0,1$.

由

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\ln|x|\cdot\sin x=\lim_{x\to0}\ln|x|\cdot x$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

知 $x=0$ 是可去间断点.

由

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=\sin1,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\sin1,$$

知 $x=1$ 是跳跃间断点.

故选(A).

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

(A) 若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛　　(B) 若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛　　(D) 若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛

【思路点拨】本题的考点是数列的收敛.与单调性有关的数列收敛的依据是单调有界定理,即在实数集中,有界的单调数列必有极限.

【解题分析】如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,则(A)成立,但在本题的条件中(A)不能成立.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases},x_n=\frac{(-1)^n}{n},$$

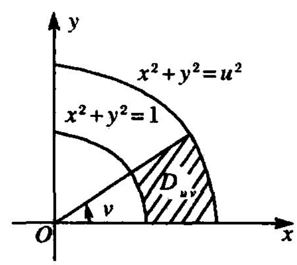
则$x_n\to 0(n\to\infty)$,但

$$f(x_n)=\begin{cases}1 & n=2k\\ -1, & n=2k+1\end{cases}$$

不收敛.(B)项中$\{x_n\}$单调,又$f(x)$单调有界,故$\{f(x_n)\}$单调有界,所以收敛,故(B)项正确.因为没有由$\{f(x_n)\}$的收敛或单调判断$\{x_n\}$收敛的定理,故(C)(D)错.

故选(B).

(6) 设函数f连续.若$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域$D_{uv}$为图中阴影部分,则$\frac{\partial F}{\partial u}=($　　$)$.



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\frac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\frac{v}{u}f(u)$

【思路点拨】本题的考点是二重积分的计算及变限积分求导.当二重积分的被积函数中含有x^2+y^2或者积分区域为圆域(或圆域的一部分)时,常用极坐标变换进行计算.

【解题分析】令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,则$D_{uv}$变换为$D_{r\theta}=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant u,0\leqslant\theta\leqslant v\}$,且

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}\cdot r\mathrm{d}r=v\int_1^u f(r)\mathrm{d}r.$$

所以$\frac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$.

故选(A).

(7) 设A为n阶非零矩阵,E为n阶单位矩阵.若$A^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $E-A$不可逆,$E+A$不可逆　　(B) $E-A$不可逆,$E+A$可逆

(C) $E-A$可逆,$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆,$E+A$不可逆

【思路点拨】本题的考点是矩阵的逆的存在性.矩阵A的逆存在的充分必要条件是矩阵的行列式$|A|\neq 0$.本题还考查了矩阵的乘积及行列式的计算.

【解题分析】因为$E=E^3=E^3-A^3=(E-A)(E^2+EA+A^2)=(E-A)(E+A+$

A^2). 又 $|E| = 1 = |E-A| \cdot |E+A+A^2|$. 故 $|E-A| \neq 0$. 所以 $E-A$ 可逆.

同理由 $E = E^3 + A^3 = (E+A)(E-A+A^2)$ 知 $E+A$ 可逆.

故选(C).

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

【思路点拨】本题的考点是矩阵的合同. 若 A、B 为实对称矩阵, 则 A 与 B 合同的充分必要条件是 A 与 B 的秩相等且有相同的正惯性指数.

【解题分析】由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

知 A 有特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

对选项(A)(B)(D) 中的矩阵逐一求特征值, 然后与 A 的特征值进行比较即可, 例如

选项(A): $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda+3)$. 得特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$;

选项(D): $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda-3)(\lambda+1)$, 得特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

所以 A 与(D) 项中矩阵合同.

故选(D).

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定的位置上.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ ____.

【思路点拨】本题的考点是无穷小量阶的比较与等价替换. 常用的等价无穷小(当 $x \to 0$ 时) 有: $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ 等.

【解题分析】由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)} \xlongequal{等} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 f^2(x)}{x^2 \cdot f(x)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ 结合函数 $f(x)$ 连续可知 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

(10) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y =$ ________.

【思路点拨】本题的考点是一阶微分方程的求解. 本题既可凑成一个全微分方程求解, 变形之后又是一阶线性非齐次方程, 可用常数变易公式求解.

【解题分析】解法一: 令 $M(x,y) = y + x^2 e^{-x}$. $N(x,y) = -x$, 则

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

故

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-N}=\frac{2}{x},$$

因此方程有一个只与 x 有关的积分因子：$u(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^2}$. 将原方程两边同乘以 $\dfrac{1}{x^2}$ 得全微分方程

$$\left(\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0.$$

即

$$\mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)=0$$

所以方程的通解为 $\dfrac{y}{x}+\mathrm{e}^{-x}=C$.（其中 C 为任意常数）.

解法二：将方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+x\mathrm{e}^{-x}$. 则方程是一阶线性非齐次方程. 由常数变易公式得方程的通解为：

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right]\\&=x\cdot\left[\int\mathrm{e}^{-x}+C\right]\\&=x[\mathrm{e}^{-x}+C].\end{aligned}$$

(11) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

【思路点拨】本题的考点是隐函数的求导. 由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

【解题分析】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则由 $F(x,y)=0$ 确定的曲线的切线斜率，即由 $F(x,y)=0$ 确定的函数的导数为：

$$k=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y\cos(xy)+\dfrac{-1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}}$$

故在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k=1$，所以切线方程为 $y=x+1$.

(12) 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

【思路点拨】本题的考点是拐点. 若函数 $f(x)$ 二阶可导，则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$，x_0 是 $f(x)$ 的拐点的充分必要条件是 $f''(x)$ 在点 x_0 两侧的符号相反.

【解题分析】由 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 得

$$\begin{aligned}y'&=x^{\frac{2}{3}}+(x-5)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\\&=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2),\end{aligned}$$

$$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1).$$

令 $y''=0$,得 $x=0,-1$.

由 y'' 在 $x=-1$ 两侧符号相反知$(-1,-6)$是拐点,而 y'' 在 $x=0$ 两侧符号相同,所以$(0,0)$不是拐点.

(13) 设 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是复合函数求导. 对于幂指型函数求导常用对数求导法.

【解题分析】令 $u=\frac{y}{x},v=\frac{x}{y}$,则 $z=u^v$,对方程两边取对数得 $\ln z=v\ln u$. 对该方程两边关于 x 求导得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=v'_x\ln u+\frac{v}{u}u'_x=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y},$$

因此

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}&=z\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right)\Big|_{(1,2)}\\&=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right)\Big|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1).\end{aligned}$$

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$,则 $\lambda=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是矩阵的特征值与行列式的关系. 若已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3.$$

【解题分析】由 A 的特征值为 $2,3,\lambda$ 知

$$\begin{aligned}|2A|&=\begin{vmatrix}2\times2&&\\&2\times3&\\&&2\lambda\end{vmatrix}\\&=8\begin{vmatrix}2&&\\&3&\\&&\lambda\end{vmatrix}=48\lambda=-48,\end{aligned}$$

则 $\lambda=-1$.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【思路点拨】本题的考点是利用洛必达法则和无穷小的等价代换求极限. 常用的等价无穷小(当 $x\to0$ 时)有:$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,\cos x\sim\frac{x^2}{2},\sin x\sim x$ 等. 但要注意等价无穷小代换求极限时,只有对所求极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小,而对极限

式中的相加减部分不能随意替代.

【解题分析】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^3}\cdot\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\\&\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}\xlongequal{\text{等}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2te^{-x}=0,\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解. 求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【思路点拨】本题的考点是解微分方程，参变量函数求导，变限积分求导. 用分离变量法求解微分方程. 参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 有导数公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

变限积分求导有公式：

$$\left[\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)}f(u)\mathrm{d}u\right]'_t=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)-f(\psi(t))\psi'(t).$$

【解题分析】由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，积分并由条件 $x|_{t=0}=0$，得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)&=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\&=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}\end{aligned}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com