

数学系函授教材

初等代数

上册

数学系编

等

初 等 代 数
上 册

数 学 系 編

华中师范学院出版
华中师范学院印刷厂印刷

开本： $\frac{1}{32}$ 印数：78 字数：342,000字

1959年8月第一版

印数：1—4,310册 定价：1.10元

* 内 部 发 行 *

前 言	1
緒 論	4
§1. 初等代数研究的对象和内容	4
§2. 祖国数学家在代数学方面的卓越成就	6
§3. 初等代数教学中的生产劳动教育	7
第一章 初等代数中的数	14
1. 本章的学习目的与要求	14
2. 本章的主要内容及科学系统性分析	14
3. 本章的重点及学习方法	15
§1. 自然数	15
§2. 分数	30
§3. 有理数	57
§4. 实数	72
§5. 复数	95
練習題	
参考文献	
第二章 多項式	124
1. 本章的学习目的与要求	124
2. 本章的主要内容及科学系	124
3. 本章的学习重点与学习力	125
§1. 一般概念	126
§2. 多項式的基本概念	131
§3. 关于多項式恆等的定理	141
§4. 多項式的运算、多項式环	145

§5. 多項式的整除性	155
§6. 有余式的除法	159
§7. 除式为 $x-a$ 的多項式除法	165
§8. 多項式的最高公因式	169
§9. 多項式的既約因式分解	175
§10. 多項式的根	183
§11. 实系数二次三項式的討論	196
§12. 多項式的根与系数的关系 (韦达公式)	208
§13. 多項式整根的求法	211
§14. 多項式有理根的求法	216

練習題

参考文献

第三章 分式与有理函数 225

1. 本章的学习目的与要求	225
2. 本章的主要内容及科学系統性分析	225
3. 本章的重点和学习方法	227
§1. 有理分式及有理分函数	228
§2. 代数分式的恆等	231
§3. 代数分式的約分与通分	235
§4. 代数分式的算术运算、有理函数体	242
§5. 有理式的恆等变形	245
§6. 有理函数的討論及图象的作法	249

練習題

参考文献

第四章 根式与无理函数 269

1. 本章的学习目的与要求	269
2. 本章的主要内容与科学系統性分析	269
3. 本章的重点及学习方法	270

§1. 实数体上的根式·····	270
§2. 含有根式的代数式的恒等变形·····	280
§3. 无理函数·····	286
§4. 复变数函数 $\sqrt[n]{z}$ ·····	293

練習題

参考文献

第五章 幂函数、指数函数和对数函数·····310

1. 本章的学习目的与要求·····	310
2. 本章的主要内容及科学系統性分析·····	310
3. 本章的重点和学习方法·····	311
§1. 一般概念·····	311
§2. 指数概念的扩张·····	315
§3. 有理指数的幂函数·····	325
§4. 指数函数·····	334
§5. 对数·····	341
§6. 对数函数·····	347
§7. 指数函数与对数函数的应用·····	350
§8. 指数函数与对数函数的超越性·····	353
§9. 与指数函数、对数函数有关的函数的討論例題·····	355
§10. 实指数的幂函数·····	357

練習題

参考文献

前 言

这是专为中学数学教师业余进修而編写的函授本科用的‘初等代数’的初稿。

解放前，我国师范学院沒有正式地开设过“初等数学复习与研究”这类对中学教学有直接指导意义的专业课程，就是連有关的参考書也极少見到。解放后，在党的领导下，学习苏联师范学院的教学计划、教学大綱和初等数学教材的过程中，才在我国师范学院数学系，結合我国的实际情况，开设了平面几何、立体几何、初等代数、数的概念和初等函数等五个初等数学科目。几年来，从教学的实际經驗和毕业同学的反映看来，这些新課的开设的确有助于师范生数学专业化的培养，在提高中学数学教学质量上起了一定的作用。

在教育革命运动以后，大家对开设初数課的重要意义有了进一步的認識。在党的领导和鼓舞下，我們破除了迷信，解放了思想，結合我国实际情况，贯彻党的教育方針，大編教材。这本函授本科用的‘初等代数’，就是在这样的思想基础与物質基础上編写出来的。

本書的取材的根据是中学代数教学大綱以及师范学院数学系用的初等代数复习与研究、数的概念与初等函数等三个科目的教学大綱。其資料的来源主要是众所周知的苏联师院及师专用的几本先进的教材及参考書；其次是我們平素所蒐集的和調查研究所得出的一部分資料以及几年来在党的领导下教学实践中积累的点滴經驗。具体地說，我們面向中学代数教学大綱把数的概念、初等代数复习与研究和初等函数（除去三角函数及逆三角函数）三个大綱中的有关部分融合在一起，构成了本書的大綱。我們認為这样做無論对結合中学实际或对中学数学教师业余进修及研究來說都是有利的。

我們認為，函授本科之所以开设‘初等代数’这个科目的主要目

的有以下两个：

首先是研究中学代数的教材，提高中学代数課的教学質量。

作为一个中学代数課的教师來說，必須对中学代数的教材內容熟練精通。要做到这一点，就必須在教学实践中进行教材的研究。大家知道，数学是从实际而来，把感性認識提高到理論知識，然后又回到实际中去指导实践。这是数学发生与发展的規律；因此，我們就必須知道它們的来龙去脈。为了充分地掌握中学代数的教材內容，还必须知道中学代数教材中，哪些地方有空白点，哪些理論不够严格，哪些问题不易講明白。对于應該講的基本概念必須有正确的認識，对于應該講的定理与方法要透彻的了解，对應該作的演算、制图及解題分析要有足够的能力和熟練技巧。不仅如此，对于不应该講的，但是与教学有密切关系的資料也要下一定的推敲工夫，自己明白，心中有数。这样，在教学时才能左右逢源，得心应手，胜任愉快。

其次是为进一步学习高等数学課打下基础作好准备。

我們知道，高等数学是从初等数学发展而来，且在初等数学上生根的。师范学院数学系开设高等数学課，一方面是为了提高数学的专门知識，另一方面是要能够把所学得的高等数学知識尽可能有效地用之于初等数学问题的研究上去，指导教学，解决实际問題。

为达到上述的两个目的，我們在編写时曾注意了以下七个方面：

1. 注意到貫徹党的教育方針。

比方，我們注意到在代数課教学中的生产劳动教育；并把我們調查研究所得的关于复数在生产和科技上的应用編写进来。

2. 注意到貫串爱国主义思想教育，培养新的爱国主义精神。

比方，我們介紹了祖国人民在代数学方面的伟大貢獻，并且把某些成就正式地編进教材中。

对于以上两个方面，由于我們学习的还很不夠，对党的教育方針体会的还很肤浅，虽然我們曾尽了最大的努力，但是与党对我们的要求来比，还差得很远。

3. 复习与研究中学代数教材的基本內容。

比方，对通常所說的所謂中学代数的四大主干：数的概念、恆等

变形、函数与方程都作了系统地研究。

4. 建立中学代数中一些重要理论的基础。

比方，中学代数教师常感觉教学中有困难的方程同解原理等。

5. 补充中学代数中所未详或缺少的，而作为一个中学数学教师来说又是必须具备的初等代数方面的知识。

比方，数与多项式的基本理论，环、体的基本概念和极限的理论等。

6. 沟通初等数学与高等数学间的内在与外在联系。

比方，多项式概念的引入，以函数观点来研究数学式，以函数来定义方程和序列等。

7. 培养计算、解题和制图的技能与熟练技巧。

为此，我们选了不少的典型例题与练习题编入有关部分。

对于以上的后五个方面，我们虽然注意了，但是由于我们的学识浅薄，科学水平不高，做的也还是很不够。

为了适合函授自学的特点我们还在每章的前头，给出一个简单的学习指导提示。使得读者在学习该章的内容时，能先明了该章的学习目的与要求，主要内容及科学系统性分析以及重点问题的学习方法。

我们把上述所有这些题材，除绪论不计外，共分做十章。首先所谈的是数与数学式。关于数，我们是由量的计量和以实际活动的需要为出发点逐步地来扩充数的概念，然后以环体的近世代数的观点加以适当的整理。关于数学式，我们兼顾了代数观点与函数观点，使得读者学习后既有助于中学数学的教学，又有益于进修高等数学。这些内容分做五章，作为上册。

在研究了数与数学式（以及由之所确定的函数）的基础上，我们进一步研究中学代数中另一些重要题材：方程、方程组、不等式（组）、序列、排列与组合等。这些内容也分做五章作为下册。

最后，让我们向读者提出一点希望。由于我们的水平有限，经验缺乏，而且编写的时间非常短促，因此，这个‘初等代数’的初稿中的缺点与错误在所难免。我们衷心地希望读者，本着热爱人民函授教育事业的精神，以同志间的批评态度，多多对此初稿提出宝贵的意见，将来作为我们修改定稿时的参考。

緒 論

§ 1. 初等代数研究的任务和内容

初等代数研究的任务是根据中学代数教学大纲結合我国教育革命的新形势而提出来的。自从党中央提出了社会主义建設总路綫以后，在全国范围内，工业和农业一个跃进随着一个跃进。在这个大跃进的时代里，技术革命和文化革命的高潮随着来到了。教育为无产阶级政治服务与劳动生产相結合的伟大的教育方針，在党委的领导下，在全国各地各级各种类型的学校中，正在大力的贯彻实行。中等学校随着整个教育的发展而相应地发展、巩固和提高，工人阶级的紅专教师队伍急需大批的培养和扩大。这样，作为一门中等学校课程之一的‘中学代数’的教师也就需要大批的培养和提高才能滿足客观的需要。因此，初等代数研究的新任务在客观形势要求下而提出来了，它是要针对着中学代数课程的内容作为研究的主要内容，在复习的基础上进行研究并且适当补充和提高。在初等代数的研究中，加强基本理论知识论述，使之系统化是必要的。但是关于計算的技能技巧的培养，特别是对于解决实际问题的切实技能的培养，也是必要的。二者不能畸轻畸重，必須使理論紧密結合实际，贯彻实行党的教育方針。

据此代数研究的任务应该是：

1. 对于代数所研究的对象：数及其发生发展，应以唯物史观辯証的方法加以陈述，使讀者对它有一个真实的清晰的概念。

2. 对于初等代数里有实际价值的理论知识，在中学代数中不能和沒有作相当完备和严格论述者，且在别的高等数学中又認為是已知者，初等代数研究里应給予适当的論証。

3. 对于数学里或别的科学里，特别是生产实际中广泛应用的初等代数的方法，应该予以論証。对于中等学校代数教师来说是所不可少的，在中学教学实际中需要掌握和运用的解答具体问题的特殊方法也

应予以注意。

4. 对于完成生产劳动教育应达到的代数教学目的的教材应予特别重视,使读者获得独立运用已有知识来解决实际问题的能力,能把从生产实际与技术规律所决定的数量间的函数相依关系确立出来,能把具有数量内容的问题组成数学式子,而且能熟练地运用数学式子的恒等变形得到数值解答,不消说,对于一个师范专业者来说,还应该获得这些问题的教学方法。

根据上述的初等代数研究的任务和方法,它的内容也就可以确定了。

初等代数的内容取决于中学代数课程的内容,而中学代数课与作为一门科学的代数是不同的。中学代数是一门综合几个数学分支的基本知识的一个教学科目,它不仅包含着代数中一些基本知识,而且涉及许多其他数学学科。

在中学代数中除了属于代数的如多项式、恒等变形、方程的理论等外,还包括着关于数的概念的发展的初步知识、初等函数的基本知识、组合论的简单知识等等。而这些或者属于数论、或者属于数学分析、或者属于其他部门。中学代数课程的教材内容既然是这样复杂,那么初等代数研究的内容也就随着复杂多样,正如本教程目录中所见到的那样,它是作为一个中等学校代数教师来培养的所必须研究的一些基本知识技能和技巧的一个综合性的教程,概括地说,它包含着以下几个主干:

1. 数的概念的发展;
2. 代数式及恒等变形;
3. 函数及其图象;
4. 方程、方程组、不等式的等价性及解法;
5. 近似计算。

在这五个主干中,除去近似计算另有专课开设本教程不予研究外,其余四个主干,以及一些别的知识组成了这个教程。

§ 2. 祖国数学家在代数方面的卓越成就

祖国数学家在代数方面的贡献是很多的，而且代数学的发展在中国历史上也是很悠久的。

汉郑玄解释的“九数”（周时中国劳动人民的数学研究成果之一），其中之一就是方程（现在說方程是狭义的代数）。

关于方程的内容，在魏刘徽輯註的‘九章算术’中記載着正負数的計算和一次方程組的解法。这些数的运算和方法的創立，比印度人在第五世紀，欧洲人到十六世紀才能解答的同类問題的时间要早得多。

关于二次方程和无理数，祖国人民也早在两千年前已經熟悉。以后，祖国的数学家在代数方面又增加了許多新的成就，比方七世紀初叶唐王孝通（約626年）創立了三次方程，十三世紀祖国人民在代数上的成就尤其卓越，比方宋秦九韶(1244)用“正負开方术”解答任何数字系数高次方程的方法，比之英人荷諾所創的法要早近600年。宋杨輝(1261)与元朱世杰(1300)发展了“古法”，先后創立解二次方程的許多新方法；杨輝所发现的关于二項式系数組成的規律“乘方求廉图”比现在举世称道的同一創造发明——“巴斯喀三角”要早四百多年。这时，祖国的数学家都精“天元”的算法，朱世杰推广到四元。解答了高次方程和联立高次方程的应用題。

由此可見，在很早以前，祖国的数学家在代数学上的贡献是很伟大的，無論从时间上或从成就来看都远远的超过別的国家。

可惜的是，这样許多文献大部分已經失传，因而十四世紀以后，竟很少有人知道这些算法。

此外，祖国数学家对于級数的研究也很早，六朝张邱建創立了等差級数的算法，宋沈括（十一世紀）的“隙积”朱世杰的“垛积”、“拾差”就是近世的高阶等差級数。

还有，秦九韶用“大衍求一术”解不定方程，流传到欧洲至今还被譽为“中国剩余定理”。

古算書中談到方程的除‘九章算术’外，还有‘孙子算經’，其中記載有用加減消去法解联立方程。“九章算术”与“张邱建算經”解方程是

用“直除”的方法，所謂直除就是从一方程累減（或累加）另一个方程最后而得解。比之加減消去法虽略繁，但使用中国的筹算时很方便整齐。

作为例子我們来看看“九章算术”所載的“正負术”。正負术只三十六个字：“同名相除，異名相益，正无入負之，負无入正之。其異名相除，同名相益，正无入正之，負无入負之。”

前一句是正負数的減法法則，后一句是正負数的加法法則。

所謂“同名相除”就是求同号二数的差，应把絕對值相減；“異名相益”就是求異号二数的差，应把絕對值相加；“正无入負之”就是被減数为零，減数为正，則差为負；“負无入正之”就是被減数为零，減数为負，則差为正。

所謂“異名相除”就是求異号二数的和，把絕對值相減；“同名相益”就是求同号二数之和，把絕對值相加；“正无入正之，負无入負之”就是若一个加数为零，另一个加数为正，則和为正，另一个加数为負，則和为負。

这就是現在我們所常用的有理数加減法法則。

自从1949年10月1日中华人民共和国成立以来，代数在中国如同其他科学一样，迅速地发展着。在党的领导下，不仅仅对于古典的代数繼續进行研究整理，而且对于近世代数的各个分支都組織了足夠的人力，在党的领导下进行研究，如群論、环論、体論、綫性代数等等，近年来都有不少論文发表，我們知道这些分支都是正在发展着的新学科。不仅如此，还有与之有关的許多新的分支比方运筹学、概率論、統計学、計算数学等各方面都有許多优异的成就。

§ 3. 初等代数教学中的生产劳动教育

从生产劳动的任务来看，初等代数的教学应使学生对于其一切知識的了解，达到足够的深度，并引向与生产劳动相結合为无产阶级政治服务的方向。在教学理論知識时，應該指明应用它来解决实际問題的一切可能性，并培养应用代数方法解决有关科学技术問題的熟練技巧。不仅从書本上知道理論与实际的密切联系，而且在实践中培养学

生能善于在各种不同的条件下和問題中将这种联系具体地体现出来。

作为例子，本教程提出以下几方面的意見，供参考。

1. 在代数式的教学中，可以把代数式看作所含的文字的函数来研究，这样不仅能培养学生的切实的技能，并且能树立学生的辯証唯物主义的世界观。

代数式的观念是由于引用文字表示数而产生的，借助于文字、数字与运算符号来表示未知量与已知量間的函数关系，这是从算术到代数很自然的过渡。这种方法应用到算术的应用問題与几何的应用問題（比方，面积的測量）上去，进而应用到物体的运动的力学問題与重量比重体积間的关系，压力在面积上作用力之間的关系等等物理問題上去，不仅如此，更重要的是应用到解答学生在生产劳动实践中所遇到的科学技术問題上去。

为了使学者巩固地建立起来函数的相依关系这一概念，首先应对于从实践中得到的代数式，即用具体内容的条件决定代数式以若干数值求代数式的值。讓学者实地做出一个表来，表明文字与代数式的对应值，这样可以使学生习惯于在代数式不只看到固定的文字与数字的外在的結合，而且看到量与量間內在的相依的函数关系。这些具有实际应用价值的代数式，必須从簡單到复杂，从特殊到一般，逐步的进行教学，以培养学生的函数概念。

比方，螺栓的荷重限度問題。若鋼螺栓的荷重限度为 x 公斤，設螺栓的直径为 d 厘米，則有代数式 $d = 0.45\sqrt{x} + 0.5$ ，若螺栓綫荷重 100 公斤，200 公斤，300 公斤，500 公斤，1000 公斤，1 吨，2 吨，5 吨，螺栓的直径应有多长？

2. 在代数的教学中繼續于算术之后进一步培养学生的实际計算技巧还是非常必要的。因为在很多方面，代数为解答生产实际問題直接或间接地提供了計算的方法。

数值表与对数尺以及中国算盘都是学习代数必須巩固掌握的計算工具，依靠它們，尽量依靠它們，將使許多計算問題更快更好的得到滿意的解决。越是复杂的計算問題，越是能显示出这些計算工具的益处。

不仅仅要求学者会用这些工具，还要要求他们自己会制造这些工具，当然也应该让学生明白其中的道理，知其所以然。

在制对数表和对数尺的时候，使学生对于对数函数的图象有足够的了解，也是很有必要的。

在熟练地掌握和使用对数尺之前，就应该让学生自制一种具有均匀刻度的有理数算尺，这样不仅可以达到熟练正负数计算的目的，而且也使用对数尺作好准备。

必须注意，计算技能的巩固和技巧的熟练，是与近似计算问题的解答是有密切关系的。

3. 在代数的教学过程中，加强代数与几何的联系是很必要的，事实上，在解答问题的许多场合是与几何的知识相联系的。

经验证明，在解答应用问题时，如果用几何图形予以直观的说明，抽象关系的内在直观性就会显露出来，解答问题的简捷方法也容易被找到，并且还起到检查解答正确性的作用。

量与量间的相依关系利用几何来显示，在算术课中就应该尽量的注意，各式各样的统计图表，长度与高度，产量与分配，预算与决算，绘制平面图和地图（比例尺）以及解答应用题的图解法等等。

在有理数的概念建立时，利用数轴来说明问题是非常重要的。量的数值用直线上的点来表示，建立起数与形间的对应关系。

笛氏坐标平面是为了把成对的量的数值，在平面上表示成点，这在任何生产车间以及任何交通运输单位都是不能不用的。比方，时间与温度的图象或时间与距离的图象。因而在代数的教学过程中必须从某一个实际问题的考察所得到的二量间的数值对应表，在笛氏直角坐标平面上，把其相依的关系描绘图象显示出来。这种实际的制图不仅仅具有单纯教学的意义，而且具有重大的生产教育的意义。

描绘函数的图象，自然是应该象中学代数教科书上所安排的次序那样，由点到直线再到曲线，由简单到复杂，从低级到高级的，从代数的到超越的。

在实系数二次三项式的讨论中，应该和它的图象紧密地结合起来考虑，并找一些学者已知的有具体内容的这类问题求出极大值或极小

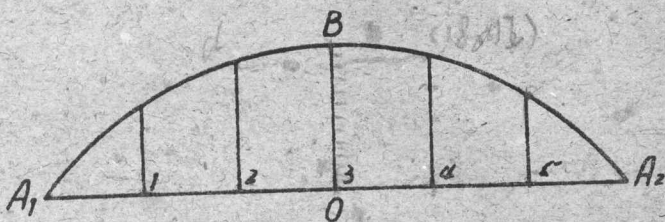
值。

在函数及其图象的教学中应尽量说明它的来源，用途和实际应用的地方，联系力学与物理时，也应与该课的教学配合起来。选择具体内容的条件下做函数图象的问题，必须从学生在生产实践中所得的感性知识为素材。比方焊接的成本和材料厚度的关系，液体的蒸发与温度的关系，水稻或小麦的合理密植与产量的关系等等。

在过去的中学代数教科书中所要求描画的图象，只限于两个变量的函数相依关系，如果是含有三个变量时，则对其中的一个给以一系列固定的数值而得到一系列具有两个变量的式子，在同一个图上作出每一个式的图象，便得到所谓“诺模图”，我们就可以从整体来观察它们的相依关系。

下面我们举两个具有实际内容的例子：

例1. 设有一座拱桥，形如一个抛物线的弧，顶点在弧的中点，拱桥有五个支柱，等距离地立在这个弧的弦上，若弦长为 $2d$ ，拱桥的高为 h ，求各个支柱的长度。



(图1)

解：若取弦 A_1A_2 的中点 O 为坐标原点， A_1A_2 作为横轴， A_1A_2 的垂线 OB 为纵轴，则包含弧 A_1BA_2 的抛物线的方程为：

$$y = ax^2 + c$$

据上面画出的条件求系数 a 与 c ：

1) 当 $x = d$ 时，函数 y 的值等于零，即

$$ad^2 + c = 0 \quad (1)$$

2) 当 $x = 0$ 时，函数 y 的值等于 h ，即

$$c = h \quad (2)$$

由(1)与(2), 得

$$a = -\frac{h}{d^2}.$$

因此, 所求的方程具有如下的形式:

$$y = -\frac{h}{d^2}x^2 + h. \quad (3)$$

于是支柱3的长度 $y_3 = h$, 支柱2和4的长度 $y_2 = y_4$ 等于抛物线(3)上横坐标为 $\frac{d}{3}$ 的那一点的纵坐标:

$$y_2 = y_4 = -\frac{h}{d^2}\left(\frac{d}{3}\right)^2 + h = -\frac{h}{9} + h = \frac{8}{9}h.$$

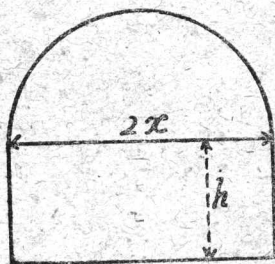
支柱1与5的长度 $y_1 = y_5$ 等于抛物线(3)上横坐标为 $\frac{2d}{3}$ 的那一点的纵坐标:

$$y_1 = y_5 = -\frac{h}{d^2}\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + h = -\frac{4}{9}h + h = \frac{5}{9}h.$$

具体到数目时, 比方若 $2d = 100$ 米, $h = 14$ 米, 解这个问题得

$$y_3 = 14, \quad y_2 = y_4 = 12\frac{4}{9}, \quad y_1 = y_5 = 7\frac{7}{9}.$$

例2. 有閘門的水道的截面, 如下图所示, 已知截面的周长为 $2p$, 求在什么条件下截面的面积最大。



(图2)

解: 用 x 表示半圆的半径, S 表示截面的面积, 则得

$$2p = 2x + 2h + \pi x;$$

$$h = p - \frac{1}{2}(\pi + 2)x;$$

$$\begin{aligned} S &= 2x \left[p - \frac{1}{2}(\pi + 2)x \right] + \frac{1}{2}\pi x^2 \\ &= 2px - \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) x^2 \\ &= \frac{2p^2}{4 + \pi} - \frac{4 + \pi}{2} \left(x - \frac{2p}{4 + \pi} \right)^2. \end{aligned}$$

所以函数 S 当 $x = \frac{2p}{4 + \pi}$ 时有极大值。

例3. 外軌的高度問題，因为任何运动着的物体都有沿着一直綫而运动的趋势，所以火車在轉弯的地方有出軌的傾向，单单依靠鉄軌和輪緣已經不足以將火車安全的限制在軌道上运行，为了防止火車不出軌，就必須使外軌高于內軌。軌道愈寬，火車在該地段行駛的可能极限速度就愈大；軌道的曲率半径愈小，外軌的高度将愈大。

設軌道的寬度为 e ，火車的最大速度是 v ，軌道的曲率半径是 r ，重力加速度是 g ，外軌的高度是 h 时，它們之間有以下的关系：

$$h = \frac{ev^2}{gr}.$$

这里，所有的綫性量度（ h ， e ， r ）都以米計算，速度 v 与加速度 g 分別以米/秒与米/秒²計算。

实际应用上，（当軌道的寬度是标准寬度时： $e = 1.524$ 米）常用的近似公式是

$$h = 12.5 \frac{v^2}{r}.$$

这里， h 以毫米計算， v 以每小时公里計算， r 以米計算。

超过每小时40公里的速度时可利用公式

$$h = 500 \frac{v}{r} \text{ (单位同上).}$$

比方， $v = 30$ 公里/小时， $r = 300$ 米，400 米，500 米，800 米时，求外軌的高度。將所建的关系列成表以后，我們可以繪制

$$h = 12.5 \frac{v^2}{r} \text{ 的諾模图如下:}$$