华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(一)

配高教社《高等数学》第五版 同济大学应用数学系 主编

高等数学

第五版 上、下册合订本

习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

- 紧贴教材：精讲重点 点拨方法 联系考研
- 考试宝典：教材精华 经典试卷 常考试题
- 学习卡：资料下载 信息交流 互动论坛
- 课后习题：三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

高等数学

第五版 上、下册合订本

习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册合订本)习题全解/王建福主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7-81107-395-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086954 号

书　　名	高等数学(上、下册合订本)习题全解
主　　编	王建福
责任编辑	罗　浩
出版发行	中国矿业大学出版社
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com
印　　刷	北京市昌平百善印刷厂
经　　销	新华书店
开　　本	850×1168　1/32　**本册印张** 17　**本册字数** 373 千字
版次印次	2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价	125.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前言
PREFACE

《高等数学》是大学课程中一门重要的基础课，是理工科学生学习其他专业课程的基础，也是硕士入学考试的必考科目. 为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本《高等数学习题全解(上、下册合订本)》.

本书作为一类辅助教材，旨在使读者掌握更多的知识扩展解题思路. 考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 学习要求：根据考试大纲的要求，总结的各章重要知识点.

2. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入分析.

3. 课后习题全解：本书给出了同济大学应用数学系编写的《高等数学》各章习题的答案. 我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路和方法作了简要的说明.

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助. 同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正.

华腾教育教学与研究中心

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

目录 CONTENTS

第一章　函数与极限 …… 1

学习要求 …… 1

历年考研真题评析 …… 1

课后习题全解 …… 4

第二章　导数与微分 …… 36

学习要求 …… 36

历年考研真题评析 …… 36

课后习题全解 …… 39

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 68

学习要求 …… 68

历年考研真题评析 …… 68

课后习题全解 …… 71

第四章　不定积分 …… 116

学习要求 …… 116

历年考研真题评析 …… 116

课后习题全解 …… 118

第五章　定积分 …… 152
学习要求 …… 152
历年考研真题评析 …… 152
课后习题全解 …… 155

第六章　定积分的应用 …… 191
学习要求 …… 191
历年考研真题评析 …… 191
课后习题全解 …… 195

第七章　空间解析几何与向量代数 …… 220
学习要求 …… 220
历年考研真题评析 …… 220
课后习题全解 …… 224

第八章　多元函数微分法及其应用 …… 251
学习要求 …… 251
历年考研真题评析 …… 252
课后习题全解 …… 255

第九章　重积分 …… 295
学习要求 …… 295
历年考研真题评析 …… 295
课后习题全解 …… 298

第十章　曲线积分与曲面积分 …… 347
学习要求 …… 347
历年考研真题评析 …… 347
课后习题全解 …… 351

第十一章　无穷级数 …… 391
学习要求 …… 391
历年考研真题评析 …… 392

课后习题全解 ………………………………………………… 394

第十二章　微分方程 ………………………………………… 425
学习要求 ………………………………………………………… 425
历年考研真题评析 …………………………………………… 425
课后习题全解 ………………………………………………… 429

第一章

函数与极限

学习要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题的函数关系式.
6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

历年考研真题评析

Ⅰ. 选择题

1. (2002 年，数学二) $f(x)=|x\sin x|\cdot e^{\cos x}, x\in(-\infty,+\infty)$ 是(　　).

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

解　$|x\sin x|$，$e^{\cos x}$ 均为偶函数，所以其乘积仍为偶函数. 故应选 D.

2.(2004 年，数学三) 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

A. 等于 2　　B. 等于 0　　C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞

解　$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

当 $x \to 1$ 时函数没有极限，也不是 ∞. 故应选 D.

3.(2003 年，数学二) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n = \infty$，则必有(　　).

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_nc_n$ 不存在

解　A，B 显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况，不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

C 也明显不对，因为“无穷小·无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在. 故应选 D

4.(2005 年，数学二) 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则(　　).

A. $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

解　要考查 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处的极限或左、右极限.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\frac{x}{x-1}}-1) = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \infty$.

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

又 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}} = 0$，

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = -1$.

$\Rightarrow x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 故应选 D.

5.(2003 年，数学一) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})} = 2$，其中 $a^2+c^2 \neq 0$，则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

解　由于 $a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax,(a\neq 0)$

$c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})\sim -2cx,(c\neq 0)$

(因为 $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2=o(x),1-e^{-x^2}\sim x^2=o(x)$)

因此,原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2=$ 原式右边,$\Rightarrow a=-4c$.

当 $a=0,c\neq 0$ 时,极限为0,当 $a\neq 0,c=0$ 时,极限为 ∞,均与题设矛盾.

故应选 D.

Ⅱ.填空题

1.(2000 年,数学三)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则　$f[f(x)]=$ ______.

解　当 $|x|\leqslant 1$ 时,有 $f(x)=1$. 又 $f(1)=1$,于是当 $|x|\leqslant 1$ 时,复合函数 $f[f(x)]=1$.

当 $|x|>1$ 时,有 $f(x)=0$. 又 $f(0)=1$,即当 $|x|>1$ 时,也有 $f[f(x)]=1$. 因此,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f[f(x)]=1$.

2.(2002 年,数学二)已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{x^{-2}}=e^{-\frac{1}{2}}\left(因为\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\right)$,

依题意有　$a=e^{-\frac{1}{2}}$.

3.(2005 年,数学二)当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 $k=$ ______.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k}=1.\Rightarrow k=\frac{3}{4}.$$

Ⅲ.解答题

1.(2000 年,数学一)求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{n}+\frac{\cos\frac{3\pi}{4n}}{n}+\cdots+\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}}{n}\right]$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left[2\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\frac{\pi}{4n}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\sin\frac{2\pi}{4n}-0+\cdots+\sin\frac{2n\pi}{4n}-\sin\frac{(2n-2)\pi}{4n}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{2}-0\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{2}{\pi}$$

2.(2004 年,数学二)求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 这是求$\frac{0}{0}$型的极限,利用等价无穷小因子替换:$\ln(1+t)\sim t(t\to0)$,有

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\sim\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x(x\to0).$$

又 $\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}(x\to0)$,

于是 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

其中$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

课后习题全解

习题 1—1

○1. **解** $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,$A\cap B=[-10,-5)$,
$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

○2. **证明** $\forall x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$,
所以$(A\cap B)^C\subset(A^C\cup B^C)$; ①
反之 $\forall x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin(A\cap B)\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$,
所以 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$. ②
则由 ① 和 ② 得$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

◎3. **分析** 利用集合的并的定义证明,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

证明　(1)$y=f(x_0)\in f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A\cup B\}$

$\Leftrightarrow x_0\in A$ 或 $x_0\in B\Rightarrow f(x_0)\in f(A)$ 或 $f(x_0)\in f(B)\Leftrightarrow f(x_0)\in f(A)\cup f(B)$,

故 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)=\{f(x)\mid x\in A\cap B\}$. $\forall y\in f(A\cap B)$,则 $\exists x_0\in A\cap B$,

有 $y=f(x_0)$,即 $f(x_0)\in f(A)$ 且 $f(x_0)\in f(B)$,

即 $y=f(x_0)\in f(A)\cap f(B)$.

故 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

◎4. **分析**　本题可以用反证法来证 $g=f^{-1}$

证明　首先证明 f 是双射:

$\forall y\in Y,\exists x\in X$,使得 $x=g(y),f(x)=f\circ g(y)=y$

对于 X 中任意两个元素 x_1、x_2,$x_1\neq x_2$,要证明 $f(x_1)\neq f(x_2)$,用反证法. 如果 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$,即 $x_1=x_2$,推出矛盾. 所以 f 是双射,根据定义 g 是 f 的逆映射.

○5. **证明**　(1)$\forall x\in A$,则 $y=f(x)\in f(A)$,$f^{-1}(y)=x\in\{f^{-1}(y)\mid y\in f(A)\}=f^{-1}(f(A))$

即 $A\subset f^{-1}(f(A))$;

(2) 如果 f 是单射,$\forall x\in f^{-1}(f(A))$,$\exists y\in f(A)$,有 $f^{-1}(y)=x$,即 $f(x)=y$

设 $x'\in A$,$f(x')=y$. 由于是单射,则 $x=x'\in A$

$\therefore f^{-1}(f(A))\subset A$. 又由(1)$\therefore f^{-1}(f(A))=A$.

○6. **解**　(1)$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$;

(2)$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(3)$[-1,0)\cup(0,1]$;

(4)$(-2,2)$;

(5)$[0,+\infty)$;

(6)$\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\}$;

(7)$[2,4]$;　(8)$(-\infty,0)\cup(0,3]$;

(9)$(-1,+\infty)$;　(10)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

○7. **解**　(1) 不同. 因为定义域不同

(2) 不同. 因为对应法则不同,$f(x)=x$,而 $g(x)=|x|$;

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同;

(4) 不同．因为定义域不同；

○8. **解** $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1－1 所示．

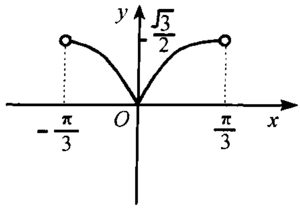

图 1－1

◎9. **分析** 函数单调性的判别可以通过如下方法：在区间 I 上任取两点 x_1、x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调增加

$x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调减少

即观察 $f(x_1)-f(x_2)=g(x)$ 的正负．

解 (1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且 $x_1<x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0$$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)>0$ $\therefore y=\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调增加．

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-(x_1+\ln x_1)$$

$$=(x_2-x_1)+\ln x_2-\ln x_1$$

$\because y=\ln x$ 为单增函数 $\therefore \ln x_2-\ln x_1>0$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)>0$ $\therefore y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调增加．

◎10. **分析** 要证 $f(x)$ 单调增加，且 $f(x)$ 为奇函数．

由 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$（奇偶性）来证明 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\xlongequal{\text{奇函数}}-f(-x_2)+f(-x_1)$$

又 $-x_2,-x_1\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$，故由 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内的单增性知：

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0$$

从而 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也是单调增加的．

○11. **证明** (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为两个任意的偶函数，令 $F(x)=f_1(x)+$

$f_2(x)$

则　$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$

$=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为两个任意的奇函数,令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$

则　$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)$

$=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为任意两个偶函数,令 $F(x)=f_1(x)f_2(x)$

则　$F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)$

$=f_1(x)f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为任意两个奇函数,令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$

则　$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$

$=g_1(x)g_2(x)=G(x)$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数,而 $g(x)$ 为任一奇函数,令 $T(x)=f(x)g(x)$

则　$T(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]$

$=-f(x)g(x)=-T(x)$

故 $T(x)$ 为奇函数.

○12. **解**　(1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,

所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数;

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数;

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数;

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是

偶函数.

○13. **解** (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi$;

(2) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

(3) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$;

(4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数. 因为 $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,所以周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

○14. **解** (1) $\because y=\sqrt[3]{x+1}$, $\therefore x=y^3-1$,

$\therefore$ 反函数为 $y=x^3-1$;

(2) $\because y=\frac{1-x}{1+x}$, $\therefore x=\frac{1-y}{1+y}$, $\therefore y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为:$y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $\because y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad\therefore x=\frac{-dy+b}{cy-a}$

$\therefore y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为:$y=\frac{b-dx}{cx-a}$;

(4) $\because y=2\sin 3x$ $\therefore x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,

$\therefore y=2\sin 3x$ 的反函数为:$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$;

(5) $\because y=1+\ln(x+2)$ $\therefore x=\frac{e^y}{e}-2$,所以所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$;

(6) $\because y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,所以所求反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

○15. **证明** (1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即 $\exists M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M$, $\quad x\in X$

因而 $\qquad -M\leqslant f(x)\leqslant M$, $\quad x\in X$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界($-M$);

(2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即 $M_2\leqslant f(x)\leqslant M_1$, $x\in X$,

令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$,则 $-M\leqslant M_2$, $M_1\leqslant M$,

因而 $\quad -M\leqslant f(x)\leqslant M$, $x\in X$,即 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in X$,

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

○16. **解**　(1) $y = \sin^2 x$，　$y(x_1) = \frac{1}{4}$，　$y(x_2) = \frac{3}{4}$；

(2) $y = \sin 2x$，　$y(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$，　$y(x_2) = 1$；

(3) $y = \sqrt{1 + x^2}$，　$y(x_1) = \sqrt{2}$，　$y(x_2) = \sqrt{5}$；

(4) $y = e^{x^2}$，　$y(x_1) = 1$，　$y(x_2) = e$；

(5) $y = e^{2x}$，　$y(x_1) = e^2$，　$y(x_2) = e^{-2}$；

○17. **解**　(1) $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$；

(2) $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$(n = 0, \pm 1, \cdots)$；

(3) $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$；

(4) 若 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$，定义域为 $[a, 1-a]$；若 $a > \frac{1}{2}$，则函数无定义．

○18. **解**

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \\ 0, & |e^x| = 1 \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases}$$

即 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$　　（见图 1－2）

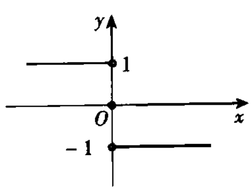

图 1－2

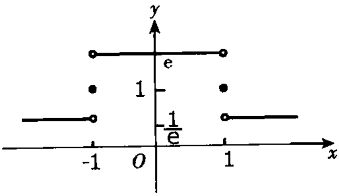

图 1－3

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$　　（见图 1－3）

◎19. **分析**　$S_0 = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40^\circ \cdot h)]$

$AB = CD = \frac{h}{\sin 40^\circ}$，因此 $L = AB + BC + CD$ 中 AB、BC、CD 都可以表示为 h 的函数.

解　$AB = DC = \frac{h}{\sin 40^\circ}$