高等学校教学用書

向量計算
及張量計算初步

H. E. 柯青 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

向量計算及張量計算初步

H. E. 柯青 著
史福培等譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯科學院出版社(Издательство академии наук СССР)出版的柯青(Н. Е. Кочин)著"向量計算及張量計算初步"(Векторное исчисление и начала тензорного исчисления)1951年第七版譯出的。

本書可供高等學校和高等工業學校學生學習與參考用。

本書原由商務印書館出版，自 1958 年 5 月起改由本社出版。

向量計算及張量計算初步

H. E. 柯青著

史福培等譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

上海印刷学校印刷　　新华书店发行

統一书号 13010·458　开本 850×1168 1/32　印張 14 14/16

字數 338,000　印數 2,501—6,000　定价(4)￥1.40

1954年1月商务初版(共印11,000)

1958年5月新1版　1960年3月上海第3次印刷

第七版前言

這一版可說是第六版的複版，所不同的，祇不過是改用了無向量乘積和向量乘積的表示符號，簡化了些標點符號，以及改正了所發現的一些錯誤和錯字。

H. 柯青

第二版前言摘要

這一本參考書的目的，是爲了給讀者，主要是高等學校和高等工業學校的學生，以向量計算的必要知識，以便在以後能用向量的方法去研讀其他的課程，例如理論力學、流體力學、電學理論等。

本書中收集了大量具有幾何性質及基本力學性質的例題，這是有助於更好地掌握向量計算的概念和方法的。

H. 柯青

第四版前言

這一版與前幾版相比較，內容已大爲增加。特別是，爲了要說明向量分析的概念，引用了很多具有物理性質的例子。

向量代數及向量分析兩章，是本書的主要部份。在第三章及第四章中，討論仿射正交張量的理論基礎及其在彈性理論中的應用，以及張量的普遍理論。

H. 柯青

第五、六兩版前言

這一版與前一版幾乎是沒有分別；本文中祇作了某些修正以及改正了所發現的一些錯誤。

H. 柯青

目 次

第一章 向量代數

§1 無向量及向量的定義。向量的相等

1. 在數學及物理學中(特別是在力學中)要研究兩種量:其一爲在空間中有一定方向的量,其二僅有數值的大小,而無方向的概念。例如溫度、質量、密度、能量、質點的位移、速度、加速度、力等等。後四種量與前四種量間顯著不同的地方,是它們具有方向的概念。如一點能向上或向下、向前或向後移動等等。前四種量稱之爲無向量,後四種量稱之爲向量。

就無向量之一——溫度而言。若要確定在某一定時間、某地點空氣的溫度,就必須用一定的單位(如攝氏一度)加以測量,所得數字(正或負)即爲溫度的高低。同樣,可以用一定的單位測量物體的質量及密度等。所以,我們可以定義無向量如下:

在選定的測量單位下,僅需用數字來說明其性質的量稱之爲無向量。

不名數爲最典型的無向量。其他如上面所提到的溫度、質量、密度、能量等都是。

先討論一些關於無向量的比較及相等的問題。很顯然,溫度和質量或溫度和密度等等是不可能相比較的。兩個可以相比較的量無例外地需要有相同的因次,即是說,其測量單位必需與基本單位有着相同的關係。在力學中常採用長度單位(符號 L)、質量單位(符號 M)及時間單位(符號 T)(在技術測量的系統中,常引用力的單位爲基本單位來代替質量單位)。例如密度的因次是 ML^{-3},因爲密度單位是在單位體積

內含有單位質量的均勻物體的密度。所以，當質量單位增大時，例如增大兩倍，則密度單位也增大兩倍；若長度單位增大兩倍時，則密度單位減小八倍。符號 ML^{-3} 代表剛才所說密度單位與基本單位間的關係。

若測量兩個同因次的無向量時，用同一測量單位所得到的數字相同，則稱此兩無向量相等。

再討論向量中之一——質點的速度。僅用每秒若干厘米來表示速度的大小是並不夠的，必須再加上質點運動的方向。同樣，質點的加速度以及作用於某一質點上的力，也具有一定的方向。因此我們可以定義向量如下：

除在一定的測量單位下所測定的數字外，尚需要用在空間中一定的方向來說明其性質的量稱之為向量。

有如不名數為最簡單的無向量一樣，直線段 $\overline{AB}$ 為最簡單的向量。此直線段有一定的大小——長度 AB，及一定的方向——從始點 A 到終點 B。

我們已經提到過向量的某些例子，例如質點的位移、加速度[illegible]每一向量均可用一與它相同方向的線段來表示，線段的長度[illegible]量的數值(固定在某一尺度上)。

向量的數值稱之為向量的大小、模、或長。

在圖解上以箭頭表示向量(圖 1)，箭頭的方向指[illegible]頭的長短，即為向量的大小。

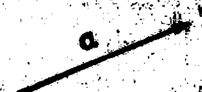

圖 1

通常以粗且黑的哥德字[illegible]代表向量。有時也用符號 $\overline{AB}$ 來代[illegible] A，終點為 B❶。

向量的長，即向量的大小，我們將以[illegible]字母代表。如 a、A、AB，或用下面的符號代表：

$$|\vec{a}|=a,\quad |\vec{A}|=A,\quad |\overline{AB}|=AB。$$

❶ 本書內以拉丁字母上加箭號來代表向量如 $\vec{a}$ 即代表一大小為 a 的向量，在圖上則以粗體 a 代表 $\vec{a}$，餘類推。

2. 茲討論向量的比較和相等的問題。凡是可以相比較的向量，一定要具有相同的因次。例如我們不可能以力與速度相比較等等。

具有同一因次的兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$，若其方向及長均相同，則我們稱此兩向量完全相等。將以下面的方法來表示兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的相等。

$$\vec{a}=\vec{b}。\tag{1}$$

故若兩向量的長不等或方向不同時，則此兩向量就不可能相等。

取一任意平行四邊形，以此平行四邊形的兩對邊作成兩同方向的向量，則根據上述定義，所得兩向量相等。因此向量始點的位置對我們來說並不重要。

顯然，需要用三個數字才能表示一向量。其中之一表示向量的大小，其餘兩個固定向量的方向［例如在天文學中天體的方向常以：(1)方位角及高度，或(2)斜高及仰角，或(3)天體的經度及緯度表示］。

兩向量要相等，必須要決定此兩向量的三對數各對相等。因此，一個向量等式相當於三個無向量等式。

3. 向量分為三種：自由向量、滑移向量及固定向量。我們上面所述及的向量屬於第一種，因其作用點可以由我們任意選擇。滑移向量的作用點可以沿向量的方向任意移動；因此向量可位於固定直線上的任何部份。作用於固體上的力即為此種向量，因為力的作用點可取在此力線上的任何一點。固定向量的作用點必須有一定的位置，例如，在討論液體的運動時，作用於液體某一質點上的力的作用點就取在該質點所在的一點。

滑移向量及固定向量的研究可歸之於自由向量的研究，所以僅對後者加以討論，就已經足夠。

在物理學中，還需要討論一有方向的、且結構上更為複雜的量，即張量。張量的定義將於第三章中言及之，現在祇指出某些例子：對於通過固體上某點的諸軸底轉動慣量的分配，可導出轉動慣量張量；在彈性體中某點作用於諸方向元素的應力的分配，可導出彈性應力張量等等。

在第四章中將給以更爲普遍的定義。

4. 在向量計算中,無向量、向量及張量都是被研究的對象。

有如所有的計算一樣,向量計算中一定也有一系列向量及張量的運算,如加、減、乘、微分等,並且要研究這些運算。這些運算的定義,是要能便於解釋那些在數學中、力學中及物理學中所必須要研究的向量組合的問題。例如在物理學中常碰到力或速度等的平行四邊形定律,這就是向量的加減運算,我們將於下一節中討論之。

由此,向量計算的基本元素——向量、張量以及其運算——很適合於研究幾何、力學及物理學中的某些現象,而這些現象中量的方向起着主要的作用,所以,若在研究這些現象時應用向量計算,則一方面可以使問題簡單化,另一方面,這也是一種很自然而顯明的方法,並不需要引用其他元素,有如在普通坐標軸的方法中所用的一樣。

§2　向量的加減及分解. 向量與無向量的乘積. 單位向量

1. 爲要明瞭兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的和的概念,先討論某點 P 由相繼運動而得之兩位移,以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 表示之。第一位移爲該點由始點 A(圖 2)移動至 B(直線段 AB 爲向量 $\vec{a}$, 即 $\overline{AB}=\vec{a}$), 第二位移爲該點由 B 移動至 C, 同樣, $\overline{BC}=\vec{b}$, 結果此點有如由 A 移動至 C 一樣,位移 AC 爲向量 $\vec{c}$, 此向量很自然地稱之爲向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的和。由此得到下面的定義:

圖 2

要得到代表兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的幾何和的向量 $\vec{c}$, 則必須從空間中任意一點 A 作向量 $\vec{a}$, 再以向量 $\vec{a}$ 的終點爲始點作向量 $\vec{b}$, 將 A 點與向量 $\vec{b}$ 的終點 C 聯結起來,則 $\overline{AC}$ 的大小及方向均與 $\vec{c}$ 相同。

今以代數學中的符號表示向量的加法運算:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b},$$

向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 稱之爲分向量，向量 $\vec{c}$ 稱之爲幾何和或合向量。

由圖 3 可知，兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的和可以向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 爲邊所作平行四邊形的對角線表示。

由此可得公式

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{2}$$

此公式表示幾何加法的交換律：幾何和不因分向量的相互交換而改變。

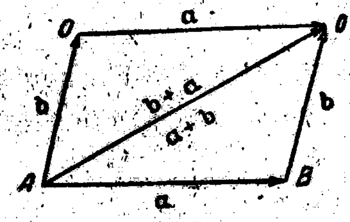

圖 3

我們所以要討論這些很簡單的幾何和的性質，是因爲某些向量運算中並不具有這種性質。

若要求三向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 的和，可先求 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的和，再以其合向量與 $\vec{c}$ 相加，即得向量 $\overline{AD}$（圖 4）。由圖中顯然可以看出，若以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}+\vec{c}$ 相加，則得到同一結果。如此，我們可以得到公式

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \tag{3}$$

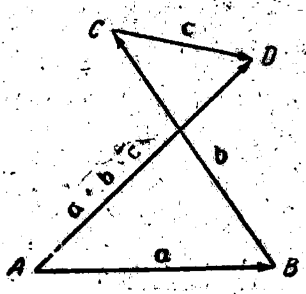

圖 4

此公式表示幾何加法的結合律：和普通代數學中一樣，幾何和中的括號可以任意除去或加入。

三個或多於三向量的相加，可以用多角形定律來計算：以任何次序相繼作向量 $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\cdots$, $\vec{a}_n$，並以前一向量的終點作爲次一向量的始點，再由第一向量的始點至最後一向量的終點作所得折線的封閉線，即可。由加法的交換律及結合律得知，我們可以將向量以任何次序相加，特別是可以適當的合向量來代替任意數量的向量。

今再討論不在同一平面內的三向量的加法規則。此三向量的幾何和，可用以三向量爲稜邊所作之平行六面體的對角線表示之。如圖 8 所示，向量 $\overline{OD}$ 即等於 $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ 及 $\overline{OM}$ 三向量的幾何和。

2. 現在討論向量減法。首先討論一特殊情形，即當兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的合向量趨於一點時，即等於零時的相加(圖5)，即

$$\vec{a}+\vec{b}=0, \tag{4}$$

顯然，在這種情形下，向量 $\vec{b}$ 對向量 $\vec{a}$ 而言爲大小相等而方向相反。

若方程式(4)可依照普通代數學規律處理的話，則易得

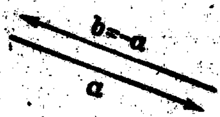

圖 5

$$\vec{b}=-\vec{a}, \tag{5}$$

由此可知 $-\vec{a}$ 爲與 $\vec{a}$ 反向的向量，即與 $\vec{a}$ 大小相等而方向相反。

減法事實上是加法的逆運算，可以用下面的方法定義：若向量 $\vec{x}$ 及 $\vec{b}$ 的和爲 $\vec{a}$：

$$\vec{x}+\vec{b}=\vec{a},$$

則向量 $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ 稱之爲向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的差。若在方程式(6)兩邊各加一向量 $-\vec{b}$，則得

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})。$$

如此，若要從向量 $\vec{a}$ 減去向量 $\vec{b}$，則可將向量 $\vec{a}$ 加一與向量 $\vec{b}$ 大小相等方向相反的向量 $-\vec{b}$。或者可以用下法得向量 $\vec{a}-\vec{b}$：由一公共點 O 作向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$，再由向量 $\vec{b}$ 的終點 B 至向量 $\vec{a}$ 的終點 A 作一向量(圖6)，即得 $\vec{a}-\vec{b}$，因

$$\overline{BA}=\overline{BO}+\overline{OA}=-\vec{b}+\vec{a}。$$

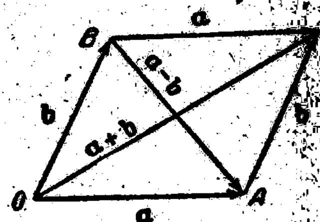

圖 6

如此，在以向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 所作的平行四邊形中(圖6)，其一對角線代表向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的和，另一對角線代表其差。

3. 必須注意，用作向量加減的平行四邊形定律，限止着我們所稱之爲向量的有方向的量的範圍。例如固體繞某軸旋轉一定角度時，可以用有方向的線段來表示，但這不是向量，因爲繞不同軸的兩個旋轉相加時(如運動學中所證明的一樣)，不能用平行四邊形法，

爲複雜的定律。這是說，代表固體繞某軸旋轉一定角度的一有方向的量是一張量，即性質比向量更爲複雜的量。然而，極小的旋轉可以視爲向量，因爲有如力、加速度等一樣，是適合於平行四邊形定律。

如此，我們可以更準確地定義：向量爲以其數值及在空間中的一定方向來說明其性質、並服從於幾何加減法規則的量。

與幾何加法相反的，除了幾何減法外，還有幾何分解法，即一已知向量可用某些向量的和來代替。在幾何的概念上，即是作以已知向量爲封閉線的折線。顯然，這樣問題的性質並不明確，而爲要使問題更爲明確起見，需要給幾何分向量加上一系列的條件。

在討論向量的分解之前，先討論一下向量與無向量的乘積的問題。

4. 設有一向量 $\vec{a}$。今乘以正整數 m，即以 m 個向量 $\vec{a}$ 相加；顯然，結果必得一向量 $\vec{b}$，其方向與向量 $\vec{a}$ 相同，而其長 m 倍於 $\vec{a}$：

$$\vec{b}=m\vec{a}=\vec{a}m,\quad b=ma。\tag{8}$$

由此，當向量 $\vec{a}$ 乘以任意正數 m 後，可以得到具有長爲 ma 而與 $\vec{a}$ 爲同方向的向量 $m\vec{a}$。

我們已經定義過向量 $\vec{a}$ 與 -1 的乘積，這是一與 $\vec{a}$ 的方向相反的向量。所以，當以負數 m 乘向量 $\vec{a}$ 時，必得一長爲 $|m|a$、平行於 $\vec{a}$ 但方向與 $\vec{a}$ 相反的向量。

由這些定義，直接可以知道下面諸公式爲成立：

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a};\tag{9}$$

$$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}=n(m\vec{a})。\tag{10}$$

若先以 m 乘向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 然後相加，則所得結果必與先將 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 相加然後乘以 m 完全相同：

$$m\vec{a}+m\vec{b}=m(\vec{a}+\vec{b}),\tag{11}$$

這說明以無向量乘向量的分配律：有如普通代數學中一樣，括號可以展開。證明上述結論時，祇要想像方程式(11)的幾何意義；此方程式說明：若依照比例 m 而改變圖 2 中 $\triangle ABC$ 的各邊，以所得向量作一新三

角形,則此新三角形必與原來三角形相似。

顯然,方程式(11)同樣適用於好幾個向量

$$m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+\cdots+m\vec{a}_n=m(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)。\tag{12}$$

5. 剛才我們所討論的向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$:

$$\vec{b}=m\vec{a}\tag{13}$$

為相互平行的,這種向量也稱之為共線向量。

相反地,所有向量 $\vec{b}$ 都可以根據方程式(13)以其共線向量表示之. m 為一無向量乘數,代表兩向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的長的比,並具有正號或負號,由 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為同方向或反方向而定。

特別重要的,是當共線向量中之一為單位長時。這種向量稱之為單位向量或方位。向量 $\vec{a}$ 的單位向量常以 $\vec{a}_1$ 表示,即以符號 1 表示 $\vec{a}$ 為單位向量。於是任何向量 $\vec{a}$ 均可寫成

$$\vec{a}=a\vec{a}_1。\tag{14}$$

方程式(14)分成兩部份,分別表明向量的長度 a 及方向 $\vec{a}_1$。

6. 若向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 不為共線向量,則向量

$$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}\tag{15}$$

平行於向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 所決定的平面,因為同在一平面內的諸向量的幾何和必在諸向量所決定的平面內。

在這種情形下,稱向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 為共平面向量,即是說,這些向量平行於同一平面。

反之,所有與兩不共線向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為共平面的向量 $\vec{c}$ 均可用公式(15)表示之。欲證明此為正確,可由一公共始點 O 作三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$(圖 7),並由向量 $\vec{c}$ 的終點 C 作平行於 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的直線 CD 及 CE,則 $\vec{c}$ 可表為依次與 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為共線的兩向量之幾何和,即 $m\vec{a}$ 及 $n\vec{b}$ 的幾何和,結果得分解式(15)。[illegible]

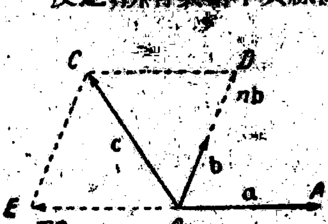

圖 7

解式爲唯一的分解式，因爲若可以得兩種分解式：

$$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b},$$

$$\vec{c}=m'\vec{a}+n'\vec{b},$$

則由第一式中減去第二式得

$$0=(m-m')\vec{a}+(n-n')\vec{b}, \tag{16}$$

由此很顯然　$m-m'=0,\quad n-n'=0,$

即是說，$m=m'$，$n=n'$。若 $m-m'\neq 0$，則由方程式(16)解 $\vec{a}$ 得

$$\vec{a}=-\frac{n-n'}{m-m'}\vec{b},$$

即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 爲共線向量，此與假設不符。

因此，方程式(15)爲唯一的分解式。

7. 若三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 爲不共平面，則任何向量 $\vec{d}$ 可以方程式

$$\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c} \tag{17}$$

表示之，即可以分解成相繼與 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 三向量相平行的三分量。

同樣可用上面的方法證明。由公共始點 O(圖 8)作向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 及 $\vec{d}$，經過向量 $\vec{d}$ 的終點 D 作平行於相繼以向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 所決定的諸面的平面，則 $\vec{d}$ 可表爲三向量(例如 $\overline{OK}$，$\overline{OL}$，$\overline{OM}$)之和，此三向量相繼爲 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 的共線向量，即相繼等於 $m\vec{a}$，$n\vec{b}$ 及 $p\vec{c}$，由此得分解式(17)。還也是唯一的分解式，因爲若假設有兩種不同的分解式：

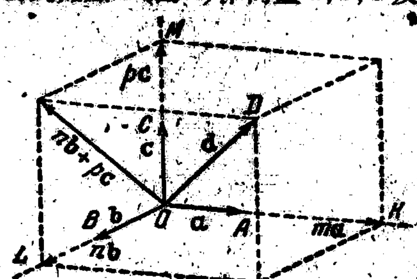

圖 8

$$\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c},$$

$$\vec{d}=m'\vec{a}+n'\vec{b}+p'\vec{c},$$

則得　$0=(m-m')\vec{a}+(n-n')\vec{b}+(p-p')\vec{c},$

若差 $m-m'$，$n-n'$，$p-p'$ 中之一不爲零，則向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 必爲共平

面向量，此與假設不符，所以 $m=m'$，$n=n'$，$p=p'$ 此即證明(17)式的唯一性。

茲討論幾個向量加減及分解的例子。

<u>例題 1</u>　求三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 能作成一三角形(圖 9)所必需適合的條件。

由圖可知所欲求的條件必爲

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0,$$

因爲此時，也僅有此時，折線 $BCAB$ 才爲封閉折線而成一三角形。

<u>例題 2</u>　證明以等於且平行於已知三角形 ABC(圖 10)三中線的三直線爲邊可作成一三角形。

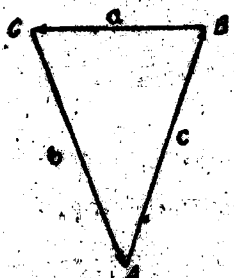

圖 9

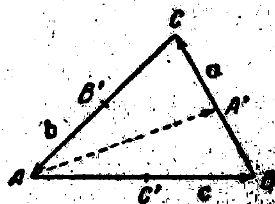

圖 10

相繼以 A'，B' 及 C' 表三邊 BC，CA 及 AB 的中點，以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 表示三角形三邊的向量，即 $\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$ 及 $\overline{CC'}$ 表示三角形的三中線，則得例如 $\overline{AA'}$：

$$\overline{AA'}=\overline{AB}+\overline{BA'}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a},$$

因爲

$$\overline{BA'}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\vec{a}\text{。}$$

輪互置換之(即以 $\vec{b}$ 代 $\vec{a}$，$\vec{c}$ 代 $\vec{b}$，$\vec{a}$ 代 $\vec{c}$)得

$$\overline{BB'}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overline{CC'}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

由例題 1 的條件，可知 $\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$ 可作成一三角形，因

$$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

適合於例題1的條件，所以，以 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 及 $\overline{CC'}$ 爲邊確可作成一三角形。

在涉及其他例題之先，必須先提一些對我們來說是很必要的概念。

空間中任意一點 P 的位置可以向量 $\overline{OP}$ 決定，用一定方法選定 O 點爲向量的始點，而 P 爲終點，向量 $\overline{OP}$ 將稱之爲 P 點對於 O 點的向徑，並以 $\vec{r}$ 表示之。爲簡便計，由向徑 $\vec{r}$ 所表示的 P 點，以後將稱之爲 $P(\vec{r})$ 點。

例題 3 已知兩點 $A(\vec{r}_1)$ 及 $B(\vec{r}_2)$，求線段 AB 的中點 C 的向徑。

由計算得

$$\vec{r}=\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}+\frac{1}{2}(\overline{OB}-\overline{OA})$$

$$=\vec{r}_1+\frac{1}{2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)。\tag{18}$$

例題 4 若四邊形的兩對角線相互平分，則此四邊形爲平行四邊形。

令四邊形 $ABCD$ 的四頂點的向徑相繼爲 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$，則對角線 AC 的中點的向徑爲

$$\vec{r}'=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_3),$$

而對角線 BD 的中點的向徑爲

$$\vec{r}''=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_4),$$

但因對角線爲相互平分，故其中點必重合，由此即得

$$\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_3)=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_4),$$

或

$$\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{r}_3-\vec{r}_4,$$

即是說，向量 $\overline{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ 等於且平行於向量 $\overline{DC}=\vec{r}_3-\vec{r}_4$，所以 $ABCD$