KAOYAN SHUXUE CHONGCI

考研数学冲刺

李　林　冯敬海　蒋志刚　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

KAOYAN SHUXUE CHONGCI

考研数学冲刺

李　林　冯敬海　蒋志刚　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学冲刺 / 李林,冯敬海,蒋志刚编著．—大连:大连理工大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-5611-4501-2

Ⅰ．考… Ⅱ．①李… ②冯… ③蒋… Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 156005 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:8.75 字数:193 千字
2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:骁 杰
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4501-2 定 价:23.80 元

前　言

《考研数学冲刺》是《大学数学辅导》的姊妹篇。已出版的《大学数学辅导》为考研第一阶段复习用书，可以使考生全面、系统地掌握考研大纲所要求的基本概念、基本定理、基本方法；本书为考生第二阶段训练用书，可以用来检查考生第一阶段的复习效果，查漏补缺，积累临场经验，提高应试水平。

本书的特点：

1. 本书按数学(一)、数学(二)、数学(三)设计了九套试卷，每套试卷的题型和题量与考研试题一致，涵盖考试大纲所要求的知识点。通过本书的训练，相信能提高您的应试能力。

2. 试卷中的选择题、填空题与解答题有详细规范的解答。选择题与填空题着重考查对“三基”的理解和运用，解答题体现了考试重点和难点内容，综合性比较强。

考研是有大纲的选拔性考试，命题强调知识的整体性和综合性，尽量避免繁难和偏怪的试题，并设计不同层次、不同要求的试题，具有一定区分度，要求考生能够对知识的迁移和运用灵活自如，具有一定数学综合应用的能力。值得注意的是，考生切忌放松对基础知识的复习，对基础知识的掌握程度的考查是考试的重要目的。

《考研数学冲刺》所设计的试题具有很强的针对性，相信能给考生带来意外的惊喜。

编者

2008 年 10 月

目　录

数学(一)模拟试卷(Ⅰ)

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内.)

(1)设 $\alpha(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\beta(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$,$f(x)>0$ 且 $f(x)$ 可导,则当 $x\to0^+$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的

A. 等价无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 同阶但不等价无穷小

[　　]

(2)设 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内有定义,则 $F(x)=f(x)|\sin x|$在 $x=0$ 可导的充要条件是

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在

B. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$均存在,且$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)+\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

D. $f(x)$在 $x=0$ 处可导

[　　]

(3)下列广义积分发散的是

A. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

[　　]

(4)设区域 $D:x^2+y^2\leqslant1$,常数 $k\neq0$,则积分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(e^{kr\cos\theta}-e^{-kr\sin\theta})r\mathrm{d}r$$

A. $I>0$　　B. $I<0$　　C. $I=0$　　D. I 的值与 k 有关

[　　]

(5)设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$.则下列命题

①若向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,且 $s<t$,则必有(Ⅰ)线性相关

②若向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示,且 $s<t$,则必有(Ⅰ)线性相关

③若向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,且(Ⅰ)线性无关,则必有 $s\geqslant t$

④若向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示且(Ⅰ)线性无关,则必有 $s\geqslant t$

正确的是

A. ①④　　B. ①③　　C. ②③　　D. ②④

[　　]

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为(　　)

A. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的一个向量组

B. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 且 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $\boldsymbol{B\alpha}_1,\boldsymbol{B\alpha}_2,\boldsymbol{B\alpha}_3$,其中 $\boldsymbol{B}_{3\times3}$为可逆矩阵

D. $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}_{3\times3}$为可逆矩阵

[　　]

(7)设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体 $X\sim N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$ 与 S 分别表示样本均值和样本方差,则

A. $\overline{X}\sim N(0,1)$　　B. $\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^2\sim\chi^2(n)$　　C. $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　D. $\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$

[　　]

(8)在假设检验中,检验水平 α 的意义是

A. 原假设 H_0 成立,经检验 H_0 被拒绝的概率

B. 原假设 H_0 成立,经检验 H_0 不能被拒绝的概率

C. 原假设 H_0 不成立,经检验 H_0 被拒绝的概率

D. 原假设 H_0 不成立,经检验 H_0 不能被拒绝的概率

[　　]

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(9)函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$______.

(10)设常数 $a>0$,L 为摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant2\pi)$,则积分 $I=\int_L y\mathrm{d}s=$______.

(11)设在区域 D:$x>0,y>0$ 内$(x^2+y^2)^{-2}[(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y]$为某函数 $u(x,y)$的全微分,则 $a+b=$______.

(12)微分方程 $yy''-(y')^2=y^4$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解为______.

(13)设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 为三维列向量,$\boldsymbol{A}=(\xi_1,\xi_2,\xi_2+2\xi_3-\xi_4)$,$\boldsymbol{B}=(\xi_3,\xi_2,\xi_1)$,$\boldsymbol{C}=(\xi_1+2\xi_2,2\xi_2+3\xi_4,\xi_4+3\xi_1)$,且$|\boldsymbol{B}|=1$,$|\boldsymbol{C}|=20$,则$|\boldsymbol{A}|=$______.

(14)设某人进行投篮试验,每次投中的概率都是 p,则他三次没有投中在两次投中之前的概率为______.

三、解答题(15～23 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设等腰三角形区域 $D=\{(x,y)\mid0\leqslant y\leqslant2,-y\leqslant x\leqslant y\}$,$D$ 绕直线 $y=t(0\leqslant t\leqslant2)$旋转所得旋转体积 $V(t)$最小.

(Ⅰ)求 t 的值;

(Ⅱ)求此最小体积 $V(t)$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$在$[-a,a]$上非负连续，且 $f'(0)=1$，若对任意 $x\in(0,a)$，在$[0,x]$与$[-x,0]$上以 $f(x)$为曲边的曲边梯形面积之差为 $\arctan x^2$.

(Ⅰ)证明：至少存在 $\theta\in(0,1)$，使 $\arctan x^2=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

(Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

(17)(本题满分 10 分)

计算积分 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去 L 是逆时针.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$在 $x=0$ 的邻域$(-\delta,\delta)(\delta>0)$内有定义,对该邻域内任意两点 x,y 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,且 $f'(0)=1$.

(Ⅰ)证明 $f(x)$在$(-\delta,\delta)$内可导,并求 $f(x)$表达式;

(Ⅱ)记 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)$,求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$ 的和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 V 为平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1(a,b,c$ 均大于 $0)$与三个坐标面所围的四面体区域.

(Ⅰ)计算 $I(a,b,c)=\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V$;

(Ⅱ)若 $a+b+c=1$,求 a,b,c 的值使 $I(a,b,c)$为最大,并求最大值.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 3 & -3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{3\times 3},\boldsymbol{Q}_{4\times 4}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 为实对称矩阵,且 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=2$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均正交,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)用正交变换化二次型为标准形,并求所作正交变换;

(Ⅱ)求该二次型.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从 $p=0.6$ 的 0—1 分布,Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases},$$

记 $Z=X-Y$.

(Ⅰ)求 $P\{Z\leqslant \frac{-1}{2}\mid X=0\}$;

(Ⅱ)求 Z 的分布函数.

(23)(本题满分 11 分)

设某种灯泡寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,μ 与 σ^2 为未知参数,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 X 的简单随机样本值.

(Ⅰ)求 μ 与 σ^2 的最大似然估计值;

(Ⅱ)若从某天生产的灯泡中任取 10 只,测得其寿命(单位:小时)的均值为 $\bar{x}=997.1$,求该天生产的灯泡能使用 1200 小时以上的概率.(已知 $\Phi(1.625)=0.978$)

数学(一)模拟试卷(Ⅰ)参考答案

一、选择题

(1)D.

解 因$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{2f(x)+xf'(x)}=\frac{1}{2},$$
故 D 正确.

(2)B.

解 $$F(x)=\begin{cases}-f(x)\sin x & x\leqslant 0\\ f(x)\sin x & x>0\end{cases},$$
$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0-),$$
$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0+),$$
由 $F(x)$在 $x=0$ 可导$\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)\Leftrightarrow -f(0-)=f(0+)$,故 B 正确.

(3)C.

解 由
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x},$$
又$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_0^1$ 发散,故 C 正确.

由广义积分定义或判别法可知 A、B、D 均收敛.

(4)C.

解 化积分为直角坐标得
$$I=\iint_D(\mathrm{e}^{kx}-\mathrm{e}^{-ky})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
由 D 关于直线 $y=x$ 对称,知
$$\iint_D\mathrm{e}^{-ky}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
又 $\mathrm{e}^{kx}-\mathrm{e}^{-kx}$ 为 x 的奇函数,且 D 关于 y 轴对称. 所以有
$$I=\iint_D(\mathrm{e}^{kx}-\mathrm{e}^{-kx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$
故 C 正确.

(5)B.

解 由“以少表多”，则“多的相关”知①正确，而③是①的逆否命题. 故①、③正确. 如，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关.

(6)D.

解 由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{C}$ 可逆，故

$$r[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}]=r[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)]=3,$$

且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O},$$

所以，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，且线性无关. 因此，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 D 正确.

对于 C，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_3$ 不一定是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解($\boldsymbol{AB}\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$).

对于 B，秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$与秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$相等的 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不一定是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

对于 A，与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的向量组中向量个数可能超过 3，当向量个数超过 3 时，它们线性相关，故不是基础解系.

(7)B.

解 因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，$X_i\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$. 所以，$X_i^2\sim\chi^2(1)$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^2\sim\chi^2(n)$. 故 B 正确.

(8)A.

解 由 $P\{$拒绝 $H_0\mid H_0$ 为真$\}=\alpha$，知 A 正确.

二、填空题

(9)$\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

解 $f(x)$的麦克劳林展式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

于是

$$\begin{aligned}x^2\ln(1+x)&=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})\right]\\&=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n-2}+o(x^n),\end{aligned}$$

比较 x^n 的系数，得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2},$$

故

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

(10)$\dfrac{32a^2}{3}$.

解
$$I=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{32a^2}{3}.$$

(11) -2.

解 记
$$P(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}(y^2+2xy+ax^2),$$
$$Q(x,y)=-(x^2+y^2)^{-2}(x^2+2xy+by^2).$$

由已知
$$\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$
则有
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\mathrm{d}y},$$
可得
$$\frac{2y+2x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4y(y^2+2xy+ax^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-(2x+2y)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x(x^2+2xy+by^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
即
$$(x+y)(x^2+y^2)-y(y^2+2xy+ax^2)=x(x^2+2xy+by^2),$$
故
$$(a+1)x^2y+(b+1)xy^2=0.$$
由 $xy\neq0$,得
$$(a+1)x+(b+1)y=0,$$
得 $a=-1,b=-1$. 故 $a+b=-2$.

(12) $y=\dfrac{1}{1-x}$.

解 方程不显含 x,令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入方程得
$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=y^4,$$
即
$$\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}y}-\frac{2p^2}{y}=2y^3,$$
故
$$p^2=\mathrm{e}^{2\ln|y|}\left[\int 2y^3\mathrm{e}^{-2\ln|y|}\mathrm{d}y+c_1\right]$$
$$=y^2\left[\int 2y\mathrm{d}y+c_1\right]=y^2(y^2+c_1).$$

由已知 $y'(0)=1,y(0)=1$,得 $c_1=0$,所以 $p=y^2$. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$,得 $y=\dfrac{-1}{x+c_2}$,由已知条件可得 $c_2=-1$,故 $y=\dfrac{1}{1-x}$.

(13) -3.

解 由行列式的性质有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=|\xi_1,\xi_2,\xi_2+2\xi_3-\xi_4|=|\xi_1,\xi_2,2\xi_3-\xi_4|\\&=|\xi_1,\xi_2,2\xi_3|-|\xi_1,\xi_2,\xi_4|\\&=-2|\xi_3,\xi_2,\xi_1|-|\xi_1,\xi_2,\xi_4|\\&=-2-|\xi_1,\xi_2,\xi_4|.\end{aligned}$$

又由

$$\boldsymbol{C}=(\xi_1+2\xi_2,2\xi_2+3\xi_4,\xi_4+3\xi_1)=(\xi_1,\xi_2,\xi_4)\begin{pmatrix}1&0&3\\2&2&0\\0&3&1\end{pmatrix},$$

等式两边取行列式有

$$|\boldsymbol{C}|=|\xi_1,\xi_2,\xi_4|\begin{vmatrix}1&0&3\\2&2&0\\0&3&1\end{vmatrix}=20|\xi_1,\xi_2,\xi_4|.$$

由 $|\boldsymbol{C}|=20$，得 $|\xi_1,\xi_2,\xi_4|=1$，故 $|\boldsymbol{A}|=-3$.

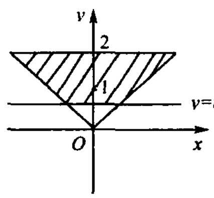
(14) $C_4^1\cdot p(1-p)^3\cdot p$.

解 令 $A=\{$三次没投中在两次投中之前$\}$，$A_1=\{$前四次投中一次$\}$，$A_2=\{$第五次投中$\}$. 由已知，A_1 与 A_2 相互独立，且 $A=A_1\cdot A_2$，故

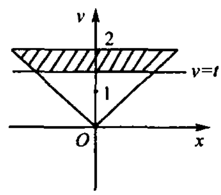
$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=C_4^1p(1-p)^3\cdot p.$$

三、解答题

(15) **解** （Ⅰ）分 $0\leqslant t\leqslant 1$，$1<t\leqslant 2$ 讨论，如图(a)、(b)所示.



(a)



(b)

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$V(t)=2\pi\int_t^2(y-t)y\mathrm{d}y=2\pi\left(\frac{8}{3}-2t+\frac{t^3}{6}\right).$$

当 $1<t\leqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}V(t)&=2\pi\int_0^{2t-2}(t-y)y\mathrm{d}y+2\pi\int_t^2(y-t)y\mathrm{d}y\\&=2\pi\left(\frac{16}{3}-8t+4t^2-\frac{t^3}{2}\right).\end{aligned}$$

（Ⅱ）
$$V'(t)=\begin{cases}2\pi\left(-2+\dfrac{t^2}{2}\right) & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2\pi\left(-\dfrac{3}{2}t^2+8t-8\right) & 1<t\leqslant 2\end{cases}.$$

令 $V'(t)=0$，得 $t=\frac{4}{3}$，当 $0<t<\frac{4}{3}$ 时，$V'(t)<0$，当 $\frac{4}{3}<t<2$ 时，$V'(t)>0$，故

$$V_{\min}=V\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{32\pi}{27}.$$

(16)**解** (Ⅰ)由已知得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t=\arctan x^2.$$

对 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,x]$ 上应用 Lagrange 定理，

$$F(x)-F(0)=F'(\theta x)(x-0),\quad \theta\in(0,1)$$

得

$$\arctan x^2=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)有

$$\frac{\arctan x^2}{2x^2}=\frac{x[f(\theta x)-f(-\theta x)]}{2x^2\theta}\cdot\theta.$$

当 $x\to0^+$ 时，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2x\theta}\cdot\theta&=\lim_{x\to0^+}\theta\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2x\theta}\\&=\lim_{x\to0^+}\theta\cdot\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{2x\theta}+\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-2x\theta}\right]\\&=\left[\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)\right]\lim_{x\to0^+}\theta=f'(0)\lim_{x\to0^+}\theta,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\theta=\frac{1}{2}.$$

(17)**解** 应用 Stokes 公式，平面 $\Sigma: x+y+z=2$ 的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1&1&1\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\&=\frac{-2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(4x+2y+3z)\mathrm{d}S\\&=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中，D_{xy} 为 Σ 在 xOy 上的投影区域，由对称性得

$$\iint\limits_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

所以

$$I = -2\iint\limits_{D_{xy}} 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -12\times 2 = -24.$$

(18)**解**　(Ⅰ)由已知等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+1,$$

得

$$f(0)=-1,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)+1-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)=1,$$

即

$$f'(x)=1,$$

故

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = x-1.$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-1\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n.$$

令

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n},$$

则

$$s_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{x+1},\quad |x|<1$$

故

$$s_1(x) = s_1(0) + \int_0^x \frac{-1}{1+t}\mathrm{d}t = -\ln(1+x).$$

又

$$s_1(0) = 0,$$

所以

$$s_1(x) = -\ln(1+x).$$

又

$$s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n = \frac{x}{x+1},\quad |x|<1$$