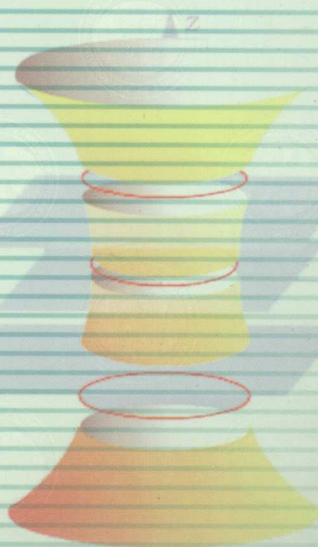


高等学校教学参考书

高等数学 学习辅导

第三版

◎ 主编 马铭福 亓 健 费祥历



中国石油大学出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习辅导

(第三版)

马铭福 亓健 费祥历 主编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/马铭福等主编.—3版.—东营:中
国石油大学出版社,2008.4

ISBN 978-7-5636-2564-2

I. 高… II. 马… III. 高等数学—高等学校—教学参考
资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033529 号

(第三版)

编主 马铭福 费祥历 费祥历

书 名:高等数学学习辅导(第三版)
作 者:马铭福 仵 健 费祥历

责任编辑:宋秀勇 刘 清(电话 0546—8392139)

封面设计:九天设计

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网 址:<http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱:yibian8392139@163.com

印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0546—8392563)

开 本:170×225 印张:27.625 字数:535 千字

版 次:2008 年 1 月第 3 版第 1 次印刷

定 价:29.80 元

第三版前言

高等数学是高等工科院校最主要的基础理论课之一。学生学好高等数学的基本概念、基本理论、基本运算和分析问题的思想方法,不仅对其他课程的学习是十分必要的,而且对他们以后的提高和发展都有深远影响。目前在高等数学的教学过程中,高等数学课时普遍缩减,而后续专业课程和考研究生等,对学生学习这门课又有较高的要求。为了帮助学生学好高等数学,提高学习效率,解决疑难问题,加强自学辅导,我们编写了这本《高等数学学习辅导》。

本书的第二版已经经历了四年的教学实践,适合教学工作的需要,对高等数学课程教学质量的提高起了重要作用,深受广大教师和学生的欢迎。本书的第三版,是根据我们多年的教学改革与实践经验,进行了全面修订而成。在修订中,我们保留了原书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂的风格,同时注意吸收近几年教学改革中的成果,使得新版更适合当前教学的需要,成为适应时代要求又继承传统优点的教学参考书。

本书与教材《高等数学》(上、下册,第三版,中国石油大学出版社出版)相配套,以国家教委颁发的高等学校工科《高等数学课程教学基本要求》为依据,总结了高等数学课程各章节的主要内容和基本要求;精选了各种类型的例题进行解题分析;针对学生学习高等数学中的疑难问题,给予深入具体的指导解答;对《高等数学》教材中较难的习题,给出了解题提示或答案;配合教学内容,补充了较大信息量的综合性强难度大的练习题,并给出提示或解答。本书的许多内容,是长期执教高等数学的教师所积累的宝贵教学经验的总结,也是对教材内容的补充和扩展。这些内容,对于指导学生高等数学学习,正确理解有关概念,澄清模糊认识,加强基本运算的训练,提高学习成绩,培养创新能力和素质,都是非常重要的。

为了读者学习方便,本书的内容安排与教材《高等数学》(第三版)同步,每章内容体例格式完全按照教材的章节编写。在撰写每一章时,都是根据学生已有的知识积累,采用“滚雪球”的方式进行。体现了由浅入深,循序渐进,综合性逐渐加大的特点。因而特别有利于学生学习使用。本书也可以作为习题课教材或教师的教学参考书,书中例题及练习与教材中例题及练习基本不重复。为了使学生了解教学要求和不同类型考试要求,本书还编写了附录,附录部分包括了不

同类型考试的试题,并附有答案。

本书由多年从事高等数学教学工作的马铭福、亓健、费祥历主编。第2、3、7、8章和附录由马铭福编写;第4、5、9、11章由亓健编写;第1、6、10章由费祥历编写。

“高等数学”课程组的教师们一直关心和支持本书的编写出版。教师吕巍然、孙清滢、张丹青、何苏阳、白占兵、闫统江、吕炜、侯英敏、吴大焕、丁永臻、金贵荣、张爱芹、崔俭春、排新颖、纪凤辉、左文杰、李锋杰、陈永刚、李小平、孙新国、智红燕、牛其华、于娟、孙建国、吴淑君、吕川、王静、吴瑞华、赵旭波、刘新海、陈华、胡哲、王媛媛、张会娜、李洪芳、乔田田、纪艳菊、郭会、王娟、张品、渐令、李磊、石丽娜、葛菊、孙玉花、刘珊、王际朝等为本书的编写提供了颇多的建设性意见。

在本书的编写过程中,张广禄教授、王子亭教授、李维国教授、宋光兴教授、张鲁明教授、徐振贤教授、霍守成教授提出了许多宝贵的建议。中国石油大学(华东)教务处、数学与计算科学学院和中国石油大学出版社对本书的编写出版给予了大力支持,我们在此表示衷心感谢。

我们真诚希望《高等数学学习辅导》(第三版)能够成为广大读者的知心朋友。但由于水平所限,加之时间仓促,本书中的疏误之处在所难免,恳请各位读者及同行不吝赐教。

编者

2007年12月

目 录

第1章 函数与极限	(1)
一、基本内容	(1)
二、基本要求	(5)
三、典型例题分析	(6)
四、疑难解答	(18)
五、练习题	(22)
六、练习题简解或答案	(25)
七、《高等数学》第1章习题提示	(27)
第2章 一元函数的导数与微分	(34)
一、基本内容	(34)
二、基本要求	(36)
三、典型例题分析	(37)
四、疑难解答	(52)
五、练习题	(57)
六、练习题简解或答案	(60)
七、《高等数学》第2章习题提示	(63)
第3章 微分中值定理与导数的应用	(67)
一、基本内容	(67)
二、基本要求	(70)
三、典型例题分析	(70)
四、疑难解答	(87)
五、练习题	(93)
六、练习题提示或答案	(95)
七、《高等数学》第3章习题提示	(97)
第4章 不定积分	(107)
一、基本内容	(107)
二、基本要求	(109)
三、典型例题分析	(109)
四、疑难解答	(122)

五、练习题	(126)
六、练习题简解或答案	(130)
七、《高等数学》第4章习题提示	(133)
第5章 定积分及其应用	(137)
一、基本内容	(137)
二、基本要求	(143)
三、典型例题分析	(143)
四、疑难解答	(159)
五、练习题	(166)
六、练习题简解或答案	(170)
七、《高等数学》第5章习题提示	(172)
第6章 微分方程与差分方程	(177)
一、基本内容	(177)
二、基本要求	(186)
三、典型例题分析	(187)
四、疑难解答	(203)
五、练习题	(207)
六、练习题简解或答案	(210)
七、《高等数学》第6章和第12章习题提示	(214)
第7章 空间解析几何与向量代数	(223)
一、基本内容	(223)
二、基本要求	(227)
三、典型例题分析	(228)
四、疑难解答	(246)
五、练习题	(253)
六、练习题提示或答案	(255)
七、《高等数学》第7章习题提示	(257)
第8章 多元函数微分学	(262)
一、基本内容	(262)
二、基本要求	(267)
三、典型例题分析	(267)
四、疑难解答	(288)
五、练习题	(295)
六、练习题提示或答案	(297)

七、《高等数学》第 8 章习题提示	(300)
第 9 章 多元数量值函数的积分学	(308)
一、基本内容	(308)
二、基本要求	(313)
三、典型例题分析	(314)
四、疑难解答	(332)
五、练习 题	(335)
六、练习题简解或答案	(339)
七、《高等数学》第 9 章习题提示	(340)
第 10 章 向量值函数的积分学	(346)
一、基本内容	(346)
二、基本要求	(350)
三、典型例题分析	(351)
四、疑难解答	(364)
五、练习 题	(366)
六、练习题简解或答案	(370)
七、《高等数学》第 10 章习题提示	(373)
第 11 章 无穷级数	(380)
一、基本内容	(380)
二、基本要求	(385)
三、典型例题分析	(385)
四、疑难解答	(400)
五、练习 题	(402)
六、练习题简解或答案	(407)
七、《高等数学》第 11 章习题提示	(410)
附录 高等数学试题选	(417)
Ⅰ. 中国石油大学(华东)期末试题	(417)
Ⅱ. 中国石油大学(华东)第 21 届高等数学竞赛题	(426)
Ⅲ. 2006 年硕士研究生入学考试高等数学试题	(428)

第1章 函数与极限

一、基本内容

1. 基本概念

(1) 函数的定义: 设 $D \subset \mathbf{R}$ 是一非空数集, f 是一个确定的法则, 如果 $\forall x \in D$, 通过法则 f , 存在唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与 x 相对应, 则称由 f 确定了一个定义于 D 上, 取值于 $\mathbf{R}$ 的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, f 为对应法则, D 为定义域, $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

平面点集 $G = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的图形, 一般情况下, G 是 xOy 平面上一条曲线.

(2) 函数的四个初等性质:

函数的有界性: 设函数 $y = f(x), x \in D$. 如果存在常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in D$, 就称 f 在 D 上有界, 否则称 f 在 D 上无界.

函数的无界性可叙述为: $\forall M > 0, \exists x_0 \in D$, 使得

$$|f(x_0)| > M.$$

函数的单调性: 设函数 $y = f(x), x \in D$. 如果 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) < (>) f(x_2)$, 就称 f 在 D 上单调递增(单调递减). 单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数.

函数的奇偶性: 设函数 $y = f(x), x \in D$, 定义域 D 关于原点 O 对称(即 $x \in D \Rightarrow -x \in D$). 如果 $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$, 称 f 为奇函数; 如果 $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, 称 f 为偶函数.

函数的周期性: 设函数 $y = f(x), x \in D$, 如果存在常数 $T \neq 0$ 使 $\forall x \in D, x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 称 f 为周期函数, T 称为 f 的一个周期. f 的最小的正周期简称为 f 的周期.

(3) 函数的初等运算:

四则运算: 设 $f_1: D_1 \rightarrow \mathbf{R}, f_2: D_2 \rightarrow \mathbf{R}$ 是两个函数, $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

和 $f_1 + f_2: (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \forall x \in D$.

差 $f_1 - f_2: (f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x), \forall x \in D$.

积 $f_1 \cdot f_2: (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x), \forall x \in D$.

商 $\frac{f_1}{f_2}: \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \forall x \in D - \{x | f_2(x) = 0\}$.

复合运算: 设 $y = f(u), u \in D_1, u = \varphi(x), x \in D$, 如果对任意的 $x \in D, u = \varphi(x) \in D_1$, 则由 φ 与 f 确定了 y 与 x 之间的一个函数关系, 称为 φ 与 f 的复合函数, 记为 $f \circ \varphi$, 即 $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$.

反函数运算: 设函数 $f: D \rightarrow W$ 是一一对应, 即 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 且 $\forall y \in W, \exists x \in D$ 使 $y = f(x)$, 则由 f 确定了从 W 到 D 的一个函数: 对 $y \in W$, 如 x (这个 x 是唯一的) 使 $y = f(x)$, 则让 x 与 y 对应, 这个函数称为 f 的反函数, 记为 f^{-1} , 即 $x = f^{-1}(y), y \in W$. 显然有

$$\forall x \in D, (f^{-1} \circ f)(x) = x; \forall y \in W, (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

习惯上, 用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, $y = f(x)$ 的反函数一般记为 $y = f^{-1}(x)$.

(4) 极限定义:

ϵ - N 定义: 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个常数, 如果 $\{a_n\}$ 与 a 之间有如下关系: “对任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 对一切 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \epsilon$ ”, 就称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , a 为 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon.$$

a 不是 $\{a_n\}$ 的极限可叙述为

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0 > N, |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$$

数列 $\{a_n\}$ 不收敛可叙述为

$$\forall a > 0, \exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0 > N, |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$$

ϵ - X 定义: 设 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, 对某个 $a > 0, (-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \subset D$, A 是一个常数, 如果函数 $f(x)$ 与 A 满足关系: “对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $X \geq a, \forall |x| > X, |f(x) - A| < \epsilon$ ”, 就称当 x 趋于无穷时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X \geq a, \forall |x| > X, |f(x) - A| < \epsilon.$$

类似地有极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义及极限不存在的定义.

ϵ - δ 定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, A 是一个常数, 如果 $f(x)$ 与 A 有关系: “对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$ ”, 就称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

类似地有左、右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义及极限不存在的定义.

(5) 无穷小与无穷大的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为当 x 趋于 x_0 时的无穷小. 如果对任意 $M > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$, 就称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时是无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

类似地定义 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$ 时的无穷小及无穷大.

(6) 函数的连续与间断:

函数的连续性: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性有下列三种等价说法:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$f(x)$ 在 x_0 点的间断性: 如果极限式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立, 称 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点. 设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在, 则称 x_0 为第一类间断点, 否则 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

* (7) 一致连续性: 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 就称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

2. 基本定理与重要结论

(1) 单侧极限与双侧极限的关系定理:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \end{aligned}$$

(2) 数列极限与子列收敛性的关系定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 对 $\{a_n\}$ 的任一子列 $\{a_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \Leftrightarrow$ 对 $\{a_n\}$ 的奇子列 $\{a_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{a_{2n}\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$.

(3) 单调有界原理: 单调有界数列必有极限.

(4) 函数极限与数列极限的关系定理(海涅定理):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \text{对 } x_0 \text{ 的某去心邻域内的收列于 } x_0 \text{ 的任一数列 } \{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

(5) 无穷小与函数极限的关系定理: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是

$x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(6) 夹逼定理: 设在 x 的变化过程中有不等式 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 及极限 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. (e = 2.718281828459045 \dots)$$

(7) 求极限的等价无穷小代换定理: 设无穷小 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

(8) 极限的四则运算性质: 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ 存在, 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB.$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

(9) 连续函数的运算定理: 连续函数的初等运算[四则运算(除法中分母为零的点除外)、复合运算、反函数运算]保持函数的连续性.

(10) 初等函数的连续性: 基本初等函数在定义域内连续; 初等函数在定义区间(包含在定义域内的区间)内连续.

(11) 闭区间上连续函数的性质定理:

最值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能取到最大值与最小值. 即 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ 使 $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \forall x \in [a, b]$.

有界性定理: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

零点定理: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

连通性定理(介值定理): 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则

$$f([a, b]) = [m, M],$$

即对每个 $C \in (m, M)$, $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = C$.

* 一致连续性定理: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

3. 一些常用结论

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} +\infty, & |r| > 1, \\ 1, & r = 1, \\ 0, & |r| < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \infty, & n > m, \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时有等价无穷小:

$$\sin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \arctan x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0); \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; \quad (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

$$(4) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1;$$

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^n n!;$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n;$$

$$a^n - b^n = (a-b)[a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}];$$

$$a^n + b^n = (a+b)[a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}] (n \geq 3, \text{为奇数}).$$

$$(5) \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \text{ 设 } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x > 0 \text{ 时取} + \text{号}, x < 0 \text{ 时取} - \text{号}.$$

二、基本要求

(1) 理解^①有关函数的基本概念:函数的定义;函数的初等运算及函数的初

^① 必须深入理解,牢固掌握,熟练应用的,概念用“理解”一词表示,方法、运算用“掌握”一词表述.在教学要求上低于前者的,概念、理论用“了解”一词表述,方法、运算用“会”或“了解”表述.以后各章基本要求的表述方法与此相同.

等性质;基本初等函数、初等函数、分段函数的含义.理解函数在一点处连续及区间上连续的定义;理解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义及函数极限的 $\epsilon-X$ 定义, $\epsilon-\delta$ 定义.

(2) 了解无穷小、无穷大以及无穷小阶的概念,会用等价无穷小及无穷小的性质求极限;了解两个极限存在准则(单调有界原理、夹逼定理);了解间断点的概念,会判断间断点的类型;了解初等函数的连续性,会用函数连续性求极限.

(3) 掌握基本初等函数的性质与图形;掌握极限的四则运算性质,了解极限的唯一性、保号性、不等式性质;掌握闭区间上连续函数的性质定理(有界定理、最值定理、零点存在定理及连通性定理).

(4) 会求函数的定义域,会根据定义判断函数的初等性质,会建立简单的函数关系;会用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 求极限;会利用等价无穷小代换求极限;会用极限定义证明一些简单的极限.

三、典型例题分析

例1 求函数的定义域:

(1) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2} + \arcsin \lg \frac{x}{10}$;

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, 求 $f(\sin 2x)$ 的定义域;

(3) $g(x) = \sqrt{\sin x - 1}$.

解 (1) 使 $f(x)$ 有意义的 x 必须满足:

$$\begin{cases} 2+x-x^2 \geq 0, \\ \left| \lg \frac{x}{10} \right| \leq 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} (2-x)(1+x) \geq 0, \\ -1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1, \end{cases}$$

由 $(2-x)(1+x) \geq 0$ 得 $-1 \leq x \leq 2$, 由 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$ 得 $1 \leq x \leq 100$, 从而函数 $f(x)$ 的定义域为 $1 \leq x \leq 2$.

(2) 由题设知, 函数 $f(\sin 2x)$ 应满足 $0 < \sin 2x < 1$, 从而

$$2n\pi < 2x < (2n+1)\pi \quad \text{且} \quad 2x \neq 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n=0, \pm 1, \dots).$$

因此 $n\pi < x < \frac{(2n+1)\pi}{2}$ 且 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{4} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(3) $g(x) = \sqrt{\sin x - 1}$, $\sin x - 1 \geq 0$, 只有满足 $\sin x = 1$ 的 x , $g(x)$ 有意义, 得定义域

$$D = \left\{ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

注 由于高等数学(如无特别申明)主要是在实数范围内讨论问题,因此要函数有定义,负数不能开偶次方, $\arcsin x, \arccos x$ 的自变量 x 满足 $|x| \leq 1$, 对数函数的真数必须为正, 零不能作除数等.

例2 求函数的表达式:

(1) 设 $y = \frac{1}{2x}f(t-x), y|_{x=1} = \frac{t^2}{2} - t + 5$, 求 $f(x)$;

(2) $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1), z|_{y=1} = x$, 求 $f(x)$ 及 z 的表达式;

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ x^2 + 1, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$;

(4) $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$, 求 $y(x)$ 的反函数.

解 (1) 由题设得 $\frac{t^2}{2} - t + 5 = \frac{1}{2}f(t-1)$,

即 $f(t-1) = t^2 - 2t + 10 = (t-1)^2 + 9$,

令 $t-1 = x$, 得 $f(x) = x^2 + 9$.

(2) 将 $y=1, z=x$ 代入 z 的表达式得

$$x = 1 + f(\sqrt[3]{x} - 1)$$

令 $\sqrt[3]{x} - 1 = t, x = (t+1)^3$, 从而 $(t+1)^3 - 1 = f(t)$,

即 $f(x) = (x+1)^3 - 1, z = \sqrt{y} + x - 1$.

(3) 当 $0 < |x| < 1$ 时, $|f(x)| = \sqrt{1-x^2} < 1$, 从而

$$f[f(x)] = \sqrt{1-f^2(x)} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

当 $x=0$ 时, $|f(0)| = 1$, 从而 $f[f(0)] = [f(0)]^2 + 1 = 2$.

当 $|x| \geq 1$ 时, $|f(x)| = |x^2 + 1| > 1$, 从而

$$f[f(x)] = f^2(x) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.$$

综合之即知

$$f[f(x)] = \begin{cases} |x|, & 0 < |x| < 1, \\ 2, & x = 0, \\ x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(4) 从等式 $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$ 中解出 x ,

$$y + y\sqrt{1+4x} = 1 - \sqrt{1+4x}, \text{ 即 } \sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

$$x = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{y}{(1+y)^2},$$

改写 y 为 x, x 为 y 得反函数为 $y = -\frac{x}{(1+x)^2}$.

例 3 函数的初等性质:

(1) 判断 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在 $[0, 1)$ 上及 $[0, a]$ ($0 < a < 1$) 上的有界性;

(2) 判断函数 $f(x) = x + \sin x$ 的周期性;

(3) 判断函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性;

(4) 确定函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的单调区间.

解 (1) 当 x 小于 1 且无限趋于 1 时, $\sqrt{1-x}$ 无限趋于 0, 从而 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 无限增大, 因此 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上无界, 严格推证如下:

$\forall M > 0$, 令 $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{1-x}} > M$, 即 $\sqrt{1-x} < \frac{1}{M}$, $1-x < \frac{1}{M^2}$, $x > 1 - \frac{1}{M^2}$, 因此, 在区间 $(1 - \frac{1}{M^2}, 1)$ 内任取一个 x_M , 都可使 $f(x_M) > M$, 从而 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 内无界.

在 $[0, a]$ ($0 < a < 1$) 上有界. 事实上, 对一切 $x \in [0, a]$, $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}} = M$.

(2) $f(x)$ 不是周期函数. 事实上, 反设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则对一切 x 有 $f(x+T) = f(x)$, 即

$$x + T + \sin(x+T) = x + \sin x, T + \sin(x+T) = \sin x.$$

特别取 $x=0$ 得 $T + \sin T = 0$. 此式只有 $T=0$ 时才成立, 与周期函数定义矛盾.

$$(3) f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1-e^x}{1+e^x} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x} = f(x),$$

因此, $f(x)$ 是偶函数.

$$(4) \text{ 设 } x_1 < x_2, f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \\ = (x_2 - x_1) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right).$$

当 $x_1 x_2 > 0$ 即 x_1, x_2 同号时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$. 因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

例 4 证明下列极限结果的正确性:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \text{ 是正常数});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 1}) = 2;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x} = 0.$$

证明 (1) 任取 $\epsilon > 0$, 令

$$|a_n - A| = \left| n - \sqrt{n^2 - n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} - \frac{1}{2} \right| = \frac{n}{2(n + \sqrt{n^2 - n})^2} < \epsilon,$$

从这个不等式解 n 不易解, 但是有

$$\frac{n}{2(n + \sqrt{n^2 - n})^2} \leq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n},$$

令 $\frac{1}{2n} < \epsilon$, 可得 $n > \frac{1}{2\epsilon}$, 于是 $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{2\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| n - \sqrt{n^2 - n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n} < \epsilon,$$

由数列极限的 ϵ - N 定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \frac{1}{2}$.

(2) 任取 $\epsilon > 0$, 取定自然数 N_0 , 使 $N_0 \geq a$, 那么当 $n > N_0$ 时

$$\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N_0} \cdot \frac{a}{N_0 + 1} \cdots \frac{a}{n} \leq M \cdot \frac{a}{n},$$

其中 $M = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N_0}$ 是常数, $\frac{a}{N_0 + 1}, \frac{a}{N_0 + 2}, \dots, \frac{a}{n-1}$ 均小于 1, 令 $M \cdot \frac{a}{n} < \epsilon$, 得 $n > \frac{Ma}{\epsilon}$, 于是

$\forall \epsilon > 0, \exists N = \max \left\{ \left[\frac{Ma}{\epsilon} \right], N_0 \right\}$, 当 $n > N$ 时 $\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| < \epsilon$, 由数列极限的 ϵ - N 定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

(3) $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 \stackrel{\text{设}}{=} a$, 则 $\sqrt[n]{n} = 1 + a$, $a \geq 0$,

$$n = (1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a^2,$$

得 $a \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} (n \geq 2)$, 令 $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \epsilon$, 得 $n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$, 于是

$\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{2}{\epsilon^2} + 1 \right]$, 当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{n} - 1| = a < \epsilon$.

由 ϵ - N 定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(4) 对任意的 $\epsilon > 0$, 令

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &= |x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 1} - 2| \\ &\stackrel{|x| > 2}{=} \frac{3}{(x^2 - 2) + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 1}} \leq \frac{3}{(x^2 - 2)} < \epsilon, \end{aligned}$$