高等学校教材

高等数学习题课教程

杨金远　潘淑平　主编

战学秋　主审

Mathematics

化学工业出版社

高等学校教材

高等数学习题课教程

杨金远　潘淑平　主编
战学秋　主审

化学工业出版社
·北京·

本书是与同济大学编《高等数学》（第六版）相配套的习题课教程。不仅符合最新“高等数学”课程教学基本要求，同时比较充分地考虑了普通高等院校的实际教学环境。

全书内容包括：教学基本要求、内容提要、典型解题类型与习题精选、课堂练习题（分A题，B题）、课后作业、阶段测验和高等数学实验指导，书末附有参考答案与提示。

本书可作为普通高等院校工学、理学、经济学、管理学各相关专业本、专科“高等数学”课程习题课教学用书或教学参考书，也可作为“高等数学”课程学习、训练与提高的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程/杨金远，潘淑平主编. —北京：化学工业出版社，2008.12

高等学校教材

ISBN 978-7-122-03777-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①杨…②潘… Ⅲ. 高等数学-高等学校-习题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 149838 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：郝英华　尤彩霞

责任校对：洪雅姝　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 20　字数 489 千字　　2008 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.00 元

前　言

高等数学习题课是高等数学课程教学中实现教学基本要求，提高教学质量的重要环节。多年来，我们始终采用国家级规划教材——同济大学编的《高等数学》，并根据普通院校的实际教学环境自编高等数学习题课资料与之配套教学。本书是编者积累多年教学实践经验，作为高等数学精品课程建设内容之一，并充分考虑到普通高等院校大众化教育条件下高等数学课程分级教学的实际需要而编写的。力争反映我们高等数学精品课程的建设成果，体现创新教学理念，遵循有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力的原则。

全书由十三章组成。前十二章与同济大学编《高等数学》（第六版）相配套，每章内容包括：教学基本要求、内容提要、典型解题类型与习题精选、课堂练习题（分 A 题、B 题两个层次）、课后作业和阶段测验（作为附册），第十三章是为了满足学生尽早接触数学软件的实际需要而编写的高等数学实验指导。

本书第一章由林峰编写，第二、十三章由张秀兰编写，第三、七、十一章由潘淑平编写，第四章由杨春雨编写，第五、十二章由杨金远编写，第六、八章由赵瑛编写，第九章由李喜军编写，第十章由赵树魁编写。全书由杨金远、潘淑平负责统稿。

本书由战学秋教授主审，并提出了许多宝贵意见。本书得到了学校精品课程建设基金资助，以及有关方面的支持和帮助，谨在此一并表示衷心感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，诚望广大专家、同仁和读者对书中存在的问题给予批评指正。

编　者

2008 年 8 月

目　　录

第一章　函数与极限

本章教学基本要求

① 在中学已有函数知识的基础上，加深对函数概念的理解和函数性质（奇偶性、单调性、周期性）的了解．

② 理解复合函数的概念，了解反函数的概念．

③ 会建立简单实际问题中的函数关系式．

④ 理解极限的概念，了解极限 ε-N，ε-δ 的定义（不要求做给出 ε 求 N 或 δ 的习题）．

⑤ 掌握极限的有理运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限．

⑥ 了解极限的性质（唯一性、有界性、保号性）和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则），会用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限．

⑦ 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价无穷小求极限．

⑧ 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念．

⑨ 了解函数间断点的概念，会判别间断点的类型．

⑩ 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理．

一、内容提要

1. 函数的概念

设数集 $D\subset R$，则称映射 f：$D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为定义域．

2. 函数的几个重要特性

（1）有界性　设存在正数 M，使得对于一切 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界．

（2）单调性　若对于任意的 $x_1<x_2\in(a,b)$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加；若 $f(x_2)<f(x_1)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少．

（3）奇偶性　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 上有定义，若 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

（4）周期性　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．

3. 数列的极限

设 $\{x_n\}$ 为一个数列．如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限．

4. 收敛数列的性质

（1）极限的唯一性　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一．

（2）收敛数列的有界性　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它一定有界．

（3）收敛数列的保号性　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）．

（4）收敛数列与其子数列的关系　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a．

5. 函数的极限

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义．如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

定义 2　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义．如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

6. 函数极限的性质

（1）函数极限的唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则这个极限唯一．

（2）函数极限的局部有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

（3）函数极限的局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）函数极限与数列极限的关系　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，则相应的函数值 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

7. 极限运算法则

① 有限个无穷小的和也是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③ 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

a. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

b. $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

c. 若有 $B\neq 0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

④ 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\ \lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

则

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

c. 若有 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $B\neq 0$ 时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$.

⑤ 如果 $\varphi(x)\geqslant\Psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a,\lim\Psi(x)=b$，则 $a\geqslant b$.

⑥ 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$y=f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(x)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

8. 极限存在准则

准则Ⅰ 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$和$\{z_n\}$满足下列条件：

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$，

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

9. 两个重要极限

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

10. 几个常用的等价无穷小

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

11. 函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

或

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=f(x_0),$$

就称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续.

12. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

(2) 零点定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，则在开区间(a,b)内至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$.

(3) 介值定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$. 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=C\quad(a<\xi<b).$$

二、 典型解题类型与习题精选

1. 函数定义域求法

确定某些简单的、具体的函数定义域问题并不困难，只需注意下面几点.

① 分式函数，分母不为零；

② 偶次根式下的代数式不能为负；

③ 对数的底数大于零且不等于 1；真数大于零；

④ 反三角函数 $\sin^{-1}f(x)$，$\cos^{-1}f(x)$中的 $f(x)$满足$|f(x)|\leqslant 1$.

对于抽象函数的定义域问题，要依据函数定义及题设条件来确定.

【例 1.1】 设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{36-x^2}$，求 $f(x)$的定义域.

分析　分式函数，分母不为零；偶次根式下的代数式不能为负；对数的真数大于零. 由此确定不等式组，不等式组的解为定义域.

解　由题设应有 $2-x>0,2-x\neq 1$，且 $36-x^2\geqslant 0$. 故 $f(x)$的定义域为$[-6,1)\cup(1,2)$.

【例 1.2】 设 $f(x)$的定义域为$[1,2]$，求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

分析　由 $x+a,x-a$ 要在 $f(x)$的定义域内，确定 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

解　由题设应有 $1\leqslant x+a\leqslant 2$，即 $1-a\leqslant x\leqslant 2-a$；$1\leqslant x-a\leqslant 2$，即 $1+a\leqslant x\leqslant 2+a$.

当 $2-a\geqslant 1+a$，即 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[1+a,2-a]$；

当 $2-a<1+a$ 时，所求定义域为空集.

2. 函数性质的讨论方法

(1) 函数的奇偶性　函数的奇偶性对于某些运算（如积分、求和等）来讲非常重要.

判断函数的奇、偶性只需依据函数奇偶性的定义：若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$称为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$称为奇函数.

应该强调，并非所有函数都有奇偶性，而且只有在某个对称区间上才能讨论函数的奇

偶性.

【例 1.3】 判定函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的奇偶性.

分析　用奇函数和偶函数的定义，判断 $f(-x)$是否等于 $f(x)$.

解　因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=f(x)$，故 $f(x)$为偶函数.

(2) 函数的单调性　注意，有些函数在定义的区间上不一定单调，但是在其定义的部分子区间上可能是单调的．因此，说函数单调一定要指明其单调区间．我们通常称在其定义域的一个子集上单调的函数为局部单调函数.

【例 1.4】 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数，且 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加．证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

分析　利用奇函数定义 $f(-x)=-f(x)$及单调性定义.

证　设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则$-x_1,-x_2\in(0,l)$，且$-x_1>-x_2$．由于 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$．又 $f(x)$在$(-l,l)$内均为奇函数，所以

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]=-f(-x_2)+f(-x_1)\\&=f(-x_1)-f(-x_2)>0.\end{aligned}$$

因此，当 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$ 时．有 $f(x_2)>f(x_1)$．所以 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

(3) 函数的周期性　讨论函数的周期性问题，一般是根据周期函数的定义考虑.

【例 1.5】 若 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称．证明：$f(x)$为周期函数，并求出周期 T.

分析　函数图形的对称性也是常见的函数性质．图形关于直线 $x=a$ 对称，则有

$$f(a+x)=f(a-x).$$

证　要证 $f(x)$为周期函数，只要证 $f(x+T)=f(x)$即可．由于 $f(x)$为偶函数，有 $f(-x)=f(x)$，图形关于直线 $x=2$ 对称，即 $f(2+x)=f(2-x)$，即 $f(x)=f(4-x)$．用$-x$代替x 得到$f(-x)=f(4+x)$，由 $f(-x)=f(x)$得 $f(x)=f(x+4)$，即 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，$T=4$.

3. 数列极限的求法

求数列极限的常用方法有下面几种.

① 依据数列极限的定义（不做要求）;

② 依据数列极限存在的定理、法则;

③ 依据数列本身的变形;

④ 利用数列的递推关系;

⑤ 利用数列极限与函数极限存在的关系.

【例 1.6】 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，这里 a 为正的常数.

分析　用夹逼定理．$\sqrt[n]{a}$中开 n 次方是困难之处，需要将 a 放大为某个式子的 n 次方.

证　先考虑 $a\geqslant1$ 的情形．$a=1$ 结论显然.

若 $a>1$，记　$a=1+b$，$b\geqslant0$.

由 $\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n=1+n\dfrac{b}{n}+\dfrac{n(n-1)}{2!}\left(\dfrac{b}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{b}{n}\right)^n$，知　$\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n\geqslant1+b.$

故 $1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)=1$，由夹逼准则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

当 $0<a<1$ 时，记 $\dfrac{1}{a}=A$，则 $A>1$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{A}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}}=1.$

【例 1.7】 研究数列 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$（$n$ 重根号）的敛散性，如果收敛求出极限.

分析 $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$ 显然 a_n 单调递增，只需找个界，用单调有界原理证明收敛. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=A$，求极限.

解 $\{a_n\}$ 显然单增，只需证 $a_n<2$（用数学归纳法）.

$n=1$ 时，$a_1=1<2$，命题真；

设 $n=k$ 时，$a_k<2$，考虑 $n=k+1$ 的情形：

$a_{k+1}=\sqrt{1+a_k}<\sqrt{1+2}<2$，结论亦真，从而对任何自然数 n 均有 $a_n<2$.

综上，数列 a_n 单调、有界，故有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 因为 $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$ 两边取极限得 $A=\sqrt{1+A}$，$A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（$a_n\geqslant 0$ 由保号性知 $A\geqslant 0$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ 故舍去）.

【例 1.8】 若 n 为自然数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

分析 用等差数列求和公式计算 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 的和.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{[1+(2n-1)]n}{2}}{n+3}-n\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n}{n+3}\right)=-3.$$

【例 1.9】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$，其中 $n\in\mathbf{N}^+$.

分析 我们知道：若 $\lim f(x)$ 存在，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，任选数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0$（或 $x_n\to\infty$）时，$\{f(x_n)\}$ 趋向同一极限. 利用这个结论，可以把一些数列极限问题化为函数极限问题来处理，这实际上是将不连续问题（它们有时不能使用某些法则，比如洛必达法则等）化为连续问题，从而可以使用求函数极限的各种手段.

解 先考虑连续函数的极限.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\sin x=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1.$

4. 函数极限的求法

求函数的极限主要有如下几种方法.

① 利用连续函数定义；

② 利用两个重要极限；

③ 利用等价无穷小量代换；

④ 利用其他一些定理（夹逼定理、有界函数与无穷小量积的定理等）；

⑤ 利用洛必达法则等其他方法（在后续课程中会讲到）.

【例 1.10】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos x-1}$.

分析 先化简再利用连续函数定义.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+1)=2.$

【例 1.11】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin 2x}$.

分析 注意 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数，因此要用到有界函数与无穷小的积还是无穷小.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{x}{\sin 2x}\right)\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right]$,

注意相乘的两部分函数的极限都存在，可以化成极限的乘积．前一项用重要极限或者等价无穷小代换，后一项用有界函数与无穷小量积乘积的极限等于 0，

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

【例 1.12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

分析 这是一个 1^∞ 型的极限，求这类极限经常会用到重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{a}=\mathrm{e}^{2a}.$$

【例 1.13】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 x+x\sin 2x}{x^2}$.

分析 经常要将几部分分开分别求极限，要注意每一部分极限都要存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin x+2x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}2\cos x\right)=3.$

5. 函数连续性问题

【例 1.14】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$，判断 $f(x)$在 $x=0$ 点是否连续.

分析 函数表达式中有绝对值时，相当于分段函数．分段函数连续性的讨论主要是考察分段点处的左右极限是否相等.

解 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0\\ 1, & x=0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

又 $f(0)=1$，故 $f(x)$在 $x=0$ 点连续.

【例 1.15】 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，对任意实数 x，y 有关系式 $f(x+y)$

$=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，试证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

证 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，设 Δx 为增量，$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$，由于

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)&=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)+\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)\\&=f(x_0)+f(0)=f(x_0)+0=f(x_0),\\&(\text{因为 } f(0+0)=f(0)+f(0),\text{所以 } f(0)=0)\end{aligned}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

6. 综合举例

【例 1.16】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\leqslant c<d\leqslant b$，$p$，$q$ 为任意正数，证明：在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

证 利用介值定理.

证法一　设 M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值、最小值，即 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，因为 $c,d\in[a,b]$ 上的点，

所以
$$m\leqslant f(c)\leqslant M,$$
所以
$$pm\leqslant pf(c)\leqslant pM\quad(\text{因为 } p>0).$$
同理
$$qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$
所以
$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

由介值定理可知至少存在一个 ξ，$\xi\in[a,b]$，使得
$$f(\xi)=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q},$$
即
$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

证法二　令 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因而在 $[c,d]$ 上也连续.
$$F(c)=(p+q)f(c)-pf(c)-qf(d)=q[f(c)-f(d)],$$
$$F(d)=(p+q)f(d)-pf(c)-qf(d)=p[f(d)-f(c)].$$

① 若 $f(d)-f(c)=0$，则对于 c，d 点有
$$F(c)=(p+q)f(c)-pf(c)-qf(d)=0,$$
或
$$F(d)=(p+q)f(c)-pf(c)-qf(d)=0,$$
即有
$$pf(c)+qf(c)=(p+q)f(c),$$
或
$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(d).$$

所以 ξ 取 c 或 d 都可使命题得证.

② 若 $f(c)-f(d)\neq 0$，则有
$$F(c)F(d)=-pq[f(d)-f(c)]^2<0,$$
故在 (c,d) 上存在一个 ξ 使得
$$F(\xi)=(p+q)f(\xi)-[pf(c)+qf(d)]=0,$$
即
$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

综上所述，在 (a,b) 上至少存在一个 ξ，使得 $F(\xi)=0$，

即
$$(p+q)f(\xi)=pf(c)+qf(d).$$

【例 1.17】 已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$，求常数 a,b.

解 由于 $x-a$ 当 $x\to a$ 时趋于0，极限值为8，故此极限式必为 $\frac{0}{0}$ 型极限. 由因式分解 $x^2+bx+3b=(x-a)(x+c)=x^2+(c-a)x-ax$（$a,c$ 为待定常数），比较两边系数 $\begin{cases}c-a=b\\-ac=3b\end{cases}$，再由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+bx+3b}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+c)=a+c$，所以 $a+c=8$，

所以 $\begin{cases}c-b=b\\-ac=3b\\a+c=8\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=16\\b=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\b=16\end{cases}$.

【例 1.18】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且函数的值域也是 $[a,b]$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\xi$，其中 $b>a$.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $F(a)=0$（或 $F(b)=0$），则 $F(a)=a$（或 $F(b)=b$），令 $\xi=a$（或 $\xi=b$）即可.

若 $F(a)\neq0$，且 $F(b)\neq0$，即 $F(a)\neq a$，$F(b)\neq b$. 由 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ 知 $f(a)>a, f(b)<b$，即 $F(a)>0$ 且 $F(b)<0$. 由介值定理，至少 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

综合以上两种情况，即可得结论.

三、 课堂练习题

★ A 题 ★

A1.1 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________.

A1.2 极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$__________.

A1.3 设 $x_n=\frac{a^n n!}{n^n}$（其中 a 是正的常数，n 是正整数），则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=$__________.

A1.4 若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\gamma(x)$ 是等价无穷小，$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，函数 $\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)-\beta(x)}$ 的极限是__________.

A1.5 函数 $y=\sin\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}$ 的连续区间为__________.

A1.6 已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+bx+c}{1-x}=5$，则 $b=$__________，$c=$__________.

A1.7 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有__________.

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立；　　(B) $b_n<c_n$；

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在；　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

A1.8 极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$ 的结果是__________.