强连续线性算子半群

Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators

郑权 著

华中理工大学出版社

强连续线性算子半群

郑　权　著

华中理工大学数学系

武　汉　430074

华中理工大学出版社

武　汉，1994

Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators

ZHENG Quan

Department of Mathematics

Huazhong University of Science and Technology

Wuhan 430074, PRC

Huazhong University of Science and Technology Press

Wuhan, 1994

内 容 提 要

本书系统地介绍了Banach空间中强连续线性算子半群的基本理论，内容包括：抽象函数的Laplace变换；C_0半群及其特类的基本性质和特征；C_0半群的表示、扰动与逼近；C_0半群的谱与渐近性；正半群；一些选择的论题。

本书可供大学数学系教师及数学工作者阅读参考，也可作为泛函分析、偏微分方程及分布参数控制等方向的研究生教材或参考书。

强连续线性算子半群

郑 权 著

责任编辑 龙纯曼

•

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

•

开本：850×1168 1/32　印张：11.25字数：250 000

1994年3月第1版　1994年3月第1次印刷

印数：1—1 000

ISBN 7-5609-0889-6/O·115

定价：6.90元

（鄂）新登字第10号

Abstract

This book is intended to give a systematic presentation of strongly continuous semigroups of bounded linear operators in Banach spaces. Many new materials are collected, and the theory of abstract Laplace transforms is used as best the author can. The following is the contents.

Chapter 1 Laplace transforms of abstract functions. § 1 Laplace-Stieltjes transforms; § 2 Widder-Arendt representation theorem; § 3 Inversion formulas; § 4 Abelian and Tauberian theorems; § 5 Approximations and regularity; § 6 Comments.

Chapter 2 C_0 semigroups and their special classes. § 1 C_0 semigroups; § 2 C_0 groups; § 3 Dissipative operators; § 4 Norm continuous semigroups; § 5 Analytic semigroups; § 6 Dual semigroups; § 7 Comments.

Chapter 3 Representations, perturbations and approximations. § 1 Representations; § 2 Perturbation theorems; § 3 Multiplicative perturbations; § 4 Comparison theorems; § 5 Approximation theorems; § 6 Approximation by discrete semigroups; § 7 Comments.

Chapter 4 The spectrum and asymptotic behavior. § 1 Spectral mapping theorems; § 2 Growth bounds and the spectrum; § 3 Exponential stability; § 4 Asymptotic stability; § 5 Ergodicity; § 6 Almost periodicity; § 7 Comments.

Chapter 5 Positive semigroups. § 1 Generation theorems; § 2 Resolvent positive operators; § 3 Kato's inequalities; § 4 Perron-Frobenius theory; § 5 Asymptotic behavior; § 6 Comments.

Chapter 6 Select topics. § 1 Invariant subsets; § 2 Fractional powers; § 3 Moment inequalities; § 4 Operator polynomials; § 5 Second order operator matrices; § 6 n order operator matrices; § 7 Comments.

序 言

算子半群数十年的发展历程大致可分为四个阶段。初创期(1930～1947年)：Stone在1930年提出，1932年证明的Stone定理是算子半群理论中出现的最早结果。在这一时期算子半群的主要工作就是围绕Stone定理展开的。成熟期（1948～1956年）：1948年Hille和Yosida独立得到的生成定理是算子半群发展史上的一个里程碑。接着Phillips及Feller等填补了Hille遗留下来的许多空白。扩充期（1957～1986年)：1957年出版的Hille和Phillips的专著《泛函分析与半群》标志着算子半群的理论已基本形成。其后，人们的注意力开始转向扩展算子半群的其它类型，如分布半群、局部凸线性拓扑空间中的算子半群、非线性算子半群、正半群等。再生期（1987年以后)：1987年的Arendt提出积分半群与Davies和Pang重提C半群给算子半群的发展赋予了新的生机。因为它们给出了算子半群的更一般框架，特别从多方面实质地发展了强连续算子半群(即C_0半群)，并在应用中显示了其生命力。

至今，算子半群已成为泛函分析的一个重要的内容丰富的分支，同时作为一种有力工具出现在数学与工程技术的许多问题中。要在一本篇幅不大的书中给出其全貌是不可能的，因此本书在选材及写法上追求以下几方

面的特色。

其一，试图给出Banach空间中C_0半群的一个较完整的介绍。众所周知，即使Banach空间中的C_0半群理论也有着丰富的内容。进入80年代后，它的某些论题与方法又有了一些重要发展。目前国外已出版的著作对这一近期发展介绍尚少（除正半群外）。本书旨在弥补这一缺陷，即在介绍其基本内容的同时，充分地吸收了其近期的工作。限于篇幅及作者水平，Hilbert空间中C_0半群及C_0半群应用的丰富材料只有在少数重要情形下或方便时（作为Banach空间中相应结果的推论，或应用举例，或评注中）才涉及到。本书的例子大多以反例的形式出现。

其二，以一半左右的篇幅处理在国外同类著作中尚未出现的素材。它们包括抽象函数Laplace变换的Widder-Arendt表示定理、Tauber定理、逼近定理及正则性；依解析元刻划的C_0群的特征；Hilbert空间中范数连续半群的特征；C_0半群的概率表示、乘积扰动、比较定理、m次增长阶与m次谱界的关系、稳定性与遍历性的一些结果、概周期性及不变子集；正半群的若干结果；C_0半群与算子多项式和算子矩阵的联系等。此外，书中也包含了作者自己的一些工作。

其三，每章之末专辟一节给出有关的评注。评注一节中每一段依次对应前面每一节的材料，包括正文中材料的出处，相关的工作以及未列入正文的有关重要定

理，特别其最后一段往往给出未列入该章的相关论题的简短介绍。其中第二章与第六章评注一节的最后一段分别指出了其它重要的算子半群类与算子半群的一些主要应用领域。书末的四百多篇参考文献均在脚注及评注中出现，没有引用的文献未列入。

其四，对C_0半群基本材料的处理尽可能采用抽象函数Laplace变换的方法。这种方法在算子半群发展之初即在表示等问题中被采用过，而其近期发展则更令人鼓舞。本书首次系统整理了抽象函数Laplace变换的近期结果，并充分展示了它在处理C_0半群某些问题时的优越性，即简洁有效，体现了问题的实质。不仅如此，总结这些结果与方法的另一意义在于它能适用其它算子半群类及抽象Cauchy问题。此外，对于书中那些不便使用这种方法处理的基本材料，我们尽量将叙述写得简明扼要，个别定理的证明因其过长而仅给出证明概要或被省略。

本书的部分内容曾给研究生讲授过一次。感谢刘丽萍、张寄洲及叶琴同志做了许多辅助性工作，感谢华中理工大学出版社的大力支持。借此机会我还要感谢黄发伦、马吉溥、朱广田、阳名珠等先生对我以往工作的关怀与支持。最后，鉴于作者水平，加之成书仓促，书中谬误之处一定不少，敬请专家及读者指正。

作　者

1993年5月于武汉

目　录

第一章　抽象函数的Laplace变换

§1　Laplace-Stieltjes变换

设$f(t)$是从$[0,\infty)$到Banach空间X的函数，且在任何有限区间$[0,T]$上是强有界变差的，即对$[0,T]$的所有有限分划而取的上确界 $\bigvee\limits_0^T(f)\triangleq\sup\sum\limits_k\|f(t_k)-f(t_{k-1})\|<\infty$，这里$\bigvee\limits_0^T(f)$称为$f(t)$在$[0,T]$上的强变差。就以下考虑的积分而言，不妨设$f(t)$是正规化的，即

$$f(0)=0,\ f(t)=\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]\ (t>0),$$

这里$f(t\pm0)\triangleq\lim\limits_{h\downarrow0}f(t\pm h)$存在。

定义1.1　如果对某复值λ，广义积分

$$F(\lambda)\triangleq\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}f(t)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\lambda t}\mathrm{d}f(t)\tag{1.1}$$

存在，则称$F(\lambda)$为$f(t)$的Laplace-Stieltjes**变换**，或$f(t)$的**生成函数**，而$f(t)$称为$F(t)$的**确定函数**。又称Laplace-Stieltjes积分对$\lambda=\sigma+i\tau$**绝对收敛**，如果数值积分$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\mathrm{d}f_*(t)$收敛，这里$f_*(t)=\bigvee\limits_0^t(f)$。对于$g\in L^1_{loc}((0,\infty),X)$，称

$$F(\lambda)\triangleq\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)\mathrm{d}t\tag{1.2}$$

为$g(t)$的Laplace**变换**。此时$F(\lambda)$的确定函数$f(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$,

$$f_*(t)=\int_0^t\|g(s)\|\mathrm{d}s.$$

类似于数值函数情形，如果$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在，记$f(\infty)$为该极限；否则$f(\infty)=0$。同样定义$f_*(\infty)$。此时称

$$\sigma_c=\sigma_c(f)\triangleq\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|f(t)-f(\infty)\|,$$

$$\sigma_a=\sigma_a(f)\triangleq\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|f_*(t)-f_*(\infty)|$$

分别为(1.1)式的**收敛横标与绝对收敛横标**。

定理1.2 当$\mathrm{Re}\lambda>\sigma_c$时，(1.1)式收敛，$\mathrm{Re}\lambda<\sigma_c$时，不收敛；当$\mathrm{Re}\lambda>\sigma_a$时，(1.1)式绝对收敛，$\mathrm{Re}\lambda<\sigma_a$时，不绝对收敛。此外，$-\infty\leqslant\sigma_c\leqslant\sigma_a\leqslant\infty$。

证 若$\mathrm{Re}\lambda>\sigma_c$，则$\forall\varepsilon\in(0,\mathrm{Re}\lambda-\sigma_c)$，存在$M_\varepsilon$使

$$\|f(t)-f(\infty)\|\leqslant M_\varepsilon\exp\{t(\sigma_c+\varepsilon)\},\quad t\geqslant 0.$$

于是由分部积分法得

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}f(t)&=\lim_{T\to\infty}\{\mathrm{e}^{-\lambda T}[f(T)-f(\infty)]+f(\infty)\\&\quad+\lambda\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda t}[f(t)-f(\infty)]\mathrm{d}t\}\\&=f(\infty)+\lambda\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda t}[f(t)-f(\infty)]\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{1.3}$$

右端的广义积分显然收敛。

现设(1.1)式对某$\mathrm{Re}\lambda_0<\sigma_c$收敛。令$h(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\mathrm{d}f(s)$，则$\|h(t)\|\leqslant M\ (0\leqslant t\leqslant\infty)$，且由分部积分法

$$f(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda_0 s}\mathrm{d}h(s)=e^{\lambda_0 t}h(t)-\lambda_0\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda_0 s}h(s)\mathrm{d}s.\tag{1.4}$$

于是当$\mathrm{Re}\lambda_0\geqslant 0$时，

$$\|f(t)-f(\infty)\|\leqslant\|f(\infty)\|+M(1+|\lambda_0|t)\mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\lambda_0}\ (t\geqslant 0);\tag{1.5}$$

当$\mathrm{Re}\lambda_0<0$时，由(1.4)式即见$f(\infty)=-\lambda_0\int_0^\infty e^{\lambda_0 s}h(s)\,ds$存在。此时

$$\|f(t)-f(\infty)\|=\|e^{\lambda_0 t}h(t)+\lambda_0\int_t^\infty e^{\lambda_0 s}h(s)\,ds\|$$

$$\leqslant M\left(1-\frac{|\lambda_0|}{\mathrm{Re}\lambda_0}\right)e^{t\mathrm{Re}\lambda_0}\quad(t\geqslant 0). \tag{1.6}$$

由(1.5)与(1.6)式，立即推出以下矛盾：

$$\sigma_c=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|f(t)-f(\infty)\|\leqslant\mathrm{Re}\lambda_0<\sigma_c.$$

关于绝对收敛性的结论类似可证。而$\sigma_c\leqslant\sigma_a$是显然的。 □

对于Laplace变换(1.2)，我们能从定理1.2导出

$$\sigma_c=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|\int_0^t g(s)\,ds-g_\infty\right\|, \tag{1.7}$$

这里$g_\infty=\int_0^\infty g(s)\,ds$，如果$g\in L^1((0,\infty),X)$；否则$g_\infty=0$。但我们不能在(1.7)式中以$g(t)$代替$\int_0^t g(s)\,ds$，即使在数值函数的情形也是如此。例如对于$[0,\infty)$上定义的非负连续函数：

$$g(t)=\begin{cases}e^{n^2}-e^{2n^2}|t-n|, & \text{当}|t-n|<e^{-n^2}, n\in\mathbb{N}\text{时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

经简单计算知$\sigma_c=g_\infty=0$，但$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|g(t)|=\infty$。对于Laplace变换的绝对收敛横标$\sigma_a$，从该例知情况亦是如此。

以下定理收集了一些Laplace-Stieltjes变换的基本性质。

定理1.3 (a) 当$\mathrm{Re}\lambda>\sigma_c$时，

$$F(\lambda)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s}(f(s)-f(\infty))\,ds+f(\infty). \tag{1.8}$$

如果$\mathrm{Re}\lambda>\max(\sigma_c,0)$，则上式中的$f(\infty)$可消去。

(b) $\forall\varepsilon>0$，存在$M_\varepsilon>0$使得$\|F(\lambda)\|\leqslant M_\varepsilon|\lambda|$ ($\mathrm{Re}\lambda-$

$\sigma_a)^{-1}$, $\mathrm{Re}\lambda>\sigma_0+\varepsilon$.

(c) $F(\lambda)$在半平面$\mathrm{Re}\lambda>\sigma_a$中是解析的，且

$$F^{(n)}(\lambda)=(-1)^n\int_0^\infty s^n \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}f(s), \forall \mathrm{Re}\lambda>\sigma_c, n\in\mathbb{N}. \tag{1.9}$$

(d)（唯一性定理）$F(\lambda)$不能具有两个不同的正规化的确定函数。

(e)（卷积定理）如果$G(\lambda)$是数值函数$g(t)$的Laplace-Stieltjes变换，则

$$G(\lambda)F(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}h(t), \forall \mathrm{Re}\lambda>\sigma, \tag{1.10}$$

且$\sigma_a(h)\leqslant\sigma$，这里$\sigma=\max(\sigma_a(f),\sigma_a(g))$，

$$h(t)=\int_0^t f(t-s)\mathrm{d}g(s)=\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}f(s). \tag{1.11}$$

证 (a) 从(1.3)式立得。(b) 从(1.8)式及σ_a的定义推出。

(c) 因为$\forall x^*\in X^*$，从数值函数的Laplace-Stieltjes变换理论知，$x^*(F(\lambda))$具有(c)中所述性质，故$F(\lambda)$亦满足(c)。

(d) 从数值情形的相应结论及以下事实即得：若$x\in X$，且$x^*(x)=0$，$\forall x^*\in X^*$，则$x=0$。

(e) 类似于数值函数可得：$h_*(t)\leqslant g_*(t)f_*(t)$，由此$\sigma_a(h)\leqslant\sigma$。再据(d)中方法知(1.10)式成立，而(1.11)式中后一等式由分部积分法即得。 □

类似于(e)我们可推出以后将要使用的一个结果：若$T_1(t)$，$T_2(t)(t\geqslant0)$均为X中的强连续有界线性算子族，则$\forall\mathrm{Re}\lambda>\max(\omega_1,\omega_2)$，在强算子拓扑意义下成立

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T_1(t)\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T_2(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_0^t T_1(t-s)T_2(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t, \tag{1.12}$$

这里$\omega_i=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|T_i(t)\|$ $(i=1,2)$。

§2 Widder-Arendt表示定理

数值情形的Widder表示定理在Banach空间X中的推广具有多种形式。就算子半群的应用而言，我们关注的是以下Widder-Arendt表示定理。

定理1.4 设$M\geqslant 0$，$\omega\in\mathbf{R}$，$F\in C^{\infty}((\omega,\infty),X)$，则以下结论等价：

(a) $\|(\lambda-\omega)^{n+1}F^{(n)}(\lambda)\|\leqslant Mn!$，$\forall\lambda>\omega$，$n\in\mathbf{N}_0$。

(b) 存在$F(\lambda)$的确定函数$f\in\mathrm{Lip}(M,\omega,X)$（或简记为$f\in\mathrm{Lip}(M,\omega)$），即$f:[0,\infty)\to X$，$f(0)=0$，且

$$\|f(t+h)-f(t)\|\leqslant Mhe^{\omega t}\max(e^{\omega h},1)\text{，}t\text{，}h\geqslant 0\text{。}\qquad(1.13)$$

证 (a)⇒(b) 设$x^*\in X^*$。由数值情形的Widder表示定理，存在$g(\cdot,x^*)\in L^1_{loc}(0,\infty)$，对几乎所有$t\in[0,\infty)$满足$|g(t,x^*)|\leqslant Me^{\omega t}\|x^*\|$，并使得

$$x^*(F(\lambda))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}g(t,x^*)\mathrm{d}t\quad(\lambda>\omega)\text{。}$$

现令$f(t,x^*)=\int_0^t g(s,x^*)\mathrm{d}s(t\geqslant 0)$，则

$$x^*(F(\lambda))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}f(t,x^*)\quad(\lambda>\omega)\text{。}$$

因为$f(\cdot,x^*)$连续，故由定理1.3(d)知，$f(t,x^*)$关于$x^*\in X^*$是线性的，且

$$\begin{aligned}|f(t+h,x^*)-f(t,x^*)|&\leqslant\int_t^{t+h}Me^{\omega s}\|x^*\|\mathrm{d}s\\&\leqslant Mhe^{\omega t}\max(e^{\omega h},1)\|x^*\|\quad(t,h\geqslant 0,x^*\in X^*)\text{。}\end{aligned}$$

由此$\forall t\geqslant 0$，存在$f(t)\in X^{**}$，使$f(t,x^*)=f(t)(x^*)$，$\forall x^*\in X^*$。由于X通过嵌入算子构成X^{**}的一个闭子空间，因此以下仅须证明$f(t)\in X$即可。

设$q:X^{**}\to X^{**}/X$为商映射。故从$F(\lambda)\in X$得

$$0=q(F(\lambda))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}q(f(t))\quad(\lambda>\omega).$$

因此据唯一性定理，$q(f(t))=0$，即$f(t)\in N$，$\forall t\geqslant 0$。

(b)$\Rightarrow$(a) 设$x^*\in X^*$，则由(1.13)式知，$x^*(f(t))$是a.e.可微的，$x^*(f(\cdot))\in L^1_{loc}(0,\infty)$，且$|[x^*(f(t))]'|\leqslant M\|x^*\|e^{\omega t}$对$t\in[0,\infty)$a.e.成立。又微分

$$x^*(F(\lambda))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}x^*(f(t))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}[x^*(f(t))]'\mathrm{d}t\quad(\lambda>\omega)$$

n次，并估值得

$$|x^*(F^{(n)}(\lambda))|\leqslant Mn!(\lambda-\omega)^{-n-1}\|x^*\|,\quad\forall x^*\in X^*.$$

由此即得(a)。 □

为了给出复Widder-Arendt表示定理，我们记$\Sigma_\alpha=\{\lambda\in\mathbf{C};\ |\arg\lambda|<\alpha\}\backslash\{0\}$，$\Sigma'_\alpha=\overline{\Sigma}_\alpha\backslash\{0\}$，这里$0<\alpha\leqslant\pi$。

定理1.5 设$\omega\in\mathbf{R}$，$0<\alpha\leqslant\pi/2$，$F:(\omega,\infty)\to X$，则以下结论等价：

(a) F在$\omega+\Sigma_{\alpha+\pi/2}$中解析，且$\forall\beta\in(0,\alpha)$，$\|(\lambda-\omega)F(\lambda)\|\leqslant M_\beta(\lambda\in\Sigma_{\beta+\pi/2})$。

(b) 存在Σ_α中的解析函数$h(t)$，使得$F(\lambda)$是$h(t)$的Laplace变换，且$\forall\beta\in(0,\alpha)$，$\|h(t)\|\leqslant M_\beta e^{\omega\operatorname{Re}t}(t\in\Sigma_\beta)$。

(c) 存在Σ_α中的解析函数$f(t)$，使得$f(t)$是$F(\lambda)$的确定函数，并满足$f(0)=0$，$f\in C(\overline{\Sigma}_\beta,X)$及

$$\|f(t+h)-f(t)\|\leqslant M_\beta|h|e^{\omega\operatorname{Re}t}\max(e^{\omega\operatorname{Re}h},1),$$
$$\forall h,\ t\in\overline{\Sigma}_\beta,\ \beta\in(0,\alpha).\qquad(1.14)$$

证 (a)$\Rightarrow$(b) $\forall\beta\in(0,\alpha)$，令$\gamma=(\alpha+\beta)/2$，并定义

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+\Gamma}e^{\lambda t}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda,\quad t\in\Sigma_\beta,\qquad(1.15)$$

这里Γ是$\Sigma_{\alpha+\pi/2}$中一条从$\infty e^{-i(\gamma+\pi/2)}$到$\infty e^{i(\gamma+\pi/2)}$的光滑曲线。由于当$t\in\Sigma_\beta$，$\lambda\in\Gamma$且$|\lambda|$充分大时，由(a)得

$$\|e^{(\omega+\lambda)t}F(\omega+\lambda)\|\leqslant M_{\gamma}e^{\omega\mathrm{Re}t-\sin(\gamma-\beta)|\lambda t|}/|\lambda|, \quad (1.16)$$

故$h(t)$在Σ_{β}中存在并解析。再据Cauchy定理知，$h(t)$不依赖于$\beta\in(0,\alpha)$，且在Σ_{α}中解析。现对(1.15)式做变量代换：$\mu=(-\omega+\lambda)|t|$，得

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|\Gamma}e^{\omega t+\mu t/|t|}F(\omega+\mu/|t|)\frac{\mathrm{d}u}{|t|}.$$

用Cauchy定理将上式中的积分路径$|t|\Gamma$移至Γ，并借助(1.16)式推出

$$\|h(t)\|\leqslant\frac{M_{\gamma}}{2\pi}e^{\omega\mathrm{Re}t}\int_{\Gamma}\frac{1}{|\mu|}|e^{\mu t/|t|}|\ |\mathrm{d}\mu|.$$

因为积分$\int_{\Gamma}\frac{1}{|\mu|}|e^{\mu\lambda}|\ |\mathrm{d}\mu|$作为$\lambda$的函数在紧子集$\{\lambda\in\overline{\Sigma}_{\beta};\ |\lambda|=1\}$上连续，故亦有界。从而$\|h(t)\|\leqslant M_{\beta}e^{\omega\mathrm{Re}t}(t\in\Sigma_{\beta})$。最后$\forall\mathrm{Re}\mu>\omega$，由Cauchy定理可适当选取$\Gamma$，使得$\mu$在$\Gamma$的右边，再据Fubini定理与残数定理得

$$\int_0^{\infty}e^{-\mu t}h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+\Gamma}\int_0^{\infty}e^{-\mu t}e^{\lambda t}F(\lambda)\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+\Gamma}\frac{1}{\mu-\lambda}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda=F(\mu).$$

(b)⇒(c)　令$f(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s(t\in\Sigma_{\alpha})$，则$\forall\beta\in(0,\alpha)$，由$\|h(t)\|\leqslant M_{\beta}e^{\omega\mathrm{Re}t}(t\in\Sigma_{\beta})$得

$$\lim_{\Sigma_{\beta}\ni t\to0}\|f(t)\|\leqslant M_{\beta}\lim_{\Sigma_{\beta}\ni t\to0}|t|\max(e^{\omega\mathrm{Re}t},1)=0.$$

因此$f\in C(\overline{\Sigma}_{\beta},X)$和$f(0)=0$。由此不难推出(1.14)式。剩下的结论显然。

(c)⇒(a)　注意到，若取$h(t)=f'(t)$ $(t\in\Sigma_{\alpha})$，则(c)蕴涵(b)。故以下仅须证明(b)蕴涵(a)。设$\beta\in(0,\alpha)$，取$\lambda=\omega+(\lambda-\omega)e^{\pm i\theta}(0<\theta<\beta+\pi/2)$。改变(1.2)式中的积分路径为射线$re^{\mp i\gamma}(r\geqslant0,\ \gamma=(\alpha+\beta)/2)$，这里$i\gamma$前的符号与$i\theta$前的符号相