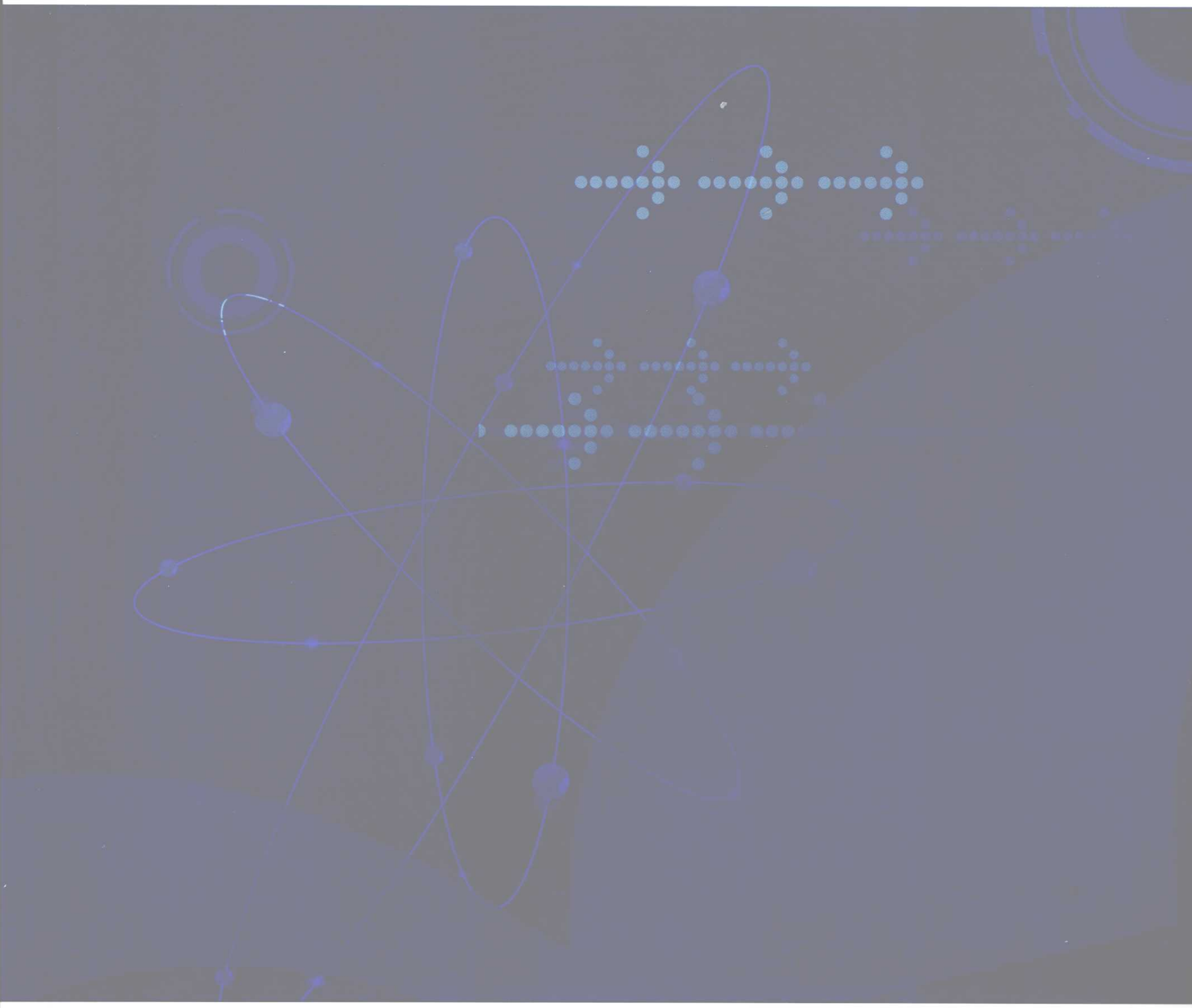
电动力学

Electrodynamics

虞国寅　周国全



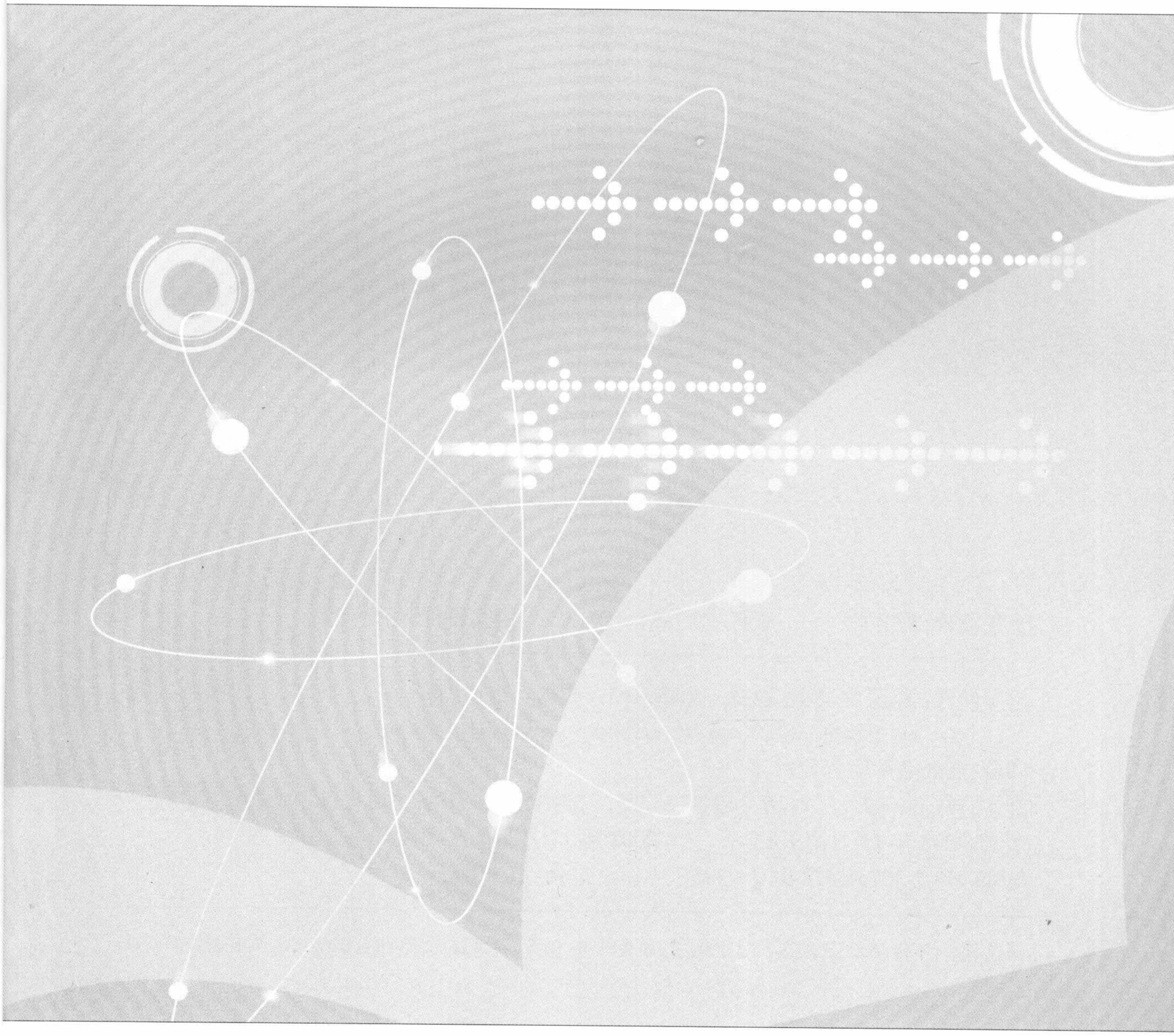
WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

武汉大学“十一五”规划教材

电动力学

Electrodynamics

虞国寅 周国全



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/虞国寅,周国全. —武汉:武汉大学出版社,2008.11
武汉大学“十一五”规划教材
ISBN 978-7-307-06578-9

Ⅰ.电… Ⅱ.①虞… ②周… Ⅲ.电动力学 Ⅳ.O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 158028 号

责任编辑:黄汉平　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:湖北金海印务公司
开本:787×1092　1/16　印张:14.25　字数:344 千字　插页:1
版次:2008 年 11 月第 1 版　　2008 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06578-9/O·395　　定价:24.00 元

内容简介

本书系统地阐述了电动力学的基本概念和处理问题的基本方法。全书的内容有：电磁场的基本定律与方程、静电场、静磁场、电磁波的传播和辐射、狭义相对论、带电粒子与电磁场的相互作用。书中还包括矢量和张量运算的相关内容，以方便教学使用。

本书可作为电动力学、电磁理论等课程的教材与参考书。也可供与电磁理论相关的工作者参考。

前　言

电动力学是讨论电磁场理论与狭义相对论的课程。电磁场与众多其他物质一样，是具有能量、动量和角动量，按照自己的规律运动的一种重要物质。电磁场在与其他物质的相互作用过程中，可以相互之间转换能量、动量和角动量，而且遵从能量、动量和角动量的守恒定律。电磁场物质在现代人类的活动中扮演了相当重要的角色，是在各个领域，各个行业中不可缺少的东西。在电力系统中，人们利用电磁场才能方便地实现能量的远距离传送，并实现了物质能量在各种形式之间的转换。在信息行业中，由于电磁场作为现代信息技术的信息载体，人们才能实现对各种信息的快速、准确地传递和处理。没有电磁场，现代生活是无法想象的。对电磁场的运动规律和应用的研究已是现代自然科学的一个重要分支学科。

本书较为系统地阐述了电磁场的基本概念和处理电磁场问题的基本方法。电动力学作为基础理论课程，它的主要任务是使学生掌握这些较为成熟的理论知识和处理问题的基本思想与方法。在科学技术、信息传媒高度发展的当代社会，精选传统课程的内容、缩减传统课程的分量是大势所趋。如何缩减和精选本课程的内容，我们努力首先在内容选取方面，侧重于基本与主要的内容，在保持本课程系统性的基础上，尽量减少与其他课程的重复，并不把涉及电磁场的各种内容都纳入本书。其二是，力求以最简洁的方式和精炼的语言去阐述选入书中的内容。本书的第一章主要是讨论 Maxwell 方程组、电磁场的能量、动量概念。预备知识中的§0.2“张量及其运算”可以插在§1.2之前讲授。第二章静电场和第三章静磁场主要是讨论如何利用势函数求稳定电磁场的分布，以及稳定电磁场的能量问题。第四章讨论电磁波的传播，在这里把绝缘介质作为一般介质中电导率为零的一个特例来处理。第五章是讨论电磁波的辐射，这里先介绍如何利用场的势函数去求电磁辐射场，然后着重讨论电偶极矩的辐射。希望通过对此内容的讨论，使学生掌握一般电磁辐射系统的辐射场计算和辐射特性讨论的基本方法。在学时较少的情况下，§5.3和§5.4可以根据情况予以删减。第六章狭义相对论，介绍了狭义相对论理论的提出，狭义相对论的时空特性和物理规律的相对论协变形式。第七章讨论带电粒子与电磁场的相互作用，首先计算了带电粒子运动时激发的电磁场，这里给出了近场和远场的全部电磁场。然后讨论带电粒子在电磁场作用下的行为。本书中的内容，可以根据教学课时的多少，适当进行删减取舍。

本书的编者在武汉大学物理学院讲授了多年的电动力学和相关电磁理论课程。本书是在原讲义的基础上经过反复修改、整理而成。2004级物理学类专业、2004级和2005级电子科学与技术专业的许多同学对本书的初稿提出了不少宝贵意见。有许多老师对本书的出版给予了大力支持和帮助。在此对他们表示衷心感谢。

编者在教学和本书编写过程中，参考了很多国内外同行的优秀教材和文献，借此机会对这些教材和文献的作者表示衷心感谢。

由于编者的学识水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，热忱欢迎各位读者对本书提出宝贵意见。

编　者

2008 年 5 月

目　录

第 0 章　数学预备知识

本章对电动力学中常用的数学工具作一个回顾。主要讨论矢量与二阶张量的运算规则。

§0.1　矢量和矢量场

一、矢量的概念及其代数运算

在三维欧氏空间里的矢量，是一种既有数值又有方向，而且遵从平行四边形加法法则的量。例如电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{B}$、电流密度 $\boldsymbol{j}$ 等都是矢量。矢量的严格定义是按照在进行线性变换的时候，所采取的变换规则来定义的，这将在 §6.4 中介绍。

设有两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，它们在三个坐标轴上的投影分别是(A_1, A_2, A_3) 和(B_1, B_2, B_3)，则矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可以记为

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \tag{0.1.1}$$

$$\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} B_i\boldsymbol{e}_i \tag{0.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是对应坐标轴上的基矢。在直角坐标系中 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$，或者表示为 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$；在球坐标系中三个基矢是 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_\phi$。

两个矢量的加减法运算定义为对应的分量相加减

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}(A_i \pm B_i)\boldsymbol{e}_i \tag{0.1.3}$$

两个矢量的乘法有点乘、叉乘和张量积等三种运算。点乘运算定义为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cos\theta \tag{0.1.4}$$

其结果是一个标量。式中 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|\boldsymbol{B}|$ 分别表示矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的模，角度 θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。点乘的几何解释是一个矢量在另一个矢量上投影乘上另一个矢量的模。两个矢量的点乘也称为两个矢量的内积或标量积。

矢量的叉乘运算又称为外积，运算结果是一个矢量，记为 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$。结果矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向与矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 成右手螺旋关系。如图 0.1.1 所示。

显然有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 叉乘运算后的模

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \sin\theta \tag{0.1.5}$$

此结果刚好是一个以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边平行四边形的面积。

在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \tag{0.1.6}$$

两个矢量的张量积也称为并矢运算，其运算结果是一个二阶张量，其运算定义为

$$\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1,j=1}^{3}A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{0.1.7}$$

三个矢量乘积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 是一个标量，其几何解释是一个以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱边的平行六面体的体积，显然这个体积可以用 $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 表示。如图 0.1.2 所示，所以有

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

即有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{0.1.8}$$

利用(0.1.6)式可以证明有运算公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{0.1.9}$$

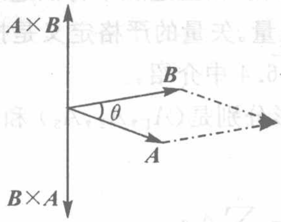


图 0.1.1

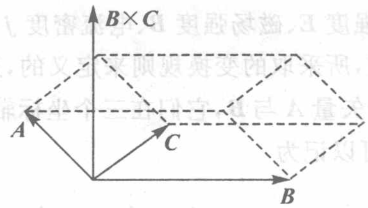


图 0.1.2

二、标量场的梯度和矢量场的散度与旋度

某一物理量在空间的每一点都有确定值，就把这个物理量称为场。如果这个物理量是标量，则称为标量场。例如空间的温度是标量场。而空间的电场强度、磁感强度则是矢量场。

在三维空间中，标量场可以用一系列的等值面来进行几何描述。在二维空间中，标量场可以用等值线来描述。而矢量场可以用矢量线来进行几何描述，矢量线密集的地方场强大，矢量线稀疏的地方场强弱，矢量线的切线方向是该点矢量场的方向。例如我们熟知的电场线、磁场线等。场的几何描述能够在一定的范围里给出一个形象的场分布图像。而对场的定量研究，则采用下面场的特征量更为方便。

1. 标量场的梯度

标量场在某一点的梯度是描述场在这一点的变化情况。为方便讨论，考虑二维标量场 $f(x,y)$ 的梯度。如图 0.1.3 所示，记 P 点的值为 f，从 P 点作位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到 Q 点以后，f 的值变化了 $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{0.1.10}$$

由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y \tag{0.1.11}$$

若记
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y \tag{0.1.12}$$
则有
$$\mathrm{d}f = A \cdot \mathrm{d}l$$
其中
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y = \mathrm{grad}f \tag{0.1.13}$$

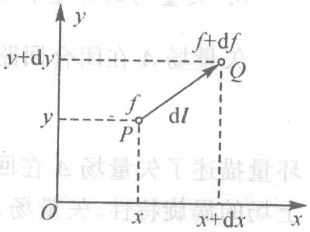


图 0.1.3

grad 是 gradient 的缩写，grad$f$ 称为标量场 f 的梯度。类推可以得到三维空间中标量场的梯度为
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z \tag{0.1.14}$$
利用矢量微分运算符
$$\nabla = e_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y} + e_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.1.15}$$
标量场的梯度可以写为
$$A = \nabla f \tag{0.1.16}$$
从标量场梯度定义可以看出，梯度$\nabla f(x,y,z)$在(x,y,z)点的值是标量场$f(x,y,z)$在该点随距离而变的最大变化率，∇f 的方向是 f 增加得最快的方向。记某一方向的单位矢量为 n，∇f 在 n 方向的投影称为 f 在 n 方向的方向导数
$$\nabla f \cdot n = \frac{\partial f}{\partial n} \tag{0.1.17}$$
它表示 f 在沿 n 方向上单位长度上的变化量。

2. 矢量场的通量和散度

矢量场 A 在曲面 S 上的通量 Φ 定义为
$$\Phi = \int_S A \cdot \mathrm{d}S \tag{0.1.18}$$
考虑一种流体的速度 v 乘以其密度 ρ 以后的矢量场 ρv，在曲面 S 上的通量 Φ
$$\Phi = \int_S \rho v \cdot \mathrm{d}S$$
这正是流体在单位时间内流过曲面 S 的质量。对于封闭曲面 S 的通量
$$\Phi = \oint_S A \cdot \mathrm{d}S \tag{0.1.19}$$
描述了矢量场A与闭合曲面S内激发矢量场的源的关系。当(0.1.19)式积分结果为正值时，表示闭合曲面 S 内有激发矢量场的“正源”；为负值时，闭合曲面 S 内有“负源”；等于零时，表示“无源”，或者是“正源”与“负源”的代数和相等。

矢量场的散度则是描述在某一空间点上矢量场与源之间的关系，它定义为
$$\mathrm{div}A = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S A \cdot \mathrm{d}S}{V} \tag{0.1.20}$$
div 是 divergence 的缩写。式中V是闭合曲面S所包围的体积，当体积V趋于零(趋向于一点)时的极限就是矢量场 A 在该点的散度。可以证明散度运算为
$$\mathrm{div}A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \tag{0.1.21}$$
在圆柱坐标里散度运算为
$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}A_\theta + \frac{\partial}{\partial z}A_z \tag{0.1.22}$$

3. 矢量场的环量和旋度

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在闭合回路 L 上的环量定义为

$$I = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{0.1.23}$$

环量描述了矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在回路 L 的范围内的涡旋特性。而矢量场的旋度则描述在某一空间点上场的涡旋特性。矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度记为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{0.1.24}$$

定义是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{0.1.25}$$

$\boldsymbol{A}$ 在闭合曲面 S 上的积分除以曲面 S 所包围的体积 V，然后令体积 V 趋向于零的极限就是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在该点的旋度。旋度的分量定义式为

$$\frac{\boldsymbol{S}}{S} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \tag{0.1.26}$$

(0.1.26) 式中的 S 是以闭合回路 L 为边界的曲面，$\boldsymbol{S}$ 的方向是回路 L 的右手螺旋方向，右边的极限是旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{S}$ 方向的分量。(0.1.25) 定义式与(0.1.26) 定义式是一致的，下面来证明这一点。

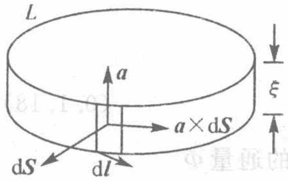


图 0.1.4

设平面曲线 L 在垂直于自己平面的方向上有一个位移；如图 0.1.4 所示，记平面法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{a}$，对(0.1.25) 式作如下运算

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$$

这里的积分面是图 0.1.4 所示的闭合曲面，在上下平面里有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向平行，有

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

上下平面对积分贡献为零。在侧面取如图所示的面元有 $\boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \xi \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

被积函数

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} = \xi \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{A}$$

注意到 $V = \xi S$，S 是以曲线 L 为边界的面积

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{\xi S} \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \xi \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

消去 ξ 以后，即得到(0.1.26) 式。

4. 矢量场的两个定理和积分公式

矢量积分的 Gauss 定理

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{0.1.27}$$

Gauss 定理是体积分与面积分转换的基本运算公式。

Stokes 定理

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.1.28}$$

Stokes 定理是线积分与面积分转换的基本运算公式。

利用(0.1.27) 和(0.1.28) 的两个积分定理可以证明下列的积分公式

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V = \oint_S (\phi \nabla\psi - \psi \nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.1.29}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \, \nabla \times \boldsymbol{f} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f} \tag{0.1.30}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \, \nabla\varphi = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\varphi \tag{0.1.31}$$

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\varphi = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\varphi \tag{0.1.32}$$

下面作为例子，证明(0.1.31)式。考虑一个任意的常矢量 $\boldsymbol{a}$，用 $\boldsymbol{a}$ 点乘(0.1.31)式两边

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_V \mathrm{d}V \, \nabla\varphi = \boldsymbol{a} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\varphi \tag{0.1.33}$$

注意到　$\nabla \cdot (\boldsymbol{a}\varphi) = (\nabla \cdot \boldsymbol{a})\varphi + \boldsymbol{a} \cdot \nabla\varphi = \boldsymbol{a} \cdot \nabla\varphi$

(0.1.33)式左边　$\boldsymbol{a} \cdot \int_V \mathrm{d}V \, \nabla\varphi = \int_V \mathrm{d}V \, \nabla \cdot (\boldsymbol{a}\varphi)$

利用(0.1.27)式　$\int_V \mathrm{d}V \, \nabla \cdot (\boldsymbol{a}\varphi) = \oint_S \boldsymbol{a}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \cdot \oint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

即等于(0.1.33)式的右边。由于 $\boldsymbol{a}$ 的方向任意，所以(0.1.31)式成立。

三、算符∇的运算

在直角坐标系中算符∇定义为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{0.1.34}$$

显然∇是一个矢量微分运算符，遵从矢量与微分运算的双重运算规则。下面考虑 $\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})$ 的运算来说明∇算符的双重性，这里∇的微分运算要对 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 两个函数都要作运算，记 ∇_f 只对 $\boldsymbol{f}$ 作微分运算，∇_g 只对 $\boldsymbol{g}$ 作微分运算，再利用(0.1.9)式，则有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) &= \nabla_f \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) + \nabla_g \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) \\ &= (\boldsymbol{g} \cdot \nabla_f)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}(\nabla_f \cdot \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f}(\nabla_g \cdot \boldsymbol{g}) - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla_g)\boldsymbol{g} \end{aligned}$$

所以有　$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f}(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$　(0.1.35)

四、矢量场的分解

1. 两类矢量场

矢量场的散度与旋度是矢量场的重要特征量，我们可以按照其散度与旋度的取值情况对矢量场进行分类。第一类是无旋场，其充要条件是旋度为零

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{0.1.36}$$

无旋场 $\boldsymbol{A}$ 由其散度完全描述。无旋场是没有涡旋特性的矢量场，其矢量线不可能形成闭合曲线，一定是有头有尾，即从某一点出发到某一点终止的曲线。无旋场可以引入一个标量势的梯度来表示

$$\boldsymbol{A} = \nabla\varphi \tag{0.1.37}$$

φ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的标量势函数。显然(0.1.37)代入(0.1.36)无旋场的充要条件恒能满足。无旋场又称为保守场、有势场、梯度场，也称为纵场。例如静电场就是无旋场。

另一类矢量场是有旋场，其充要条件是散度为零

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0 \tag{0.1.38}$$

有旋场 $\boldsymbol{f}$ 由其旋度完全描述。有旋场是具有涡旋特性的矢量场，其矢量线是涡旋状的闭合曲线。有旋场可以用矢量势函数的旋度来表示

$$\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{G} \tag{0.1.39}$$

$\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的矢量势函数。有旋场简称为旋场，也称为无源场、横场。例如磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 就是一种旋场，$\boldsymbol{B}$ 的矢量线都是闭合的涡旋线，矢量线的涡旋中心是激发磁场的电流或者是随时间变化的电场。

2. 一般矢量场的分解

一般的矢量场并不都是单纯的纵场或者是单纯的横场，其旋度和散度都可以不为零。但是，任意一个矢量场都可以唯一地分解为纵场与横场之和。

例如，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可以分解为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{E}_t$

这里 $\boldsymbol{E}_l$ 是纵场，满足旋度为零的条件，电场线从正电荷出发到负电荷终止。$\boldsymbol{E}_t$ 是横场，满足散度为零的条件，它是随时间变化的磁场激发的涡旋电场。

又例如速度场，在一个盛满水的大水池底下有一个出水口向外流水，池中水流速度 $\boldsymbol{v}$ 是一个以出水口为中心的漩涡，其分解如图 0.1.5 所示。

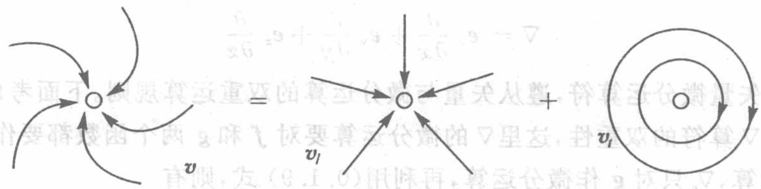


图 0.1.5

即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_l + \boldsymbol{v}_t$，这里 $\boldsymbol{v}_l$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的纵场部分；$\boldsymbol{v}_t$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的横场部分。

由于纵场的旋度为零，纵场由散度唯一确定；横场的散度为零，横场由旋度唯一确定。而任何一个矢量场可唯一分解为纵场和横场之和。所以任意一个矢量场由其旋度和散度唯一确定。即矢量场的旋度和散度描述了场与激发场的源之间的关系，是矢量场的两个关键特征量。

§0.2 张量及其运算

在后面对电磁场的研究中涉及二阶张量的运算，这一节先讨论张量的概念和运算规则。

一、张量的概念

1. 各种量的特点

① 标量：只需要一个数值就被完全确定的物理量。在线性变换中保持不变。