专升本三导丛书

高等数学

导教·导学·导考

龚芳 主编
冯振英 主审

HIGHER MATHS

西北工业大学出版社

专升本三导丛书

高等数学

导教·导学·导考

龚 芳 主编
冯振英 主审

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书将专科起点升本科的高等数学考试大纲规定的内容，以新颖的结构、科学的编排和生动的形式展现在读者面前，为读者提供了一种在短时间内高效复习的途径。

全书分为 8 章，每章分 5 个板块指导复习，并附有模拟题，共给出 850 多道题目，适合于各类参加专升本的读者进行考前自学、自练、自测及应试强化训练。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/龚芳主编；侯奠社等编. —西安：西北工业大学出版社，2002.8
ISBN 7-5612-1530-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①龚… ②侯… Ⅲ.高等数学—高等教育—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 043482 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：029—8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 厂：西北工业大学出版社印刷厂印装
开　　本：787mm×960mm 1/16
印　　张：19.625
字　　数：431 千字
版　　次：2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数：1～6 000 册
定　　价：25.00 元

前　言

为了帮助广大读者更好地把握高等数学的主脉，跨越抽象、枯燥的门槛，增强学习兴趣，提高学习效率，本书编写人员细致地研究专科升本科的考试大纲，认真地分析近年命题趋势，以一种新颖的结构，科学的编排，生动的形式，将考试大纲要求的内容系统、简明地展现在读者面前。从而使读者在较短时间内对繁杂、众多的数学概念、理论、公式能系统全面、层次分明地进行复习，巩固基础，掌握重点，突破难点。通过不同难度的阶梯式训练和测试，读者可以及时了解自己对每部分内容掌握的程度，调整学习计划，有的放矢，迅速提高复习效率和应试能力。

本书按考试大纲内容顺序分为8章，每章由5部分组成。

知识网络导学　将每章的知识点以网络结构列出，使零散繁杂的内容作为有机整体呈现，具有全面、具体、简捷、明了的特点，使读者对高等数学的主干内容得以系统了解，有助于知识的融会贯通，有规律、有条理地理解和记忆，便于应用。

重点难点剖析　以问答形式将每章的重点和难点问题提出并给予解答，有理论，有实例。读者在学习这部分内容时，可以根据提问，先主动思考，再参照解答，得到指导，犹如与老师进行交流，使复习成为双向互动式学习过程。

基础知识试题及答案　将各章基础知识反映在测试题中，检测读者对基础知识的理解和掌握程度，以灵活多样的题型帮助读者复习基础知识。在试题答案部分，不仅给出每道题的答案，同时指出题目所涉及到的知识点、解题思路、解题方法，使读者能够举一反三。

能力提高试题及精解　在前一部分的基础上提高题目难度，适当地增加解题的灵活性、技巧性以及对知识的综合运用。编选的题目具有典型性、代表性，读者通过这部分练习和对试题精解的学习，可以得到基本解题技巧和各章知识综合运用能力的训练。

专升本测试题及答案　从实战出发按各章内容编写的模拟试题，既突出每章的考点，又反映全科知识的交融综合，题量题型均与一套正式考题相仿，从而有助于读者应试能力的训练和提高。

附录中的专升本模拟试题及参考答案可以帮助读者进一步把握高等数学的题型和考点，在分章训练的基础上进行综合强化训练，应试能力会更上一层楼。

本书由长安大学侯奠社编写第1章，马娜蕊编写第3章，冯复科编写第4，7章，韩英编写第5，8章，王鸿编写第6章，北京印刷学院龚武编写第2章；由长安大学龚芳任主编，冯振英任主审。在本书编写和试用过程中得到了长安大学的任功全老师的热情指导以及长安大学应用技术学院教务科领导和老师的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于水平所限，书中错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002年4月

目　录

第 1 章　函数、极限和连续

【知识网络导学】

函数

函数的概念　函数、分段函数、反函数、复合函数、基本初等函数、初等函数.

函数的表示　图像法、表格法、公式法.其中公式法表示包括(1) 一个解析式子表示,(2) 几个解析式子表示即分段表示,(3) 隐式表示,(4) 参数方程表示.

函数的简单性质

(1) 奇偶性:若对任意的 $x\in D$, 有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$), 则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

(2) 单调性:若对于任意的 $x_1,x_2\in I\subset D$,且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在 I 上单调递增(或单调递减).

(3) 有界性:若存在 $M>0$,使得对任意的 $x\in D$, 有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 上有界.

(4) 周期性:若对任意的 $x\in R$,存在 $T>0$,使 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,最小的 T 称为$f(x)$的周期.

概

数列极限、函数极限、函数在点 x_0 处的左、右极限.

无穷小量　若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$,则称 $f(x)$为 $x\to\square$ 时的无穷小量(无穷小).

无穷大量　若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$,则称 $f(x)$为 $x\to\square$ 时的无穷大量(无穷大).

极限

念

无穷小的阶　设 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0$，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C$（$C$ 为常数）

(1) 若 $C=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(2) 若 $C\neq0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小，特别当 $C=1$ 时称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

性质与结论

1. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则极限值惟一.
2. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，反之不真.
3. 单调有界数列必有极限.
4. 若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\ (n>N)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$
5. 若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=B$，则 $A=B$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.
7. 极限的四则运算法则（略）.
8. 无穷小量的性质

   有限个无穷小的和（或积）仍为无穷小.

   有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

   若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=0$.

   若 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq0$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$.

   若无穷小 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.
9. 几个常用的等价无穷小，当 $x\to0$ 时有

   $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

   $e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(\alpha\in\mathbf{R})$
10. 几个常用的重要极限

    $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

连续

函数连续的概念

1. $f(x)$在点 x_0 连续的概念

定义 1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

定义 2° $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

$f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow f(x)$在点 x_0 处左、右连续.

2. $f(x)$在$[a,b]$上连续的概念

$f(x)$在(a,b)内每一点处连续,在 $x=a$ 右连续,在 $x=b$ 点左连续.

3. $f(x)$的间断点及分类

(1) 若 $f(x)$不满足 a) 在 x_0 点有定义; b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在; c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$中任意一条,

则$f(x)$在 x_0 处间断,称 x_0 为 $f(x)$的间断点.

(2)若 $f(x)$在 x_0 处间断,但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在,则称 x_0 为 $f(x)$的第一类间断点

(若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$,则称 x_0 为可去间断点,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,则称

x_0 为跳跃间断点),非第一类间断点的间断点称为第二类间断点(含无穷间断点,振荡间断点

等).

连续函数的相关结论

1. $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0)$.

2. 基本初等函数在其定义域内连续,初等函数在其定义区间内连续.

3. 闭区间上的连续函数在该区间上一定有最大值和最小值;一定有界;一定取得介于最大值,最小值之间的任何值.

4. (零点定理)设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

【重点难点剖析】

1．下列各组表达式是否表示同一函数？

A. $y=\sqrt{x^2}$； $y=\begin{cases}x, & x>0\\0, & x=0\\-x, & x<0\end{cases}$； $\begin{cases}x=t\\y=\sqrt{t^2}\end{cases}$； $y-\sqrt{x^2}=0$.

B. $y=1+x^2$； $u=1+v^2$； $s=\sqrt{1+t^2}$.

C. $f(x)=\ln(x^2-4)$； $g(x)=\ln(x+2)+\ln(x-2)$.

答 确定函数的两个要素是定义域 D 及对应关系 f，只有当两个函数的定义域与对应关系完全相同时，它们才是同一函数．由此可知，A 中所给出的几个表达式表示的是同一函数．因为它们的定义域都是 $D=\{x\mid x\in(-\infty,+\infty)\}$，对应关系 f 也完全相同．所不同的只是它们表示对应关系 f 的形式有所不同，它们分别是函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的显式、分段式、参数式及隐式表示，实际上它们正是函数表示中的几种常见形式．B 中 $y=f(x)$ 与 $u=f(v)$ 表示同一函数，这是因为它们的定义域及对应关系 f 完全相同，不同的是它们表示变量所选择的字母不同，而 $y=1+x^2$ 与 $s=\sqrt{1+t^2}$ 则表示不同的函数，这是因为，y 与 s 表示不同的对应关系。C 中 $f(x)=\ln(x^2-4)$ 与 $g(x)=\ln(x+2)+\ln(x-2)$ 是不同的两个函数，因为 $f(x)$ 的定义域 $D_1=\{x\mid x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\}$，而 $g(x)$ 的定义域 $D_2=\{x\mid x\in(2,+\infty)\}$，即 $D_1\neq D_2$.

2．下列结论正确吗？

A．任意两个函数都能构成复合函数．

B．复合函数 $y=\cos^2(a^{\arctan\sqrt{x^3+3x}})$ 可以分解为

$$y=u^2,\quad u=\cos v,\quad v=a^w,\quad w=\arctan s,\quad s=\sqrt{t},\quad t=x^3+3x$$

C．函数 $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为

$$D=\{x\mid x\in[1,2)\cup(2,4]\}$$

答 A 是错误的，因为不是任意两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$．例如 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-3$ 就不能构成复合函数 $y=\sqrt{\sin x-3}$．因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=\{u\mid u\in[0,+\infty)\}$ 与 $u=\sin x-3$ 的值域 $R_\varphi=\{u\mid u\in[-4,-2]\}$ 的交集是空集．一般地，当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时，这时两个函数才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，两个以上的函数复合也有类似的结论．对于 B 中的分解得到的 $y=u^2$；$u=\cos v$，$v=a^w$，$w=\arctan s$，$s=\sqrt{t}$ 都是基本初等函数，但 $t=x^3+3x$ 不是基本初等函数，而是两个函数之和，前者是基本初等函数，后者是常数与基本初等函数的积，这种表达式常称为简单函数，而对于简单函数一般不必再作分解，故 B 中的结论是正确的．对于 C

中给出的函数的定义域应是 $\varphi(x)=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 与 $\psi(x)=\frac{1}{x-2}$ 的定义域的交集.而 $\varphi(x)=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 是一个复合函数,求它的定义域时,可以由外到里将复合函数分解成一系列简单函数,$y=\sqrt{u}$,$u=\lg v$,$v=\frac{5x-x^2}{4}$ 再考察各层函数在满足前一层条件下的定义域.

由 $u\geqslant0$,得 $u=\lg v\geqslant0$,从而 $v\geqslant1$,即 $\frac{5x-x^2}{4}\geqslant1$,进而有 $5x-x^2\geqslant4$,$\Rightarrow x^2-5x+4\leqslant0$,解此不等式得 $1\leqslant x\leqslant4$.则 $\varphi(x)$的定义域 $D_\varphi=\{x\mid x\in[1,4]\}$.而 $\psi(x)=\frac{1}{x-2}$的定义域为 $D_\psi=\{x\mid x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\}$,由此可得 $y=\varphi(x)+\psi(x)$的定义域为 $D=D_\varphi\cap R_\psi=\{x\mid x\in[1,2)\cup(2,4]\}$,故 C 中的结论正确.

3. 下列结论对吗?

A. 初等函数在其定义域内都是连续的.

B. 分段函数一定不是初等函数.

C. 复合函数一定是初等函数.

答 基本初等函数在其定义域内是连续的,而初等函数在其定义区间内是连续的.定义区间与定义域有所不同,定义区间是包含于定义域内的区间,定义域不一定是区间,可能包含孤立点,或者只包含孤立点.例如初等函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x+1}+4}$ 的定义域为$(-1,+\infty)$及 $x=-2$.这里$(-1,+\infty)$是 $f(x)$的定义区间,而 $x=-2$ 是 $f(x)$的定义域内的一个孤立点,由于函数在 $x=-2$ 的邻近没有意义,不具备讨论连续性的前提条件,当然也就谈不上函数在该区点连续了,因此说 $f(x)$在其定义区间$(-1,+\infty)$内是连续的,而不能说 $f(x)$在定义域内是连续的.再如 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ 是初等函数,而它的定义域为 $D=\{x\mid x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.该函数没有定义区间,它在定义域内任一点都不连续,所以结论 A 是错误的,正确的应是初等函数在其定义区间内是连续的.对于 B 中的结论,由初等函数的定义可知一般分段函数不是初等函数,因为它不是用一个式子表示的函数.但有些分段函数却满足初等函数的定义.

如 $y=\begin{cases}x-1, & x>1\\0, & x=1\\1-x, & x<1\end{cases}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=(x-1)^2$ 复合而成的,且可由 $y=\sqrt{(x-1)^2}$ 表示,所以是初等函数,即 B 中的结论也是错误的,至于 C 中的结论也不正确.

如 $y=\begin{cases}3x+1, & 0\leqslant x\leqslant1\\x^2, & x>1\end{cases}$,$g(x)=\ln x$,则复合函数 $f[g(x)]=\begin{cases}3\ln x+1, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\\ln^2x, & x>\mathrm{e}\end{cases}$ 就不是初等函数.

4. 以下关于无穷小量的结论是否正确?

A. 0 是无穷小量.

B. 无穷小量就是绝对值非常小的数.

C. x^2 是无穷小量.

答 因为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} 0 = 0$,故 $f(x)=0$,是 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小量,即结论 A 是正确的.

而对于任意的非零常数 a(无论 $|a|$ 多么小)因为 $\lim a = a \neq 0$,所以在自变量的任何变化过程中它都不是无穷小量,即 B 中的结论是错误的.

结论 C 中说 x^2 是无穷小量显然是错误的,因为谈一个变量是否是无穷小量是与自变量的变化过程密切相关的,抛开自变量的变化过程谈无穷小量是不妥当的(只有零才可以),如:$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$,所以 x^2 在 $x \to 0$ 时的无穷小量.而 $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$,所以 x^2 在 $x \to 1$ 时不是无穷小量,而 $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$,所以 x^2 是 $x \to \infty$时的无穷大量.综上所述,无穷小量是一种特殊的函数,它是在自变量的某一变化过程中极限为零的函数,常数一般不是无穷小量,而零是惟一可以作为无穷小量的常数.

5. 函数极限与数列极限有什么关系?

答 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 的充分必要条件是对于任意的满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ $(x_n \neq a)$的数列$\{x_n\}$有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.其中 a, A 可以为实数或∞.利用此关系可以解决以下问题.

(1) 利用函数极限的结论或求极限的方法求数列的极限.

例如 求 $\lim\limits_{n \to \infty} 3^n \sin \frac{1}{3^n}$ 时,由于 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,由充要条件知,当取 $x_n = \frac{1}{3^n}$时,因为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$,所以有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 3^n \sin \frac{1}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

再如求 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\arctan^3 \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n^2})}$ 时,令 $f(x) = \dfrac{\arctan^3 x}{\sin x \ln(1 + x^2)}$,

因为
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan^3 x}{\sin x \ln(1 + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x \cdot x^2} = 1$$

所以当取 $x_n = \frac{1}{n}$时,$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$,由以上关系得

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\arctan^3 \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} \frac{\arctan^3 x_n}{\sin x_n \ln(1 + x_n^2)} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$$

由于求函数极限比求数列极限有较多较好的方法(如洛必塔法则等),从而可以利用此关系来计算一些较复杂的数列极限,如求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \frac{1}{n^2} \ln \frac{1}{n^2}$.

因为

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x \xlongequal{(0\cdot\infty)} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \xlongequal{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\ \frac{-\sin x}{\cos x}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

取 $x_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

即得

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n^2}=0$$

(2) 为了证明极限 $\lim_{x\to a}f(x)$ 不存在，只需寻找两个趋于 a 的数列 $\{x_n^{(1)}\}$，$\{x_n^{(2)}\}$，使得 $\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})\neq\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})$ 即可.

例如 证明极限 $\lim_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

证明 可取 $x_n^{(1)}=2n\pi$，$x_n^{(2)}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，则 $x_n^{(1)}\to+\infty$，$x_n^{(2)}\to+\infty$.

而

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}\neq\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}$，故极限 $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

6. 求极限有哪些常用方法?

答 求极限的常用方法有:

(1) 利用函数的连续性定义，若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；若 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，且 $\lim_{x\to x_0}u(x)=u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=f[\lim_{x\to x_0}u(x)]=f(u_0)$$

(2) 利用极限的四则运算法则.

(3) 对于 $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 为 x 的多项式，可以利用公式:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}$$

(4) 对于求分式函数的极限，若分母的极限为零，而分子的极限不为零，则利用无穷小与无穷大的关系可得所求极限为 ∞.

若分子、分母的极限都为零，可考虑进行恒等变形(如有理化等)，然后消去分子、分母中的零因子(即极限为零的因子)后再求极限.

（5）利用两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \left(\frac{0}{0}型\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad (1^{\infty}型), \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad (1^{\infty}型)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \quad (1^{\infty}型)$$

这里应用公式时应注意上述极限的结构特点，$\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \quad \left(\frac{0}{0}型\right)$，其中$\square$可以是 x，也可以是 x 的函数，只要满足上述结构形式该公式都可以用.

如 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1, \quad \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1 \quad (\varphi(x)\neq 0)$$

类似地 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e \quad (1^{\infty}型) \quad \lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e \quad (1^{\infty}型)$.

（6）利用无穷小量的性质：

无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.

无穷大的倒数是无穷小量.

有限个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量.

若 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0,\lim\alpha'=0,\lim\beta'=0$，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，又 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

在求极限的运算中，使用等价无穷小代换常会使计算变得简单快捷，但需要记忆一些常用的等价无穷小量，如 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^a-1\sim ax \quad (a\in\mathbf{R})$.

以上等价无穷小还可以推广使用.

如 $x\to 0$ 时， $x^2\sim\ln(1+x^2)$，$e^{\tan x}-1\sim\tan x$

即 $\square\to 0$ 时， $\square\sim\ln(1+\square)\sim\sin\square\sim\tan\square\cdots$

但使用时需**注意**，等价无穷小代换只能在乘除法中做整体代换或因子代换，不能在加减法中使用.

（7）利用左、右极限.求分段函数在分段点处的极限，当函数在分段点两侧的表达式不同时，要用左极限与右极限来判定函数在该点处的极限是否存在.

（8）利用洛必塔法则。对一般的未定式常利用洛必塔法则求极限，而洛必塔法则只适用于$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，其它类型未定式如 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^{\infty}$等计算时都需转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型后方可使用洛必塔法则.

7. 下列各运算正确吗？

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\ \lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x-x}=\lim\limits_{x\to0}1=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$ 不存在.

答 (1) 不正确，因为 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，故不能使用乘积的极限等于极限的乘积这一法则，所以 $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\ \lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 的解法是错误的，正确的解法是利用无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量的结论.

因为 $x\to0$ 时，x 是无穷小量，而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，所以 $x\to0$ 时，$x\cos\dfrac{1}{x}$ 仍为无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 结论成立. 但运算过程不明确. 正确的叙述方法应该是：

因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$

由无穷小量与无穷大量的关系得 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\infty$

(3) 结论错误. 这里在计算极限时错误地利用了等价无穷小代换，没有注意到当 $x\to0$ 时虽然 $x\sim\sin x$，$x\sim\tan x$，但并不能推出 $x\to0$ 时 $(x-x)\sim(x-\sin x)$，$(x-x)\sim(x-\tan x)$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x-\sin x}=0\neq1$，故 $x\to0$ 时，$x-x$ 与 $x-\sin x$ 不等价，所以计算过程中的等价代换是错误的，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}\neq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x-x}=1$.

事实上 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sec^2x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\cos^2x}{1-\cos^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$

(4) 中的运算也是错误的，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$ 中尽管每一项的极限都是零，但这里的项数是随着 n 的增大而无限增加的，即第二个等号右端成为无穷多个无穷小量之和，它未必是无穷小量.

事实上 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=$