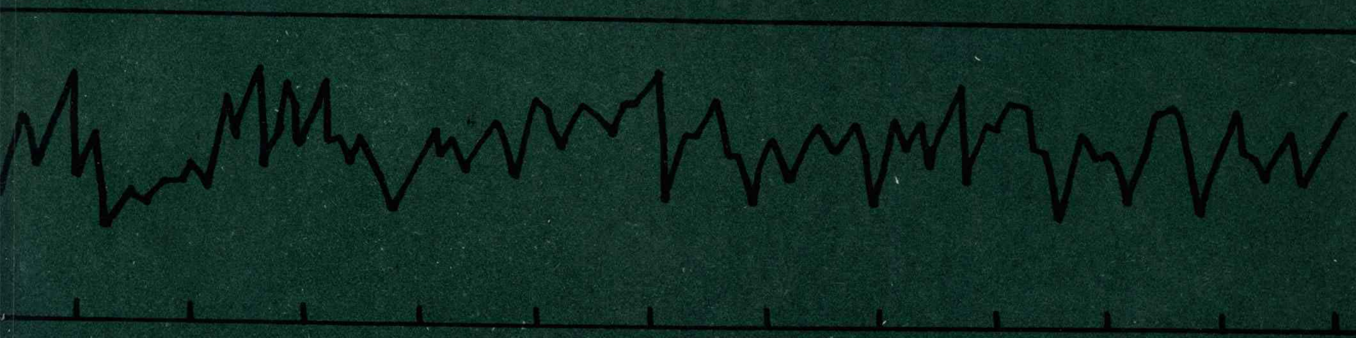
K·J·阿斯托姆 著

随机控制理论导论

郭尚來 译　李清泉 校



清华大学自动化系

1980.6.

Karl J. Åström

INTRODUCTION TO STOCHASTIC CONTROL THEORY

ACADEMIC PRESS, 1970

内 容 简 介

本书是一本较好的随机控制理论的教材。书中讨论了离散时间和连续时间线性随机控制系统的分析和综合方法，内容包括随机过程、随机状态模型、参数最优化、预报和滤波理论、最小方差控制和具有二次判据的一般线性随机控制理论。书中使用的算法简洁实用，并适合计算机计算。作者导出的最小方差控制已在工业中得到了广泛的应用。

本书适于高等院校有关专业高年级学生、研究生、自动控制工程技术和研究人员阅读。

封面设计：陈浩凯

目　　录

前　　言

本书的目的是介绍随机控制理论——主要内容有随机过程分析、参数最优化和最优随机控制。本书限于论述具有二次判据的线性系统。内容既包括离散时间系统，也包括连续时间系统。

前三章提供了随机过程的机理和基础知识。第四章专门分析输入量是随机过程的动力学系统。第六章讨论一类简单的随机系统的最优控制问题，这一章还包括随机控制理论在工业中应用的例子。第七章包括滤波和预报理论，而具有二次判据的线性系统的一般随机控制问题在第八章中处理。

在每一章中，我们都首先讨论该章内容的离散时间方案，然后再转到连续时间方案。与离散时间情况相比，连续时间方案无论在概念上、还是在分析上都更困难些。但是第六章是个例外，这一章只处理离散时间系统。

本书有下列几个方面的用法：

· 与应用有关的简短内容包括第一章，第二章的综述，第三和第四章的第1、第2和第3节，第五章的第1和第4节，第六章，以及第七和第八章的综述。

· 离散时间随机控制的引论，除了包括上面提到的各章节外，还有第五章的第2节，第七章的第 1—5 节，以及第八章的第 1—6 节。

· 离散时间过程和连续时间过程的随机控制内容贯穿于本书的各章节中。

使用本书必须具备的知识是数学分析、概率论（不一定必须具备随机过程的基础知识）和动力学系统（包括频率响应和连续时间和离散时间系统的状态空间法）。熟悉确定性二次判据的线性系统最优控制理论的读者，能更深刻的理解本书所讨论的问题，虽然这些知识对阅读本书不是绝对必要的。

本著作是根据 1962—1969 年期间，在厂矿企业和高等院校讲课的内容加以充实而写成的。初稿于 1963 年，在加里福尼亚州圣约瑟和纽约州约克敦高地的 IBM（国际商用机器公司）研究实验室举行的讨论会上提出过。修改稿于 1964 和 1965 年期间，在瑞典斯德哥尔摩的 IBM 北欧实验室、皇家工学院和国防研究所讲解过。从 1965 年起，本书部分内容已作为瑞典兰德工学院的研究生教材。在 1968—1969 学年期间，全部手稿作为兰德工学院研究生的随机控制教材讲授过。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　随 机 控 制

1. 引　　言

这头一章将用来说明随机控制理论的适用范围。在第 2 节将扼要地讨论控制理论的发展过程。重点是讨论确定性控制理论的发展过程。这一理论的主要限制在于，它无法真正区分开环系统和闭环系统之间的差别。这主要是因为在确定性控制理论的体系中，很多扰动都被忽略了。在第 3 节我们将讨论表征扰动时的困难。在第 4 节给出了随机控制理论发展的概况和最重要的成果。第 5 节专门介绍本书各章的内容要点。

2. 反 馈 控 制 理 论

控制理论最初是为了得到一种工具来分析和综合控制系统而发展起来的。早期发展与离心调速、工业过程的简单调节装置、电子放大器和炮火控制系统等相联系着。随着这个理论的发展，适用于各种各样的系统的技术性的以及非技术性的工具就出现了。在控制理论的整个发展过程中，应用数学各个分支的成果都得到了利用。控制问题也为应用数学带来了一些新的结果。

在早期发展中，主要着重发展建立在象饶斯一霍维兹定理的成果之上的稳定性理论。这个理论的产生是一个理论与实践相互影响的好例子。稳定性问题实际上是斯托多拉向霍维兹提出的，斯托多拉在实际设计蒸汽透平的调速器时发现了这个稳定性问题。

分析反馈放大器用了解析函数的理论，并且，特别从分析中形成了著名的奈魁斯特判据。

在战后发展期间，摆在控制工程师面前的一些问题都需要有极精确的特性。被研究的很多控制过程都是很复杂的。这就导至可以按最优问题来列写综合问题，从而能够采用变分法并改进这些方法。这样发展的结果，就产生了确定性过程的最优控制理论。这种理论与数字计算机相结合，已被证明是一种很成功的设计工具。当使用最优控制理论时，经常对稳定性问题不感兴趣，这是因为，在相当普遍的条件下，最优系统总是稳定的。

确定性过程的最优控制理论具有下列特点：

· 程序控制（开环系统）和反馈控制（闭环系统）之间没有差别。

· 最优反馈是一个简单的函数，它把状态空间映照到控制变量空间内。因此，在最优反馈中没有动力学问题。

· 当列写问题方程和求解问题时，无法直接引用用于计算控制信号实际值的可用信息。

我们能用一个简单的例子来说明这些性质。

例 2.1

考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=u \tag{2.1}$$

它的初始条件为

$$x(0)=1 \tag{2.2}$$

假设希望用这样一种方式控制这个系统，即由性能指标

$$J=\int_0^{\infty}[x^2(t)+u^2(t)]dt \tag{2.3}$$

尽可能的小来衡量该系统的特性。显而易见，指标（2.3）的极小值是 $J=1$，并且，对于程序控制，达此极小值的控制为

$$u(t)=-e^{-t} \tag{2.4}$$

而对于反馈控制策略，达此极小值的控制为

$$u(t)=-x(t) \tag{2.5}$$

方程（2.4）表示开环控制，因为控制信号值由事前的数据就可完全决定，而与过程如何进展无关。方程（2.5）表示反馈控制，因为控制信号在时刻 t 的值取决于过程在时刻 t 的状态。

这个例子说明，开环系统（2.4）和闭环系统（2.5）在这样的意义上是等价的，即对于性能指标函数（2.3），它们都给出同样的值。然而，它们的稳定特性是极不相同的。具有反馈控制（2.5）的系统（2.1）是渐近稳定的，而具有程序控制（2.4）的系统（2.1）是稳定的，而不是渐近稳定的。实际上，反馈控制（2.5）和开环控制（2.4）有很大的差别。例如，通过引入扰动，或者假设控制信号是由一个系数略有误差的模型来计算时，就可以看到这种差别。

上述确定性控制理论的几个特性用于反馈控制时，在理论上是很不方便的。当引入确定性最优控制理论后，长期以来在该领域中特别反应出这样的事实，即它无法表示开环系统和闭环系统之间的差别，并且在反馈回路中没有动力学特性。例如，要得到一个相当于在工业中广泛应用的、众所周知的 PI 调节器的策略是不可能的。这就是广泛公开讨论的有关控制理论与实践相脱节的一个理由。确定性控制理论的局限性，从一开始就为在这个领域工作的很多学者所理解，现在这种理解就更广为传播了。问题的关键在于，在确定性控制理论中，没有采用实际的扰动模型。即使引入一个所谓的扰动，也总是认为这个扰动是一个予先知道的函数。在这种情况下，当系统由具有唯一解的微分方程决定时，很明显，初始条件的知识就等价于在任意瞬间的系统状态的知识。这说明，为什么在开环系统和闭环系统之间在特性上没有什么不同，为什么给定初始条件的假设就明显地包含了这样的知识，即在全部时间内，状态实际值都是已知的。还有，当系统

的状态已知时，最优反馈将始终是一种函数，它把状态空间映照到控制变量空间内。在后面将会看到，当系统的状态不知道，而只能根据输出信号的量测复现时，就提出了反馈的动力学问题。

考虑扰动的重要性在控制理论发展的初期就为专业人员所理解。很多经典综合法也能用直接推断法来处理扰动问题。请看摘自 A. C. 哈尔*的下列引文：

"我清楚地记得这样一件事，那是在麻省理工学院（M.I.T.），我和斯潘里合作，共同控制一台空载雷达，我们研制了第一个这样的控制系统。我们两人于 1941 年 12 月 7 日（星期日）在花园城实验室工作了一整天，直到深夜都未能知道有关攻击珍珠港的信息。那是使人气馁的一天，这是因为，虽然我们已经设计了一套用于检验的精细的试验系统，但完全忽视了噪声的重要性，结果使系统的性能是被大量的起伏摆动所表征了，所以完全不能满足要求。在寻找问题的答案中，导致我们采用了频率响应法。在三个月内，我们制成了一套稳定的、经过改善的控制系统，它具有满意的瞬时响应特性，并且摆动的数量级也很小。对我来讲，这次经验使我对频率响应法建立了高度的信任。"

习题

1. 考虑例 2.1 的问题。试证明控制信号（2.4）和控制律（2.5）是最优的。提示：首先证明恒等式

$$\int_0^T [x^2(t)+\dot{x}^2(t)]dt = x^2(0)-x^2(T)+\int_0^T [x(t)+\dot{x}(t)]^2 dt$$

2. 考虑例 2.1 的问题。假设最优控制信号和最优控制律是由模型

$$\frac{dx}{dt} = au$$

确定的，当系统实际上是由方程（2.1）决定时，a 值接近 1。试相对于用开环控制和闭环控制而得到的系统，确定它的性能指标（2.3）的值。

3. 当例 2.1 的系统实际上是由方程

$$\frac{dx}{dt} = u+v$$

决定时，试比较开环控制（2.4）和闭环控制（2.5）的性能，上式中的 v 是一个未知扰动。特别设 v 是一个未知常数。

3. 扰动的描述

在我们认识了引入切合实际的扰动模型的必要性之后，摆在我们面前的问题就是要寻找适当方法来描述扰动。实际扰动特性不可能准确地预计它们的未来值。现实情况表

* A.C.Hall, in Frequency Response (R.Oldenburger, ed.), p.4. Macmillan, New York, 1956.

明，创造具有这种特性的数学模型是不容易的。例如，不可能用解析函数来模拟扰动，这是因为，如果在一个任意小的区间，解析函数值已知，那么，通过解析延拓，就能确定对其它自变量的函数值。

既然用解析函数不能完成这项任务，我们也许能用统计学概念来模拟扰动。从有关统计时间序列的早期文献中可以看出，这也是不容易的。例如，如果我们用下式来模拟扰动

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\xi_i \tag{3.1}$$

式中 $a_1(t)$，$a_2(t)$，…，$a_n(t)$ 是已知函数，ξ_i 是随机变量，则我们发现，如果线性方程组

$$\begin{aligned}
x(t_1)&=a_1(t_1)\xi_1+a_2(t_1)\xi_2+\cdots+a_n(t_1)\xi_n\\
x(t_2)&=a_1(t_2)\xi_1+a_2(t_2)\xi_2+\cdots+a_n(t_2)\xi_n\\
&\vdots\\
x(t_n)&=a_1(t_n)\xi_1+a_2(t_n)\xi_2+\cdots+a_n(t_n)\xi_n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

有解，那么，随机变量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 的特定实现可由 $x(t_1)$，$x(t_2)$，…，$x(t_n)$ 的观测值准确确定，从而 x 的未来值也可以准确确定。所以，由（3.1）描述的扰动叫做完全确定性随机过程或奇异随机过程。

较为成功的赏试是用随机变量序列来模拟扰动。一个简单的例子是用

$$x(t+1)=ax(t)+e(t),\quad t=t_0,\ t_0+1,\cdots \tag{3.3}$$

给定的自回归过程 $\{x(t)\}$ 来模拟扰动。式中 $x(t_0)=1$，$|a|<1$，而 $\{e(t),\ t=t_0,\ t_0+1,\cdots\}$ 是一个独立正态（0，σ）随机变量序列。另外还假设了对所有 t，$e(t)$ 与 $x(t)$ 独立。举例来说，我们若要基于 $x(t)$ 的观测值来预测 $x(t+1)$ 的值，则通过 $ax(t)$ 来预测 $x(t+1)$ 看来就是合理的。这时预测误差等于 $e(t)$，即等于均值为零，方差为 σ^2 的随机变量。

可见，模拟扰动的问题就是要把扰动描述成随机过程。实际上，随机过程理论的一部分就是从模拟由物理系统中所观察到的涨落而发展起来的。由于象克拉默、克欣特奇纳、柯尔莫各洛夫和维纳等知识伟人的贡献，随机过程理论很快就成熟了。

预测问题是随机过程理论中极为重要的问题。在后面将会看到，预报理论与控制问题也是紧密相关的。

习题

1．考虑由

$$x(t)=a\cos t$$

描述的扰动，式中 a 是随机变量。试给出一个准确予测 x 未来值的计算程序。

2. 考虑由（3.3）描述的一个扰动。试证明预测值 $\hat{x}(t+1)=ax(t)$ 在如下意义上是最优的：它使由 $E[x(t+1)-\hat{x}(t+1)]^2$ 定义的最小二乘预测误差为最小。

4. 随机控制理论

本节将讨论随机控制理论的主要问题和主要成果。还将给出随机控制理论发展概况的扼要说明。

随机控制理论用来研究由差分方程组或微分方程组所描述的、并遭受由随机过程所表征的那种扰动的动力学系统。随机控制理论的目标是解决分析和综合问题。

· 分析——系统变量的统计学特性是什么？

· 参数最优化——假定给定了一个系统和一个已知结构但不知其参数的调节器。为使系统在给定性能指标下实现最优化，如何调整各个参数？

· 随机最优控制——给定一个系统和一个性能指标，寻求使性能指标极小的控制律。

解决所有这些问题所需的方法是最近才发展起来的。在第二次世界大战期间，随机控制理论在麻省理工学院为综合炮火控制系统而得到了应用。在詹姆斯、尼科尔斯和菲利普斯*所写的书中，描写了一个用参数最优化实现的有趣的例子，即跟踪雷达的设计问题。

由维纳和柯尔莫各洛夫发展起来的滤波和预报理论是随机控制理论的基础之一。这个理论使我们有可能从信号加扰动的观测中抽取出有用信号。这个理论在求解随机最优控制问题中伴演着极重要的角色。然而维纳-柯尔莫各洛夫的理论并没有得到广泛地应用。其中一个原因就是它需要一种积分方程（即维纳-霍普方程）的解。在实际问题中，维纳-霍普方程难得有解析解，并且很难在数值上解出这个方程。

在分析和综合时，采用数字计算机大大加速了随机控制理论的发展。卡尔曼和布西对滤波理论做出了有特殊意义的贡献。他们的结果使得用递推法求解预报和滤波问题成为可能。这对数字计算机是非常适用的。还可把卡尔曼和布西的结果推广到非平稳过程。利用卡尔曼-布西理论，可以根据观测导出的线性动力学系统的输出来给出预测值。为了确定动力学系统的各个系数，必须求解黎卡提方程的初值问题。随机控制的黎卡提方程与具有二次判据的线性确定性系统最优控制理论所迁到的方程相似。实际上，预报问题和线性二次控制问题是数学上的对偶问题。无论从理论的观点，还是从实际的观点，这个结果都有重大意义。如果其中的一个问题得到解决，那么我们利用对偶性就能容易地得到另一个问题的解。还有，同样的一个计算机程序既可以用来解决滤波问题，又可以用来解决确定性控制问题。

随机最优控制问题的解紧密地依赖于动态规划的概念和方法。对于具有二次判据的线性系统，其解由所谓分离定理给出。这个结果意味着，最优策略可以设想为是由两部分组成的。见图 1.1。一部分是最优滤波器，它根据输出的观测信号给定的条件均值来

* 见参考书目和注释。

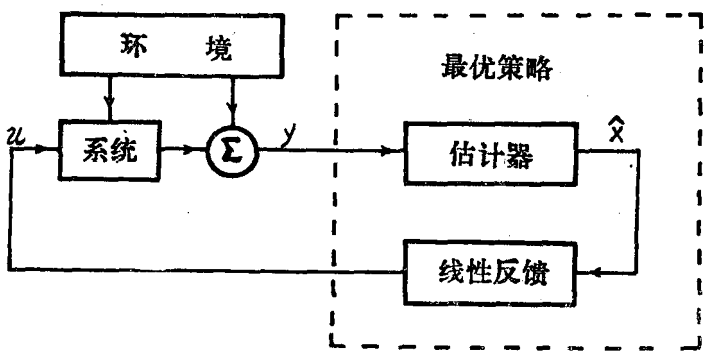


图 1.1　说明分离定理的框图。
u 表示控制变量，y 表示输出，x 表示状态。

计算状态的估计量。另一部分是由估计状态到控制信号的线性反馈。

可以证明，这个线性反馈与在没有扰动，并且系统的状态能准确地量测的条件下所得的线性反馈是相同的。通过求解确定性控制问题就可以确定这个线性反馈。状态的条件均值是从卡尔曼滤波器的输出得到的，本质上，卡尔曼滤波器是经过观测所导出的系统数学模型。滤波器的设计取决于扰动和系统的动力学，而与性能指标无关。

因此，分离定理在滤波理论与最优随机控制理论之间建立了一种联系。分离定理的概念是由约瑟夫和陶* 首先提出的。有关结果是以“确定性等价原理”的名字在“计量经济学”杂志上发表出来。

这样，在求解具有二次判据的线性系统的随机最优控制问题时所得到的最优策略中，它包含的线性动力学系统可能具有时变参量。这类策略包含着多年实践的结果，它一般由特定的方法来完成。因为线性随机控制理论容易处理多输入和多输出问题，所以它是一种很重要的设计工具。理论结果是一种“闭式”解，其最优策略的参数由黎卡提方程初值问题的解给定。解决这种方程可以利用有效的数字算法。但有时，这种方程在数字上难于处理。

线性随机控制理论是可用的最简单的结构之一，它包括了反馈控制系统理论中所希望的几个特点。例如：

· 随机控制理论直接证明了在开环系统和闭环系统之间存在相当大的差别。

· 随机控制系统的性能主要取决于在确定控制信号值时刻的可用信息。例如，被测信号的延迟将直接导至系统特性变坏。

· 最优反馈由线性动力学系统组成。

5. 本书内容要点

在探讨了随机控制理论的某些特点之后，现在来扼要地介绍本书的内容要点。本书

* 见参考书目和注释

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的目的是介绍有关随机过程分析、参数最优化和随机过程的最优控制等方面的理论。不过只限于介绍线性系统，内容既包括离散时间系统，也包括连续时间系统。离散时间情况在概念上和分析上都比连续时间情况简单得多。

应当强调，在使用数字计算机实现控制策略的实际应用中，仅离散时间情况就足够了。离散时间情况的结果是完整的，因为其全部结果均可详细证明。

第二章一般地介绍随机过程理论的某些概念和结果。讨论了象平稳过程、马尔科夫过程、二阶过程和独立增量过程等特定的随机过程。介绍了协方差函数和谱密度。特别专门给出了白噪声概念。这是区分连续时间随机过程和离散时间随机过程的最重要的特征。对于离散时间过程，白噪声是一个简单的、独立的、同分布的随机变量序列。而连续时间过程的白噪声是一个包含更多内容的过程。例如，它有无限方差。

第二章还给出了分析连续时间过程的方法，即微分法和积分法。问题的关键是收敛性的定义。因此，其结果将取决于所选择的拓朴结构。这一章还讨论了不同收敛概念的实际重要性。为简便起见，我们只对依均方收敛进行分析。第二章写的相当简短，对随机过程不熟悉的人要在阅读有关参考文献上花费一些力量。已经熟悉随机过程理论的读者，可以迅速地浏览这一章。

在第三章研究所谓随机状态模型。这一章给出了区分离散时间过程和连续时间过程的另一个有力的说明。处理离散时间过程只需 8 页篇幅，而讨论连续时间过程就需要 45 页篇幅。这一章的目的是建立随机过程状态的概念。粗略地说，对于确定性系统，所谓状态就是为预测系统未来运动所需的系统过去历史情况的最小信息量。而对于随机系统，不可能准确地预测系统未来的运动。代替它的是为预测状态的未来概率分布所必需的最小信息量。可以证明，离散时间系统的状态模型可以用离散时间白噪声，即一个独立的、同分布的随机变量序列驱动的差分方程来描述。所以，这一章详细分析了线性随机差分方程。对于连续时间系统，情况要复杂的多。为得到连续时间过程的状态模型，引入了随机微分方程的概念。我们直观地阐述了这些方程，并且考察了处理这些方程所需的方法。但是，有几个关键性的定理没有给予证明。对于连续时间系统，另一个可供选择的分析方法是建立在 δ 函数变换基础之上的形式分析，但结果不能令人满意，因为形式变换会给出错误的结论。

如果把第二章和第三章两章看成是导论，那么主要的课题就在第四章。这一章介绍了为分析输入量为随机过程的动力学系统所需的主要定理。这一章讨论了输入量是二阶随机过程的、用输入-输出关系（例如用加权函数和传递函数表示这种关系）描述的离散时间系统。情况表明，有可能通过把白噪声加到线性系统来产生出具有一大类协方差函数的随机过程。这些所谓表示定理有可能使结果大大简化，因为大量问题都能归结为研究具有白噪声输入的线性系统。对于连续时间系统，也给出了类似的结果。总之，第四章为我们提供了研究受到随机扰动的控制系统所需的工具。

对线性系统状态变量二次函数的赋值是第五章的主题。我们利用解析函数理论的结果，推导出二次性能指标函数赋值的递推公式。它展现了在稳定性分析和二次性能指标函数赋值之间的重要关系。作为不定常过程参数最优化的说明，我们介绍了利用数学模

型复现动力学系统状态变量的问题。还对具有已知结构的复现器的最优增益进行了讨论。在第七章将证明，这一章选择的结构实际上是最优的。事实上，其结果就是复现状态的卡尔曼滤波器。

第六章专门讨论一种特定的简单的随机控制问题，这就是性能指标在定态时使输出均方差为最小的、单输入和单输出的线性系统。这一特定的问题能使我们透澈了解具有最优解的结构，因为研究这样的系统，只要用很少的数学推导就能证明分离定理。求得的解清楚地表明了在最优滤波和最优控制之间的关系。作为次要的结果，我们还给出了一种求解具有有理谱密度的过程的滤波问题的新算法。在这一章还介绍了随机控制理论在工业中的应用。

在第七章中包括了预报和滤波理论。我们介绍了预测和滤波问题的公式表达式和解的一般特性。研究了高斯过程所必需具备的特性，并导出了卡尔曼递推公式。给出了结果的几何解释和分析了预测误差的特性。还证明了最优预测和最优控制之间的对偶性。

一般的线性二次控制问题在第八章讨论。对于离散时间系统，用了两种不同的方法证明分离定理。直接法利用了动态规划，很明显，它需要状态估计器。还给出了间接的证明，它用了变分法的恒等式。间接证明法能对期望性能指标函数极小值的各个不同项给出物理解释。它还清楚地表明了，对计算每一特定时间的控制信号的可用信息量加以规定是重要的。连续时间系统的分离定理，仅用了间接方法加以证明。

6. 参考书目和注释

Bellman, R. and Kalaba, R. (eds), Mathematical Trends in Control Theory, Dover New York, 1963.

这本书包括很多早期论文的成果，并且对控制理论的初期工作做了很好的综述。

对经典控制理论及现代控制理论的综述见

Åström, K. J., Reglerteori, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1968 (in Swedish).

对确定性控制理论的初步论述见

Athans, M. and Falb, P., Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1966.

Bellman, R., Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. 1, Academic Press, New York, 1967.

Bryson, A. E. Jr. and Ho, Yu-chi., Applied Optimal Control, Blaisdell Waltham, Massachusetts, 1969.

下列两本书对确定性控制理论给出了更完善的分析。

Markus, L. and Lee, E. B., Foundations of the Theory of Optimal Control, Wiley, New York, 1967.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley, New York, 1962.

下列三本书讨论随机控制问题。

Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.

Bellman, R., Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1961.

Aoki, M., Optimization of Stochastic Systems, Academic Press, New York, 1967.

随机控制理论早期应用的例子见

James, H. M., Nichols, N. B. and Phillips, R. S., Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill, New York, 1947.

下列一篇论文和两本书，对模拟扰动的基本困难给出了很好的感性认识：

Yule, G. U., "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Walter's Numbers," Phil. Trans. Roy. Soc., A226, 267—298 (1927).

Wax, N. (ed.), Collected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, New York, 1954.

Wold, H., Stationary Time Series, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1938.

维纳滤波理论见

Wiener, N., The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications, Wiley, New York, 1949.

卡尔曼-布西理论见

Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," ASME J. Basic Eng. 82, 34—45 (1960).

Kalman, R. E. and Bucy, R. S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," ASME J. Basic Eng. 83, 95—107 (1961).

下文发表了分离定理。

Joseph, P. D. and Tou, J. T., "On Linear Control Theory," Trans. AIEE (Applications and Industry), 80, 193—196 (1961).

确定性等价原理公开发表在下列论文中：

Simon, H. A., "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function," Econometrica, 24, 74—81 (1956).

Theil, H., "A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning," Econometrica, 25, 346—349 (1957).

第二章　随 机 过 程

1. 引　　言

本章将介绍以后各章所用的随机过程的理论基础。介绍是非常简单的，更详细的内容可参考一般教科书。对随机过程理论不熟悉的读者应当明白，没有一个人在仅仅阅读这样短短一章之后就能理解这样复杂的随机过程理论。尽管如此，从容易阅读本书其它各章内容来看，本章内容却是不可少的。在第 2 节概述了随机过程的概念。在第 3 节讨论了象正态过程、马尔科夫过程、二阶过程和独立增量过程等这样一些特定随机过程的例子。在第 4 节讨论了协方差函数的特性。在第 5 节引出了谱密度的概念。这一节还特别介绍了离散时间过程和连续时间过程的白噪声的概念。在第 6 节研究了分析连续时间随机过程所用的方法。

2. 随 机 过 程 概 念

随机过程（或随机函数）可以定义为一种随机变量族 $\{x(t), t\in T\}$。随机变量用属于集 T（指标集或参数集）的参数 t 加以标记。在我们的应用中，经常把 t 当作时间，并且我们将考虑两种不同的指标集。当 $T=\{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 或 $T=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 时，此随机过程称为离散参数过程或离散时间过程。当 $T=\{t; 0\leqslant t<\infty\}$ 或 $T=\{t; -\infty<t<\infty\}$ 时，则此随机过程称为连续参数过程或连续时间过程。我们还进一步假设，随机变量 $x(t)$ 在实线上或在 n 维欧几里得空间内取值。一个随机过程 $\{x(t), t\in T\}$ 是两个自变量的函数 $\{x(t, \omega), t\in T, \omega\in\Omega\}$，其中 Ω 叫做样本空间。这样，对于固定的 $t\in T$，$x(t, \cdot)$ 就是一个随机变数，而对于固定的 ω，$x(\cdot, \omega)$ 却是一个时间的函数，它叫做过程的实现、样本函数、轨迹或轨线。可以把样本函数看成是样本函数空间 X 的元素。

随机过程理论的基本困难是在样本空间 Ω（或样本函数空间 X）的子空间上规定出概率测度。实际上，不可能对 Ω 的所有子空间都能规定概率测度，只能对子空间的波莱尔（Borel）体 B 才能规定出概率测度。

在 Ω 子空间的波莱尔体 B 上规定概率测度 P 要用测度论。对于样本函数空间是欧几里得空间的一般随机变量来说，其概率测度能够用一般分布函数加以规定。柯尔莫各洛夫已经证明，通过相似法能规定出在随机过程无限维样本空间的子空间波莱尔体上的概率测度。设 $\{x(t), t\in T\}$ 是一随机过程。假设对任何 k 和任意 $t_i\in T$ 能够确定多维随机变量

$$x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_k)$$

的概率分布，其分布函数

$$
\begin{aligned}
&F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)\\
&=P\{x(t_1)\leqslant\xi_1,\ x(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ x(t_k)\leqslant\xi_k\}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

满足对称性和一致性条件。则分布函数（2.1）叫做随机过程的有限维分布函数。

对称性条件是指，F 对所有的参数对（ξ_i，t_i）都是对称的。而一致性条件表示为

$$
\begin{aligned}
&F(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_{k-1};\ t_1,\ t_2,\cdots,\ t_{k-1})\\
&=\lim_{\xi_k\to\infty}F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

由柯尔莫各洛夫定理可知，可以把概率测度指定在 Ω 的子空间的波莱尔体上，并且必存在一个随机过程 $\{x(t),\ t\in T\}$，使得 x 在时间 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k$ 的值的联合分布具有分布函数 $F(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)$。概率测度用 P 表示。因此，由柯尔莫各洛夫定理指定的概率 P 可由有限维分布函数唯一地确定。

可见，随机过程 $\{x(t,\ \omega),\ t\in T\}$ 是一个函数，它把点 $\omega\in\Omega$ 映照到样本函数空间X内。测度P定义在 Ω 的一些子空间上，而函数 $x(t,\omega)$ 将通过下面的方法在X上导出某个测度。考虑使 $\{\omega;\ x(\cdot,\ \omega)\in A'\}\in\Omega$ 是可测集的集 $A'\in x$。那么我们能定义 $P'\{x\in A'\}=P\{\omega;\ x(\cdot,\omega)\in A'\}$。

描述随机过程的另一种方法是把 x 表述为已知随机过程的函数。例如，考虑 $T=\{\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\}$ 的离散时间情况。设随机过程 $\{e(t),\ t\in T\}$ 是一简单的独立正态（0，1）随机变量序列。并引入由

$$x(t)=e(t)+c_1e(t-1)+\cdots+c_ne(t-n),\qquad t\in T \tag{2.3}$$

定义的随机过程 $\{x(t),\ t\in T\}$。这样定义的过程叫做 n 阶平移平均过程。如果多项式

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的所有根都在单位圆内，我们也能引入由

$$x(t)+a_1x(t-1)+\cdots+a_nx(t-n)=e(t),\ t\in T \tag{2.4}$$

定义的过程 $\{x(t),\ t\in T\}$，它叫做 n 阶自回归过程。

我们曾说过，通常不可能对 Ω 的所有子空间规定概率测度，只能对属于 Ω 子空间的波莱尔体的集才能规定概率测度，而属于波莱尔体的集是对区间进行可数个交和并运算得到的。就应用来讲，这对于离散参数过程并不是严格的限制。但是，对于连续时间过程，这个约束是严格的，因为，例如集

$$\{\omega;\ x(t,\ \omega)\leqslant c\quad \text{对所有}\ t\in(a,\ b)\}$$

就不是波莱尔集。

还可以证明，这种集的测度无法用过程的有限维分布来唯一确定。因此，对于仅用

有限维分布表示的连续参数过程，要给出所有样本函数是有界的、连续的和可微的那种概率通常是不可能的。

一个随机过程的均值定义为

$$m(t)=Ex(t)=\int_{\Omega}x(t,\ \omega)P(d\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi dF(\xi,\ t) \tag{2.5}$$

可见，均值是时间的函数。更高阶的矩可以类似地定义。例如，$x(s)$ 和 $x(t)$ 的协方差给定为

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[x(s),\ x(t)]&=E[x(s)-m(s)][x(t)-m(t)]\\&=\int_{\Omega}[x(s,\ \omega)-m(s)][x(t,\ \omega)-m(t)]P(d\omega)\\&=\int\int_{-\infty}^{\infty}[\xi_1-m(s)][\xi_2-m(t)]d^2F(\xi_1,\ \xi_2;\ s,\ t)\end{aligned} \tag{2.6}$$

习题

1. 设 Ω 是实线上的线段 [0，1]，并且测度 P 为均匀分布。再设指标集 T 也在区间 [0，1] 上；考虑由

$$x(t,\ \omega)=0\text{，对所有 } t \text{ 和 } \omega$$

$$y(t,\ \omega)=\begin{cases}1 & \text{对 } t=\omega\\ 0 & \text{对其它情况}\end{cases}$$

定义的随机过程 $\{x(t),\ t\in T)\}$ 和 $\{y(t),\ t\in T\}$。试证明上述两随机过程有同样的有限维分布，并且证明

$$P\{\omega;\ x(t,\ \omega)<0.5 \quad \text{对所有} \quad t\}=1$$

$$P\{\omega;\ y(t,\ \omega)<0.5 \quad \text{对所有} \quad t\}=0$$

2. 考虑一阶平移平均过程

$$x(t)=e(t)+ce(t-1)$$

式中 $\{e(t),\ t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\}$ 是独立正态（0，1）随机变量序列。试确定 $x(t)$ 和 $x(s)$ 的协方差。

3. 考虑自回归过程

$$x(t)+ax(t-1)=e(t)$$

式中 $|a|<1$，而 $\{e(t),\ t=\cdots,-1,0,\ 1,\ \cdots\}$ 是独立正态（0,1）随机变量序列。试确定 $x(t)$ 和 $x(s)$ 的协方差。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com