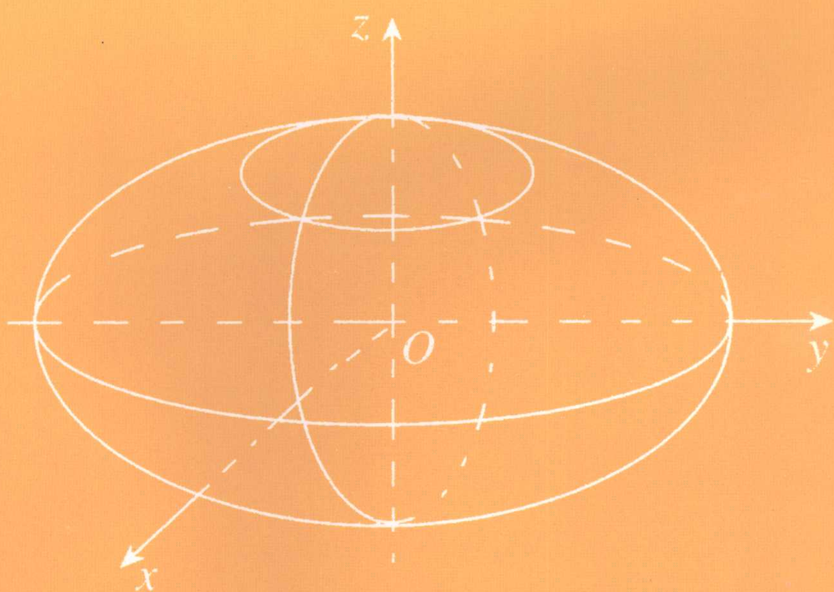
21世纪全国高职高专通用教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE



主编　马殿泉

黄河出版社

21 世纪全国高职高专通用教材

应用数学

主　编　马殿泉　刘增玉
副主编　刘光辉　郭志明
　　　　罗庆丽　朱鹏华
编　者　于　欣　侯学群
　　　　吴　鹏　孙少平

黄河出版社

前　言

高等职业教育是高等教育的重要组成部分，高职教育的目的是为国家现代化建设培养技能型、复合型和应用型高级技术人才．高等数学不但是学习相关专业课和专门技术的基础和工具．同时，它对培养、提高学生的逻辑思维能力和分析问题解决问题的能力发挥着重要作用．

为适应高职院校和高级技工学校教学的需要，依照教育部颁布的高职高专高等数学教学大纲的要求，结合编者多年的教学实践经验编写了这部二十一世纪全国高职高专通用教材《应用数学》．

为了适应不同学校、不同专业的教学需要，本书涉及了微积分、概率论、线性代数、空间几何和离散数学的有关基础知识．遵照“必须”、“够用”的原则，在内容上注重了基本概念、基础知识的学习，加强了基本运算和综合运算的训练，选配了较多的例题和习题，尤其注重了结合专业、结合生活实际的例题和习题的选入，突出了数学的应用性．针对教授对象的实际水平，本书力求做到深入浅出，通俗易懂，清晰准确．对一些较深奥的定理与公式的证明则尽量少讲，一些繁难的例题和习题也未收录．实践证明，本书易教易学，深受师生欢迎．

本书属于通用教材，适合机电、经济、计算机等类专业使用．其中，前六章是各专业必学的内容．除此之外，建议机电类专业再增加空间几何与多元函数微积分两章，或者增加空间几何与概率论两章；经济类专业再增加线性代数和概率论两章；计算机类专业可再增加线性代数和离散数学两章．其他类专业可根据专业课对数学的需求选讲有关章节．总之，施教者可根据本校的专业设置和课时安排，以及生源情况灵活的选择教学内容，做出切实可行的教学计划．

本书第一、二、三章由刘增玉、刘光辉、朱鹏华、吴鹏编写，第四、五、六章由刘增玉、郭志明、于欣、孙少平编写，第七、八、九章由刘增玉、刘光辉、侯学群、罗庆丽编写，第十、十一章由郭志明、罗庆丽、朱鹏

华编写．全书由马殿泉统编。

在本书的编写和出版过程中，得到了编者所在学校有关领导和同仁的支持，在此表示衷心的感谢．

这次再版，虽然经过多年实际应用，集思广益反复修改，已使本书在内容上比较的成熟和完善，但是由于编者水平所限，难免还存在不足之处，在此诚望读者批评指正，提出宝贵意见．

编者于 2008 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

一元微积分的研究对象是变量,而变量之间的对应关系就是函数. 极限方法是研究变量的一种基本方法,本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限等问题.

第一节　函　　数

一、变量与区间

1. 变量与常量

在生活和工作实践中,人们经常遇到各种各样的量. 在某一过程中不起变化,也就是保持同一数值的量,叫做常量;而变化着的,也就是可以取不同数值的量,叫做变量.

常量通常用字母 a、b、c 等表示,变量通常用字母 x、y、z 等表示.

例如,在自由落体运动中,物体经过的路程 s 随时间 t 的变化而变化:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

这里的 s 和 t 为变量,而 g 为常量.

一个量是常量还是变量,与"过程"密切相关. 例如,重力加速度 g,就小范围地区来说是常量,就大范围地区来说是变量.

任何一个变量,总有一定的变化范围. 例如,在上述自由落体运动中,时间 t 的变化范围应是从运动开始的时刻 $t = 0$ 到物体落地的时刻 $t = T$;又如,某天的最高气温为2℃,最低气温为 -8℃,那么这一天的气温的变化范围就是 -8℃ 到2℃.

2. 区间

设 a,b 为两个任意实数,且 $a < b$,数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

在数轴上如图 1 - 1(a) 所示;数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

在数轴上如图 1 - 1(b) 所示.

(a)　　(b)

图 1 - 1

类似地，

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和$(a,b]$ 都称为**半开区间**.

上述各区间都称为**有限区间**，a 和 b 称为这些区间的**端点**，数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 此外还有**无限区间**，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如，

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

这两个区间在数轴上分别如图 1－2(a)、(b) 所示.

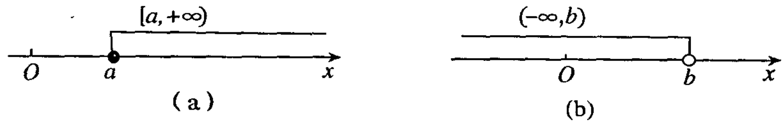


图1－2

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径，因为 $|x-a| < \delta$ 相当于

$$-\delta < x-a < \delta, 即\ a-\delta < x < a+\delta$$

所以 $$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

由此看出，邻域 $U(a,\delta)$ 就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，a是这个开区间的中心，δ是这个开区间的长度的一半(图 1－3).

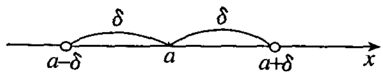


图1－3

以后，如果仅仅研究变量在某一点邻近的变化情况，就需要用到邻域. 有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

这里，$0 < |x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

二、函数的概念

我们知道，金属圆圈的周长 l 与半径 r 的关系是

$$l = 2\pi r$$

当圆圈受热膨胀时，半径 r 发生变化，周长 l 也随之变化；当 r 在其变化范围内有一确定值时，周长 l 也就确定，这时我们说变量 l 与 r 之间具有函数关系.

1. 函数的定义

一般地，我们给出下列函数的定义：

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个数集．如果对于 D 中的每一个数 x，按照某个对应法则 f，y 都有确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**．

当 x 取数集 D 中的数值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 中的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**．

在同一个问题中，如果需要讨论几个不同的函数，为区别起见，就要用不同的函数记号来表示，例如以 x 为自变量、y 为因变量的函数也可以表示为 $y = \varphi(x)$，$y = F(x)$，$y = G(x)$ 等．

在函数的定义中，要求自变量在定义域内任意取一个数值时，变量 y 有确定的值与之对应，至于有几个，并不限制．如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，那么这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**．

例如上述函数 $l = 2\pi r$，当 $r \in (0, +\infty)$ 时有唯一的 l 与之对应，它是一个单值函数．又如函数 $y^2 = x$，当 $x \in (0, +\infty)$ 时有两个 y 值和它对应，它是一个多值函数，其中 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = -\sqrt{x}$ 是它的两个单值支．

以后凡是没有特别说明，函数都是指单值函数．

另外，在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求有确定的函数值与之对应即可，因此，$y = c$（c 为常数）也符合函数的定义．因为对于数集 D 中的每一个数 x，所对应的函数值都是 c，故称函数 $y = c$ 为**常函数**．

2. 函数的定义域

根据函数的定义，函数的定义域是确定函数的一个重要因素．在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定；对于用数学式表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义．例如：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方；

(3) 在对数式中，真数要大于零；

(4) 在三角函数与反三角函数式中，要符合其定义域要求．

如果函数表达式中同时含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集．

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{9 - x^2} + \sqrt{x + 1}$；

(2) $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$；

(3) $y = \arcsin \dfrac{x + 1}{2}$.

解:(1) 因为$9-x^2\neq 0$,得$x\neq\pm 3$. 又$x+1\geqslant 0$,得$x\geqslant -1$,所以函数的定义域为$[-1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 因为$x^2-5x+6>0$,得$x>3$或$x<2$,所以函数的定义域为$(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

(3) 因为$-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$,得$-2\leqslant x+1\leqslant 2$,即$-3\leqslant x\leqslant 1$,所以函数的定义域为$[-3,1]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才是完全相同的.

例如$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$,它们的定义域和对应关系完全相同,所以它们是相同的函数.

又如$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$,它们的定义域不同,所以它们不是相同的函数.

3. 函数的表示法

表示函数的方法,常用的有公式法、表格法和图像法三种.

(1) 公式法:公式法就是用数学式表示自变量和因变量之间的对应关系的方法,如$y=\dfrac{1}{x^2-1}$,$s=\dfrac{1}{2}gt^2$等. 有些函数在其定义域内要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围内用不同式子表示的函数称为**分段函数**. 例如

$$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

求分段函数的值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例 2 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,求$f(4)$,$f(-4)$,$f(0)$.

解:$f(4)=\sqrt{4}=2$, $f(-4)=-(-4)=4$, $f(0)=\sqrt{0}=0$.

(2) 表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,这种表示函数的方法叫做表格法. 如平方表、三角函数表、对数表以及某班同学按学号排成的数学成绩表等等.

(3) 图示法:例如,在坐标系中用直线或曲线表示函数的方法.

4. 反函数

定义 1.2 设有函数$y=f(x)$,其定义域为D,值域为W,如果对于W中的每一个y值,都可以从关系式$y=f(x)$确定唯一的x值($x\in D$)与之对应,这样所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$或$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的**反函数**,它的定义域为W,值域为D.

习惯上,函数的自变量都用x表示,所以反函数通常表示为$y=f^{-1}(x)$. 函数$y=f(x)$的图形与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形在x、y轴的单位长度相等的同一坐标系中关于直线$y=x$对称.

例 3 求下列函数的反函数:

(1)$y=2x-1(x\in\mathbf{R})$; (2)$y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$.

解:(1) 从 $y = 2x - 1$ 中解出 x,得 $x = \frac{y+1}{2}$. 在 $x = \frac{y+1}{2}$ 中对调字母 x 和 y,得 $y = 2x - 1(x \in \mathbf{R})$ 的反函数

$$y = \frac{x+1}{2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(2) 从 $y = \sqrt{x} + 1$ 中解出 x,得 $x = (y-1)^2$. 在 $x = (y-1)^2$ 中对调字母 x 和 y,得 $y = \sqrt{x} + 1(x \geqslant 0)$ 的反函数

$$y = (x-1)^2 \qquad (x \geqslant 1)$$

注意:不是每一个函数在其定义域内都有反函数. 如对于函数 $y = x^2(x \in \mathbf{R})$,因为 $x = \pm\sqrt{y}$ 不是唯一确定的值,所以由反函数的定义知,$y = x^2$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内没有反函数. 但是,如果把 $y = x^2$ 的定义域限制在 $[0, +\infty)$ 上,那么它就有反函数 $y = \sqrt{x}$;如果把 $y = x^2$ 的定义域限制在 $(-\infty, 0]$ 上,那么它就有反函数 $y = -\sqrt{x}$.

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则必有 $-x \in D$),如果对于任一 $x \in D$,$f(-x) = -f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$;

$f(x) = x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

奇函数的图像是关于原点对称的. 因为若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x) = -f(x)$,所以如果 $A(x, f(x))$ 是图像上的点,那么它关于原点对称的点 $A'(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-4).

偶函数的图形是关于 y 轴对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x) = f(x)$,所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点,那么它关于 y 轴对称的点 $A''(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1-5).

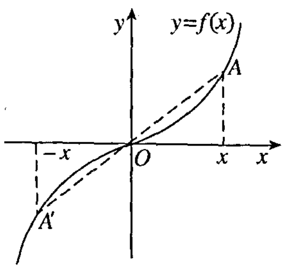


图 1-4

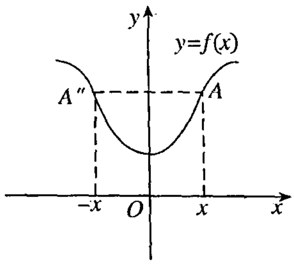


图 1-5

2. 函数的单调性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**;如果当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少的**. 单调

增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**.

类似地,可以定义无穷区间上的单调函数.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(图 1-6);单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的(图 1-7).

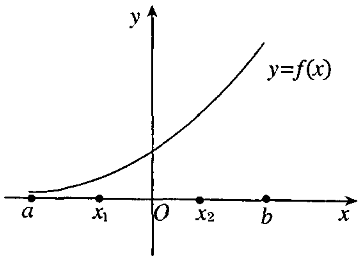


图 1-6

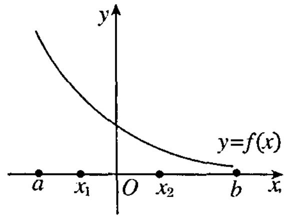


图 1-7

例如,函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的,在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

又如,函数 $y = \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值,对应的函数值 $f(x)$ 恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

就称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**;如果这样的数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**.

上述定义也适用于闭区间或无穷区间的情形.

例如,函数 $f(x) = \sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为对于一切 $x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$ 都成立,这里 $M = 1$.

又如,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在正数 M,对 $(0,1)$ 内的所有 x,都满足不等式 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$;但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的,因为对于一切 $x \in [1,2]$, 都有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 成立,这里 $M = 1$.

4. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$,且

$$f(x + T) = f(x)$$

恒成立,则 $f(x)$ 叫做**周期函数**,T 叫做这个函数的**周期**. 通常我们说的函数的周期指的是最小正周期.

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,$\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

一个周期为 T 的周期函数,它的图像在定义域内每隔长度为 $|T|$ 的相邻区间上有相同的形状(图 1-8).

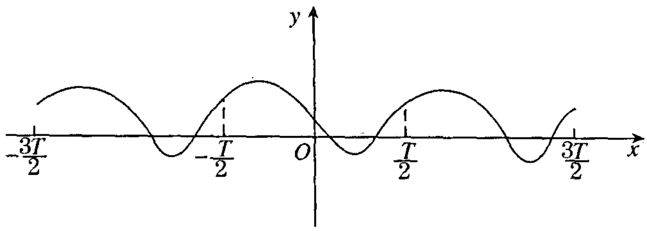


图 1－8

第二节　初等函数及其应用

一、基本初等函数

1. 常函数

函数 $y=c$（c 为常量）称为常函数．它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图像为平行于 x 轴、纵截距为 c 的直线（图 1－9）．

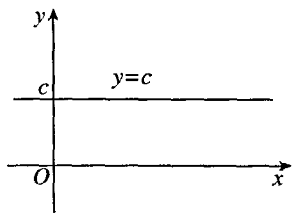


图 1－9

2. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$（μ 是常数）叫做幂函数．它的定义域由 μ 的取值而确定．例如：当 $\mu=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；当 $\mu=-1$ 时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．但不论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，且当 $x=1$ 时，$y=1$，即函数 $y=x^{\mu}$ 的图像都通过点 $(1,1)$．

在 $y=x^{\mu}$ 中，$\mu=1,2,3,-1,-2,\frac{1}{2}$ 是常见的幂函数，它们的图形如图 1－10 所示．

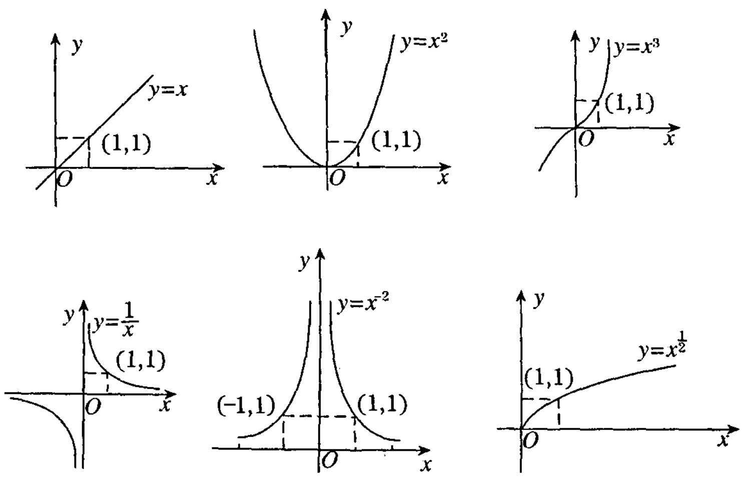


图 1－10

3. 指数函数

指数的定义、性质、运算法则见本书附录一。

函数 $y = a^x$(a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$) 叫做**指数函数**. 它的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

因为无论 x 取什么实数,总有 $a^x > 0$,又 $a^0 = 1$,所以指数函数的图像总在 x 轴上方,且通过点$(0,1)$.

若 $a > 1$,指数函数 a^x 是单调增加的;若 $0 < a < 1$,指数函数 a^x 是单调减少的.

以常数 $e = 2.718\,281\,828\,459\cdots$ 为底的指数函数 $y = e^x$,是科学技术中常用的指数函数. 显然,$y = e^x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的,而 $y = e^{-x}$ 在$(-\infty, +\infty)$内是单调减少的(图 1 - 11(a)).

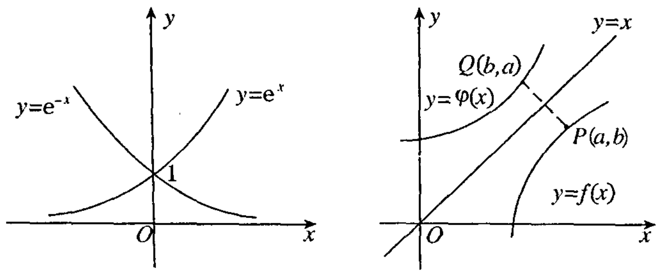
4. 对数函数

对数的定义、性质、运算法则见本书附录一。

指数函数 $y = a^x$ 的反函数

$$y = \log_a x \qquad (a \text{ 是常数且 } a > 0, a \neq 1)$$

叫做**对数函数**,它的定义域是$(0, +\infty)$. 对数函数的图像,可以从它所对应的指数函数按反函数的作图规则作出(图 1 - 11(b)).



(a) (b)

图 1 - 11

工程问题中常常遇到以常数 e 为底的对数函数 $y = \log_e x$,它叫做**自然对数函数**,简记作

$$y = \ln x$$

5. 三角函数

常用的三角函数有:

正弦函数 $y = \sin x(-\infty < x < +\infty)$;

余弦函数 $y = \cos x(-\infty < x < +\infty)$;

正切函数 $y = \tan x(x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$;

余切函数 $y = \cot x(x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$.

其中,自变量要用弧度表示.

三角函数都具有周期性. 正弦函数和余弦函数是以 2π 为周期的周期函数,正切函数和余切函数是以 π 为周期的周期函数.

正弦函数和余弦函数是$(-\infty, +\infty)$内的有界函数,$|\sin x| \leqslant 1$,$|\cos x| \leqslant 1$;而正

切函数和余切函数的值域是$(-\infty, +\infty)$,在定义域内是无界的.

正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数的图像分别如图 1-12、图 1-13、图 1-14、图 1-15 所示.

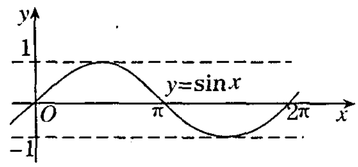


图 1-12

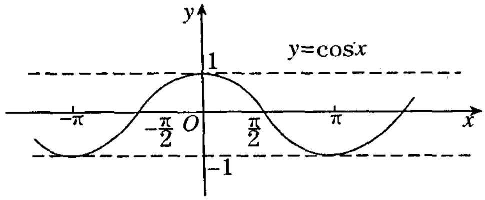


图 1-13

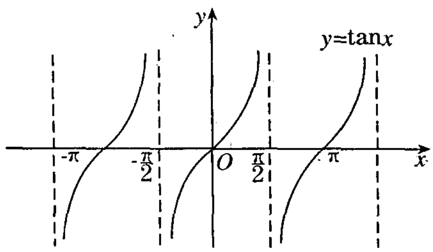


图 1-14

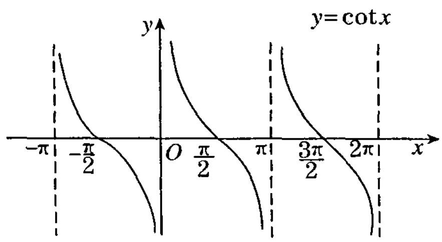


图 1-15

对于正割函数 $\sec x$ 和余割函数 $\csc x$ 在现行的中学中专教材中大都未介绍,读者对于同角三角函数间的八下基本公式,二倍角的三角函数公式等三角函数的基本恒等式要认真复习掌握(见本书附录一),以利在微积分学中应用。

6. 反三角函数

常用的反三角函数有:

反正弦函数 $y=\arcsin x, x \in [-1,1]$;

反余弦函数 $y=\arccos x, x \in [-1,1]$;

反正切函数 $y=\arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$;

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty)$.

它们分别是正弦函数在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上、余弦函数在$[0,\pi]$上、正切函数在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内、余切函数在$(0,\pi)$内的反函数．反三角函数的图像由相应的三角函数的图像按反函数作图法的一般规则作出，它们的图像分别如图 1－16、图 1－17、图 1－18、图 1－19 所示．

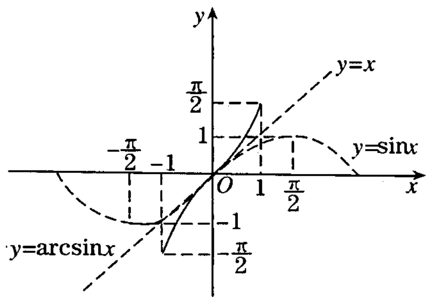


图 1－16

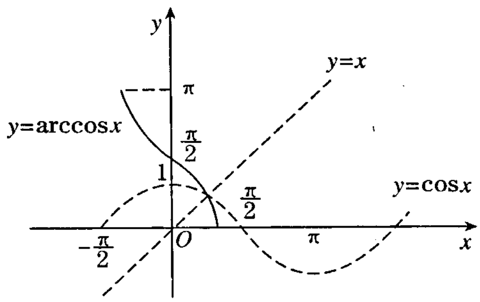


图 1－17

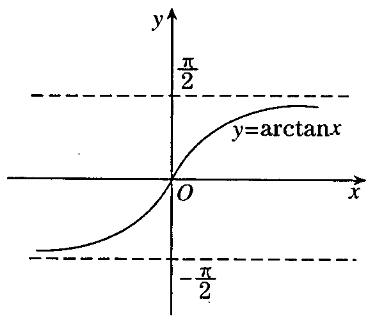


图 1－18

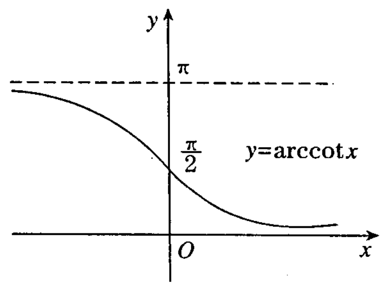


图 1－19

上述六类函数（常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数）称为**基本初等函数**．

二、复合函数和初等函数

先举一个例子．设有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，求它的动能 E 与时间 t 之间的函数关系．

由物理学知识可知，如果物体运动的速度为 v，则动能 E 与速度 v 之间的函数关系为

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$