

复变函数论

第三册

莫叶编



山东大学出版社

复变函数论

第三册

莫叶编

山东大学出版社

一九九二·济南

鲁新登字 09 号

复变函数论

(第三册)

莫 叶 编

*

山东大学出版社出版编

山东省新华书店发行

山东大学印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 大 32 9.75 印张 250 千字
1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷

印数:1—700 册

ISBN7-5607-1019-0/O·63

定 价:5.85 元

内容提要

本书第三册讨论整函数的基础理论,内容包括计量、密量、均量、征量的性质,清水定理,整函数的极大项,正则滋长,卡当定理,哈德玛特因子分解定理,拉盖尔零点分隔定理及实零点定理,指标函数与指标图的性质,波鲁亚轭图定理,整函数的型,计值、均值、密值、截值之间的关系,畏门定理。可作大学本科生及研究生学习整函数的教材或参考书用。

序

复变函数论是数学中的一个古老而又重要分支,它在自然科学、工程技术中都有广泛的应用。本书第一、二册介绍复变函数基本知识,分别于1980年,1983年在山东科技出版社出版。由于叙述由浅入深,力求易懂,发行以来受到广大读者欢迎,列入中国优秀科技图书要览(1990)。作者参阅中外有关名著,翻译改编成第三册,仍保留叙述清晰的特点。

本书的出版除得到山东大学领导的支持外,仪洪勋教授、杨连中副教授、扈培础同志等校阅书稿,提出许多宝贵意见;还有乔建永、詹晓平、张庆彩、周德山、李伶俐、李玉华、吕巍然、杨永增等同志帮助校对抄写初稿,谨向他们表示谢意。

限于作者水平,错误之处在所难免,还希读者不吝指正。

莫 叶

1990年于济南山东大学

目 录

第十三章 阶与型

§ 13-1 函数的上限与下限	(1)
13-1.1 定义(1) 13-1.2 性质(2)	
§ 13-2 单调上升函数	(3)
13-2.1 阶(3) 13-2.2 型与类(4)	
§ 13-3 复数序列	(8)
13-3.1 计量与密量(8) 13-3.2 级数与积分(10)	
§ 13-4 整函数	(13)
13-4.1 $\log M(r)$ (13) 13-4.2 多项式(13)	
13-4.3 两个例子(15) 13-4.4 导数(16)	
13-4.5 整线性变换与幂变换(18)	
§ 13-5 均量	(19)
13-5.1 正对数(19) 13-5.2 $m(r, f)$ (21)	
13-5.3 基本不等式(22)	
§ 13-6 征量	(24)
13-6.1 $T(r, f)$ (24) 13-6.2 卡当恒等式(24)	
13-6.3 性质(27)	
§ 13-7 比较	(29)
13-7.1 正常型(29) 13-7.2 无穷阶(30)	
13-7.3 清水定理(31) 13-7.4 一条引理(31)	
13-7.5 定理 12 的证明(33)	
习题	(35)

第十四章 系数与增长

§ 14-1 n 次根	(37)
---------------------	------

14-1.1 充要条件(37)	14-1.2 求阶型公式(37)
14-1.3 应用(42)	
§ 14-2 比.....	(43)
14-2.1 史脱茨公式(43)	14-2.2 求阶型公式(44)
§ 14-3 特殊情形的型量.....	(46)
14-3.1 零阶(46)	14-3.2 ρ 阶(50)
§ 14-4 极大项.....	(56)
14-4.1 定义(56)	14-4.2 极标(57)
14-4.3 $\mu(r)$ (59)	14-4.4 $M(r)$ (61)
§ 14-5 正则滋长.....	(66)
14-5.1 定义(66)	14-5.2 空隙定理(67)
14-5.3 完全正则滋长(70)	
§ 14-6 哈德玛特积.....	(73)
14-6.1 定义(73)	14-6.2 奇点(74)
14-6.3 阶与型(78)	14-6.4 极大项(80)
14-6.5 广义 H 积(81)	
习题	(83)

第十五章 有限阶整函数

§ 15-1 多项式的下界.....	(85)
15-1.1 卡当定理(85)	15-1.2 $ \prod (z-a_n) $ 的下界(90)
§ 15-2 典乘积.....	(91)
15-2.1 收敛指数(91)	15-2.2 原因子的估计(92)
15-2.3 典乘积的估计(96)	15-2.4 典乘积的阶(98)
15-2.5 收敛指数为整数(102)	
15-2.6 一个渐近表示(107)	
§ 15-3 因子分解	(108)
15-3.1 最小模的下界(108)	15-3.2 乘积(113)
15-3.3 因子分解定理(119)	

§ 15-4 应用	(121)
15-4.1 阶不为正整数(121)	15-4.2 指数多项式(123)
15-4.3 Γ 函数(125)	15-4.4 贝塞尔函数(126)
习题	(129)

第十六章 实零点

§ 16-1 零点分隔	(130)
16-1.1 高阶零点(130)	16-1.2 多项式(131)
16-1.3 格数不超过 1(131)	
§ 16-2 拉盖尔实零点定理	(136)
16-2.1 多项式(136)	16-2.2 整函数(142)
§ 16-3 贝塞尔函数的零点性质	(150)
16-3.1 单零点(150)	16-3.2 实零点(151)
16-3.3 零点分隔(152)	
习题	(153)

第十七章 指标函数

§ 17-1 基本不等式	(155)
17-1.1 定义(155)	17-1.2 比较函数(156)
17-1.3 夹角小于 $\frac{\pi}{\rho}$ (157)	17-1.4 夹角大于 $\frac{\pi}{\rho}$ (163)
17-1.5 三角凸性(164)	
§ 17-2 标量的性质	(166)
17-2.1 连续(166)	17-2.2 均匀(172)
17-2.3 正值与负值(174)	
17-2.4 标量为类正余弦函数(176)	
17-2.5 标量的界限(178)	17-2.6 两个例子(182)
习题	(183)

第十八章 截量

§ 18-1 符记	(184)
-----------------	-------

18-1.1	H, A, B, B^* (184)	18-1.2	$s(\theta), C$ (186)
18-1.3	截量的三角凸性 (187)		
18-1.4	例子 (189)		
§ 18-2	截分 (193)		
18-2.1	符记 (193)	18-2.2	$\Phi_R(z)$ (195)
18-2.3	$\Psi_R(z)$ (196)	18-2.4	$\Pi_R(z)$ (197)
18-2.5	$\log f(z) $ (200)		
§ 18-3	A, B, C (202)		
18-3.1	$h(\theta) - s(\theta)$ (202)	18-3.2	四条推论 (203)
18-2.3	最小模的估计 (205)		
§ 18-4	零点的少与多 (206)		
18-4.1	定义 (206)	18-4.2	少零点 (206)
18-4.3	等价性 (207)	18-4.4	$\log f(re^{i\theta}) $ 的估计 (209)
18-4.5	最多零点 (213)		
习题	 (214)		

第十九章 指标图

§ 19-1	凸图 (215)
19-1.1	定义 (215)
19-1.2	交集 (216)
19-1.3	加集 (218)
19-1.4	边界 (219)
§ 19-2	支持函数 (222)
19-2.1	定义 (222)
19-2.2	简单凸图 (225)
19-2.3	加集的撑量 (225)
19-2.4	刚体运动 (226)
19-2.5	交集的撑量 (227)
§ 19-3	支持直线 (228)
19-3.1	定义 (228)
19-3.2	凸壳 (231)
§ 19-4	撑量性质 (233)
19-4.1	三角凸性 (233)
19-4.2	逆定理 (234)
§ 19-5	指数型整函数 (238)
19-5.1	充要条件 (238)
19-5.2	和与积 (241)

§ 19-6 标图	(242)
19-6.1 定义(242) 19-6.2 简单指型函数(243)	
19-6.3 运算(243)	
§ 19-7 奇图	(245)
19-7.1 波勒耳变换(245) 19-7.2 波鲁亚轭图定理(250)	
19-7.3 应用(251)	
§ 19-8 正指型函数	(258)
19-8.1 相伴函数(258) 19-8.2 哈德玛特积(260)	
19-8.3 指数函数项级数(262)	
习题	(265)
第二十章 最小模	
§ 20-1 一些估计	(266)
20-1.1 多项式(266) 20-1.2 超整函数(267)	
20-1.3 $\rho < \frac{1}{2}$ (268) 20-1.4 $\rho = 1$ (269)	
§ 20-2 畏门定理	(272)
20-2.1 叙述与说明(272) 20-2.2 广义积分(273)	
20-2.3 关键不等式(277) 20-2.4 整函数 $\varphi(z)$ (280)	
20-2.5 定理 4 的证明(281)	
§ 20-3 阶不小于 1	(283)
20-3.1 $\rho = 1$ (283) 20-3.2 $\rho > 1$ (285)	
§ 20-4 零阶整函数	(289)
20-4.1 比较函数(289) 20-4.2 截分(292)	
20-4.3 $\log M(r)$ 与 $\log m(r)$ 的比较(295)	
20-4.4 模很小的整函数(297)	
习题	(299)
参考文献	(300)

第十三章 阶与型

§ 13 - 1 函数的上限与下限

13 - 1.1 定义

在 2 - 1.1 节中曾经引进邻域的概念;在 z 面中点 z_0 的邻域是开圆域 $|z - z_0| < \epsilon$. 为书写简便计把它记作 $U(z_0)$ 或 $U_\epsilon(z_0)$. 如果考虑闭邻域, 则只要在 U 上加上一杠即行. 如果考虑的邻域需要略去点 z_0 则在 U 的右角加上星号“*”即行, 在开域中考虑一点的邻域或闭邻域, 除特别声明外, 总是假设它们全部落在这开域中. 至于考虑在直线上一点的邻域, 则用开区间代替开圆域即行.

我们在 § 2 - 3 中曾经定义实数序列 (x_n) 的上限与下限, 讨论了它们的性质及运算, 并引进数集的上确界与下确界的概念, 现在考虑实函数的上限与下限. 在 5 - 1.2 节中曾经给出函数极限的定义并指出它与序列极限的密切关系; 现在利用序列的极限来定义函数的上限与下限, 设 $g(x)$ 为实函数, a 为有限实数, 并设 $g(x)$ 在点 a 的一邻域 $U_\rho^*(a): 0 < |x - a| < \rho$ 中有定义且为单值. 如果 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 存在为一有限数 l , 则规定当 $x \rightarrow a$ 时, $g(x)$ 的上限与下限均为 l 且写作 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = l$. 以下考虑 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在的情形. 如果任给正数 G , 不论如何大, 恒存在正数 $\delta < \rho$, 使得在 $U_\delta^*(a)$ 中, $g(x) > G$; 则规定 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$; 倘若在 $U_\delta^*(a)$ 中, $g(x) < -G$, 则规定 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$. 进

一步考虑其余情形,由于 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在,从5-1.2节所述,即知至少存在两个序列 $(x_{1,n}), (x_{2,n})$ 以 a 为极限且序列 $\{g(x_{1,n})\}, \{g(x_{2,n})\}$ 有两个不同的极限,或者一个有极限,而另一个趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$.考虑所有序列 (x_n) 以 a 为极限且使 $\{g(x_n)\}$ 有极限或者趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$.这些极限值(可能包括 $+\infty$ 或 $-\infty$),称为当 $x \rightarrow a$ 时, $g(x)$ 的子极限,它构成一个实数集 X .如果 $+\infty$ 或 $-\infty$ 属于 X ,则规定 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ 或 $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.现在考虑 X 为有界实数集的情形,令 $\mu = \sup X, \nu = \inf X$.定义 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \mu, \underline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \nu$.如果 a 不是有限实数而是 $+\infty$ 或 $-\infty$,则只要对 a 的邻域 $U_p^*(a)$ 及一些叙述作适当修改,上述定义完全可用.例如 $a = +\infty$,则其邻域应换为 $[\Lambda, \infty)$ 这里 Λ 为适当大的正数, (x_n) 以 a 为极限应换为 (x_n) 趋向 $+\infty$ 等等.

§ 13 - 1.2 性质

从定义即知恒有

$$-\infty \leq \nu \leq \mu \leq +\infty. \quad (1)$$

如果 $\mu = \nu$,则 X 仅有一点即为 μ ,当然可以说 μ 是所有子极限的最大者,现在设 $\nu < \mu$,我们仅考虑 μ, a 均为有限的情形,其他情形读者不难自己论证之.当 μ 是 X 的孤立点时, $\mu \in X$ 且 μ 是子极限的最大值;当 μ 不是 X 的孤立点时,则在 X 中存在一点列 (ξ_m) 以 μ 为其极限.设 $\{g(x_{m,n})\}$ 以 ξ_m 为其极限,因此存在正整数序列的严格上升子序列 (n_m) 使得

$$|x_{m,n_m} - a| < \frac{1}{2^{m+1}}, \quad |g(x_{m,n_m}) - \xi_m| < \frac{1}{2^{m+1}}. \quad (2)$$

这里 $m = 1, 2, \dots$.任给正数 ϵ ,不论如何小,恒可选取正整数 $m_0 = m_0(\epsilon)$ 足够大使得当 $m \geq m_0$ 时,

$$\frac{1}{2^m} < \epsilon, \quad |\xi_m - \mu| < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是从(2)即知当 $m \geq m_0$ 时,

$$|x_{m,n_m} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(x_{m,n_m}) - \xi_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而

$$|g(x_{m,n_m}) - \mu| \leq |g(x_{m,n_m}) - \xi_m| + |\xi_m - \mu| < \varepsilon.$$

所以当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$x_{m,n_m} \rightarrow a, \quad g(x_{m,n_m}) \rightarrow \mu.$$

这就证明 $\mu \in X$, μ 是子极限的最大值. 综合以上所述, 不论在何种情形下, 上限是所有子极限的最大值, 从此以及上确界的定义即得下述定理:

定理 1 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} g(x) = \mu \quad \leftrightarrow$

1. 所有子极限不超过 μ ,
2. 至少有一个子极限等于 μ .

此定理与 2-3.2 节定理 10 极为类似. 关于序列上限与下限的性质及运算的一些定理对函数的上限与下限来说也有类似定理, 读者可叙述并证明之.

§ 13-2 单调上升函数

13-2.1 阶

设 $r_0 \geq 0$, 且在 $[r_0, \infty)$ 中, $s(r)$ 为非负单调上升函数. 定义

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log s(r)}{\log r}, \quad \varrho = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log s(r)}{\log r}. \quad (1)$$

ρ 及 ϱ 分别称为 $s(r)$ 的阶及下阶.

如果 $s(r)$ 有界, 则

$$\rho = \varrho = 0. \quad (2)$$

以后除特别声明外, 恒设 $s(r)$ 无界. 于是选取 r_0 足够大, 即可使当

$r \geq r_0$ 时, $s(r) > 1$. 因此以后无妨设在 $[r_0, \infty)$ 中 $s(r)$ 及 $\log s(r)$ 均为无界单调上升正值函数. 注意当 $s(r)$ 无界时, 仍旧有可能 (2) 成立. 例如在 $[e^2, \infty)$ 中定义 $s(r) = \log r$, 则显然 (2) 成立. 从 (1) 以及上限与下限的关系即知恒有

$$0 \leq \rho \leq \rho \leq \infty \quad (3)$$

当 $s(r)$ 的阶 $\rho = \infty$ 时, 则任给正数 K , 不论如何大, 恒存在足够大的 r 使得

$$s(r) > r^K. \quad (4)$$

当 $s(r)$ 的阶 ρ 为有限时, 则对任给正数 ϵ , 不论如何小, 恒存在足够大的正数 $R > r_0$, 使得对所有 $r > R$ 恒有

$$s(r) < r^{\rho+\epsilon}. \quad (5)$$

另一方面不论 R 如何大恒有 $r > R$ 使得

$$s(r) > r^{\rho-\epsilon}; \quad (6)$$

也就是至少存在一严格上升无界序列 (r_n) 使得当 $r = r_n$ 时, (6) 成立, 对下阶 $\underline{\rho}$ 有类似说明.

13 - 2.2 型与类

设 $s(r)$ 的阶为有限正数. 这时可以采用 r^ρ 来作为比较函数, 比较 $s(r)$ 与 r^ρ 的上升速度, 定义

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r)}{r^\rho} = \overline{\sigma}, \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r)}{r^\rho} = \underline{\sigma}. \quad (7)$$

$\overline{\sigma}$ 及 $\underline{\sigma}$ 分别称为 $f(z)$ 的型及下型, 显然

$$0 \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} \leq \infty. \quad (8)$$

当 $\overline{\sigma}$ 的值为 $0, \infty$, 有限正数时, 分别称 $s(r)$ 具有极小型, 极大型, 正常型.

与 (4), (5), (6) 类似, 当 $\overline{\sigma} = \infty$ 时, 不论正数 K 如何大, 恒存在足够大的 r 使得

$$s(r) > Kr^\rho. \quad (9)$$

当 δ 为有限时, 则对任给正数 ϵ , 不论如何小, 恒存在 $R > r_0$, 使得对所有 $r \geq R$ 恒有

$$s(r) < (\delta + \epsilon)r^\rho. \quad (10)$$

另一方面存在严格上升无界序列 (r_n) 使得当 $r = r_n$ 时,

$$s(r) > (\delta - \epsilon)r^\rho. \quad (11)$$

当 $0 < \rho < \infty$ 时, 取 $R > r_0$. 如果无穷积分 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{\rho+1}} dt$ 收敛, 则称 $s(r)$ 属于收敛类; 否则 $s(r)$ 属于发散类. 我们有下述定理.

定理 2 当 $s(r)$ 属于收敛类时, 则 $s(r)$ 具有极小型.

证明 按照假设 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{\rho+1}} dt$ 收敛; 于是任给正数 ϵ , 选取足够大的 $R_0 > R$ 可使当 $r > R_0$ 时, $\int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{\rho+1}} dt < \epsilon$. 因 $s(r)$ 为单调上升正值函数, 故 $s(r) \leq s(t), t \in [r, 2r]$, 于是

$$\int_r^{2r} \frac{s(r)}{t^{\rho+1}} dt \leq \int_r^{2r} \frac{s(t)}{t^{\rho+1}} dt \leq \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{\rho+1}} dt < \epsilon.$$

显然 $\int_r^{2r} \frac{dt}{t^{\rho+1}} = \frac{2^\rho - 1}{\rho 2^\rho} \cdot \frac{1}{r^\rho}$. 因此当 $r > R_0$ 时, $\frac{s(r)}{r^\rho} \leq \frac{2^\rho \rho}{2^\rho - 1} \epsilon$. 注意到 $\frac{2^\rho \rho}{2^\rho - 1}$ 为一正常数与 r 无关; 这就证明 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r)}{r^\rho} = 0$; 因而 $s(r)$ 为极小型. 证毕.

从定理 2 即知当 $s(r)$ 为正常型或极大型时, 则 $s(r)$ 必属于发散类. 但 $s(r)$ 为极小型也可以属于发散类. 可用一个具体例子来说明. 令

$$s(r) = \frac{r^k}{(\log r)^\alpha} \quad (\alpha > 0, 0 < k < \infty) \quad (12)$$

并取 $r_0 > e^{a/k}$, 则在 $[r_0, \infty)$ 中 $s(r)$ 为正值函数. 对 (12) 取对数可得

$$\log s(r) = k \log r - \alpha \log \log r \quad (13)$$

把这式两端对 r 求导数, 即可得到 $s'(r) = \frac{ks(r)}{r \log r} (\log r - \frac{\alpha}{k})$. 因此当 $r \geq r_0$ 时, $s'(r) > 0$. 所以在 $[r_0, \infty)$ 中, $s(r)$ 为严格上升函数. 从

(12) 还可以看出当 $r \rightarrow \infty$ 时, $s(r) \rightarrow \infty$. 从 (13) 即知 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log s(r)}{\log r} = k$. 因而 $s(r)$ 的阶 ρ 及下阶 $\underline{\rho}$ 均为有限正数 k . 因 $\alpha > 0$, 故从 (12) 即知当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\frac{s(r)}{r^\alpha} \rightarrow 0$. 因此 $s(r)$ 为极小型. 当 $\alpha > 1$ 时, $\int_{r_0}^{\infty} \frac{s(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(\log r_0)^{\alpha-1}}$; 所以 $s(r)$ 为收敛类. 当 $\alpha = 1$ 时, 取 $r > r_0$, 则 $\int_{r_0}^r \frac{s(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \int_{r_0}^r \frac{dt}{t \log t} = \log \log r - \log \log r_0$; 因而当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\int_{r_0}^r \frac{s(t)}{t^{\alpha+1}} dt \rightarrow \infty$. 所以 $s(r)$ 为发散类, 如果 $0 < \alpha < 1$, 则在 $[r_0, \infty)$ 中, $\frac{1}{t(\log t)^\alpha} \geq \frac{1}{t \log t} > 0$. 于是从 $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t \log t}$ 发散即知 $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\alpha}$ 发散; 因而 $s(r)$ 仍属发散类. 这就说明当 $s(r)$ 为极小型时尚可区分为收敛类或发散类.

定理 3 设 $s(r)$ 的阶 ρ 为有限, 则按照 $k > \rho$ 或 $k < \rho$; 无穷积分 $\int_R^{\infty} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ ($R > r_0 \geq 0$) 分别为收敛或发散, 如果 $\rho = \infty$, 则不论 k 为任何有限实数, $\int_R^{\infty} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 恒发散.

证明 首先考虑 ρ 为有限的情形. 设 $k > \rho$, 并令 $k - \rho = 2\delta$, 则 $\delta > 0$. 从 (5) 即知选取 $R_0 > R$ 且 R_0 足够大, 可使当 $t \geq R_0$ 时, $s(t) < t^{\rho+\delta}$. 于是 $0 \leq \frac{s(t)}{t^{k+1}} < \frac{t^{\rho+\delta}}{t^{k+1}} = \frac{1}{t^{1+\delta}}$, 显然无穷积分 $\int_{R_0}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\delta}}$ 收敛. 根据无穷积分敛散的比较检验法即知 $\int_{R_0}^{\infty} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 收敛, 当然

$\int_R^{\infty} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 也收敛.

设 $k < \rho$, 并令 $\rho - k = 2\delta$, 则 $\delta > 0$. 从 (6) 即知存在严格上升无界序列 (r_n) 使得

$$s(r_n) > r_n^{\rho-\delta} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

利用 $s(t)$ 的单调上升性即知当 $t \in [r_n, 2r_n]$ 时, $s(t) \geq s(r_n)$. 于是 $\int_{r_n}^{2r_n} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt \geq s(r_n) \int_{r_n}^{2r_n} \frac{dt}{t^{k+1}}$. 如果 $\rho > 0$, 则可设 $0 < k < \rho$. 从此及 (14) 即知

$$\int_{r_n}^{2r_n} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt > r_n^{\rho-\delta} \left(\frac{2^k - 1}{k2^k} \right) \frac{1}{r_n^k} = K r_n^\delta. \quad (15)$$

这里 $K = \frac{2^k - 1}{k2^k}$ 为一正常数与 r_n 无关. 因而当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\int_{r_n}^{2r_n} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt \rightarrow \infty. \quad (16)$$

所以 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 发散. 当 $R_0 > R$ 且 $R_0 > 1$ 时, 对任何 $k' < k$ 恒有 $t^{k'} < t^k, t \in [R_0, \infty)$; 因而 $\frac{s(t)}{t^{k'+1}} > \frac{s(t)}{t^{k+1}}, t \in [R_0, \infty)$. 于是利用比较检验法即可断定 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{k'+1}} dt$ 发散, 这里 k' 可以为任意实数小于 ρ . 如果 $\rho = 0$, 则当 $k < \rho$ 时, k 为负数, 这时 (15) 仍成立; 因而当 $n \rightarrow \infty$ 时 (16) 仍成立; 所以 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 发散.

最后考虑 $\rho = \infty$ 的情形, 设 k 为任意一正数, 选取 $\delta > 0$. 从 (4) 知代替 (14) 有 $s(r_n) > r_n^{k+\delta}$, 于是代替 (15) 有 $\int_{r_n}^{2r_n} \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt > K \frac{r_n^{k+\delta}}{r_n^k} = K r_n^\delta$. 这时当 $n \rightarrow \infty$ 时 (16) 仍成立, 所以 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 发散. 如果 $k \leq 0$, 则从已证明的结果及比较检验法即知 $\int_R^\infty \frac{s(t)}{t^{k+1}} dt$ 仍发散, 证毕.