普通高等教育“十一五”规划教材

概率论与数理统计

杨万才　主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

概率论与数理统计

杨万才　主编
武新乾　秦　青　高钢锤　冯爱芬　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容由随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、Mathematica 软件应用、常见的概率论与数理统计模型 11 章构成. 随各章内容配有一定数量的习题,书末附有习题选解与提示及 6 种附表以备查用. 编写中始终以强化理论学习为基础,以应用为目的,力求做到深入浅出、通俗易懂、便于自学、提高成效.

本书可作为高等院校理工科、经济学、管理学等各专业概率论与数理统计课程的教材,也可作为教师、学生和科技工作者学习概率论与数理统计知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨万才主编. —北京:科学出版社,2009
(普通高等教育"十一五"规划教材)
ISBN 978-7-03-023949-5

Ⅰ.概… Ⅱ.杨… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 007340 号

责任编辑:李晓鹏 / 责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张:17 3/4
印数:1—5 500 字数:335 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律性的科学，理论严谨、应用广泛、发展迅速，是近代数学的重要组成部分，也是一个很有特色的数学分支．当前，概率论与数理统计知识已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产和军事技术中，并且与其他学科互相渗透结合，成为近代经济理论、管理科学等学科研究中必不可少的理论之一，也是科技工作者和经济师们常用的数学工具．因此，概率论与数理统计课程已成为一门大学中绝大多数专业学生必修的基础课，被教育部定为硕士研究生入学考试的数学课程之一．

本教材基于教育部高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程教学基本要求，汲取编者以往出版同类教材的编写经验，结合长期从事该课程的教学实践体会而编写，以求编写内容不断锤炼、不断创新，以使读者得到一本易于阅读、理解、提高学习时效的教材．

本书 1～5 章是概率论内容，6～9 章是数理统计内容，在计算技术及应用上编写了 10，11 两章．其中 1～8 章是概率论与数理统计的基本知识，是教育部非数学类本科专业概率论与数理统计课程教学基本要求的内容，教学时数约为 48 学时．随各章内容配有一定数量的习题，书末附有习题选解与提示．第 9 章适合对该课程要求较高的专业或学有余力的学生学习．第 10，11 两章是把概率论与数理统计基本知识与计算技术和建模应用结合起来，以期理论联系实际提高学生的计算和解决实际问题的能力．

本书第 2，3 章由杨万才编写，第 1，4，5 章由秦青编写，第 6，7，10 章由武新乾编写，第 8，9 章由高钢锤编写，第 11 章由冯爱芬编写，杨万才任主编．在编写过程中，河南科技大学理学院的数学老师们给予大力的支持和关心，科学出版社高等教育出版中心的同志们倾注了心血，在此一并表示诚挚的感谢．

限于编者水平，书中定有不足之处，敬请同行和读者批评指正．

编　者

2008 年 10 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　确定性现象和随机现象

在自然界和人类社会中存在两类不同的现象. 一类称为确定性现象，它在一定条件下必然发生或必然不发生. 例如太阳从东方升起，标准大气压下将水加热到100℃必然会沸腾，无外力作用时等速直线运动物体不会改变其运动状态等. 确定性现象的规律一旦被认识，就可作出正确预言. 早期的科学就是研究这类现象的规律性，使用数学分析、几何、代数、微分方程等数学工具.

但是，自然和社会中还广泛存在着与确定性现象有本质区别的另一类现象. 例如掷一枚质地均匀的硬币，落地后可能正面朝上、也可能反面朝上，事先无法断言将出现哪种结果；投资某一股票，可能赚钱，可能亏本，也可能保本；同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹，弹落点不会完全相同等. 这些现象的共同特点是：有多个可能的结果，至于哪一个会出现，事先无法断定. 我们称之为**随机现象**(或偶然性现象).

随机现象是否有规律性可寻？人们通过长期的反复观察和实践发现，尽管对随机现象进行一次或少数几次观察的结果具有不确定性，但在相同条件下进行大量重复观察时，某种规律性将会呈现. 例如均匀的硬币抛掷多次，正面和反面出现的次数之比接近 1∶1；射击次数足够多时，弹落点关于目标的分布略呈对称性、偏离目标远的弹落点比偏离目标近的弹落点少等等. 这种在大量重复观察中呈现出的规律性称为**统计规律**，它是随机现象本身所固有的、不随人们意志而改变的客观属性. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支.

1.1.2　随机试验与样本空间

为了研究统计规律，需对随机现象进行大量重复的观察或试验，我们称之为**随机试验**，或简称**试验**，用字母 E 表示. 随机试验有如下特点：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验都有多个可能结果，但究竟出现哪种结果，试验前不能断定；

(3) 试验的一切可能结果是事先已知的.

对随机试验，我们感兴趣的是试验结果. 例如掷一枚骰子，能够直接观察到的可能出现的**基本**结果是 1、2、3、4、5 或 6 点，且这些结果在一次试验中不会同时出现. 这种可能出现的基本结果称为**样本点**，用 ω 表示. 样本点全体构成的集合称为

样本空间,用 Ω 表示.

例 1　试验 E_1:将一枚硬币连掷两次,观察正反面出现的情况. 则样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

例 2　试验 E_2:将一枚硬币连掷两次,观察正面出现的次数. 样本空间 $\Omega_2=\{0,1,2\}$.

例 3　试验 E_3:记录某大超市一天内进入的顾客人数. 由于人数可能很大,难以确定一个合适的上界,因此,取样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$.

例 4　试验 E_4:某射手打靶,测量其弹落点与靶心的距离. 样本空间 $\Omega_4=\{\omega\mid\omega\geqslant 0\}$.

样本空间可以是有限的,也可以无限. 需注意的是,对一个具体的随机试验来说,样本空间并不唯一,它依赖于试验目的. 例如试验 E_1 和 E_2 都是将一枚硬币连掷两次,但由于试验目的不一样,两个样本空间截然不同,后者显然更为简单. 通过进一步的学习我们将会发现,正是样本空间构建上的灵活性给解决实际问题带来了很大方便,对于具体问题怎样选取一个恰当的样本空间是值得研究的,也是解题的关键.

1.1.3　随机事件

进行随机试验时,人们常会关心具有某种特征的样本点构成的集合. 例如掷一枚骰子,人们关心是否“掷出偶数点”,这是一个可能发生也可能不发生的事件,我们称之为随机事件,它涉及样本空间中的三个样本点,即样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个子集 $\{2,4,6\}$.

由此可见,**随机事件**是试验中可能出现也可能不出现的结果,是由某些样本点构成的集合,或者说是样本空间的一个子集. 随机事件是概率论最基本的概念之一,也简称**事件**,用字母 A、B、C、…表示.

例 5　掷两枚骰子,观察点数. 若用 x 表示第一枚骰子出现的点数,y 表示第二枚骰子出现的点数,则试验的样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$;$\Omega$ 的某些子集构成以下事件:

$A_1=$“点数之和等于 2”$=\{(1,1)\}$,该事件只包含单个样本点,这说明一个样本点本身就是一个随机事件,因此有些书中直接称样本点为基本事件;

$A_2=$“点数之和等于 5”$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$;

$A_3=$“点数之和超过 9”$=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

事件对应于样本点的集合,对任一事件 A 来说,一个样本点 ω 要么属于 A 要么不属于 A. 若随机试验出现的基本结果(即样本点)$\omega\in A$,就称事件 A 发生;反之,一个试验发生了结果 A,就意味着 A 所包含的某个样本点 ω 恰为试验的结果. 如上例中两枚骰子掷出 $(5,5)$,则事件 A_3 发生,事件 A_1、A_2 没有发生.

1.1.4 必然事件与不可能事件

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，一个是空集 $\varnothing$. 为了方便研究，可将两者视为随机事件的极端情形. 其中前者包含了所有可能的样本点，故每次试验必然发生，称为**必然事件**；后者不包含任何样本点，故每次试验都不发生，称为**不可能事件**.

例如掷一枚骰子，“出现点数不超过 6”是一个必然事件，“出现 7 点”是一个不可能事件.

1.1.5 样本空间的容量及事件数

在具体问题中，了解样本空间是研究随机现象的第一步. 样本空间的构成有时很简单，有时也相当复杂，例如将一枚硬币连掷 5 次观察正反面出现的情况，此时罗列所有的样本点将是非常繁重的工作，幸好一般情况下无需如此，只需知道样本点的个数即可.

样本空间包含的样本点个数称为**容量**. 若容量有限，就是有限样本空间，如试验 E_1、E_2 中的 Ω_1、Ω_2. 有限样本空间是最简单的样本空间，研究它有助于深入分析更为复杂的样本空间.

若样本空间包含无穷多个样本点，即无限样本空间，此时又可细分为两类：一则包含无穷但可列个样本点，如 E_3 中的 Ω_3，这类空间的性质类似于有限样本空间；二则包含无穷但不可列个样本点，如 E_4 中的 Ω_4.

类似地，事件作为样本空间的子集，包含的样本点个数可以是有限个，也可以是无穷多个. 随机事件包含的样本点个数称为**事件数**，用 $N(A)$、$N(B)$ 等表示. 例如 E_3 中令事件 A 为“顾客人数小于 100”，则 $N(A)=100$；E_4 中令事件 B 为“弹落点与靶心的距离大于 2cm”，则 $N(B)=\infty$.

1.2 事件间关系及运算

在一个样本空间中可以定义不止一个事件，有必要研究事件之间的联系. 对事件之间关系的研究有助于我们认识随机现象的本质，也将大大简化对复杂事件的概率计算.

设试验 E 的样本空间为 Ω. $A,B,A_k,B_k(k=1,2,\cdots)$为 E 中事件.

1.2.1 事件的运算

1. 事件的并

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”——这一事件称为 A 与 B 的并事件，记作 $A\cup B$. 图 1.2.1 中阴影部分即为 $A\cup B$. 显然，$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地，"事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生"的事件称为事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

例 1　掷一颗骰子，用 ω_k 表示"出现 k 点"$(k=1,2,3,4,5,6)$. 设事件 A 为"出现奇数点"，则 $A=\omega_1\cup\omega_3\cup\omega_5$，即 A 是"出现 ω_k 点"$(k=1,3,5)$这三个事件的并事件.

2. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"——这一事件称为 A 与 B 的差事件. 记作 $A-B$(图 1.2.2). $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$.

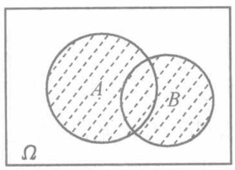

图 1.2.1

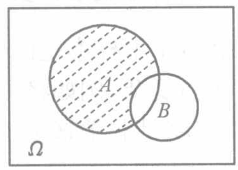

图 1.2.2

例 2　随机地抽取一长方形工件进行检验，令 A 表示"长度合格"，B 表示"宽度合格"，A_1 表示"只有长度合格"，则 $A_1=A-B$.

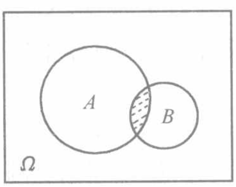

图 1.2.3

3. 事件的交

"事件 A 与事件 B 同时发生"——这一事件称为 A 与 B 的交事件，记作 $A\cap B$ 或 AB(图 1.2.3). $AB=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

在例 2 中，令 A_2 表示"产品合格"，则 $A_2=AB$.

类似地，"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件，记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

1.2.2　事件的关系

1. 包含

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 A **包含于** B 或 B **包含** A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(图 1.2.4). $A\subset B$ 意味着 A 所包含的样本点都属于 B.

对任一事件 A，必有 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.

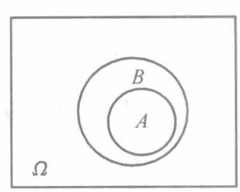

图 1.2.4

2. 相等

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

相等意味着 A 和 B 是同一个事件,它们包含的样本点完全相同.

3. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,两事件没有公共的样本点,则称 A 与 B 是**互不相容**或**互斥**的(图 1.2.5). 例如掷骰子试验中,"出现偶数点"与"出现奇数点"是两个互不相容事件.

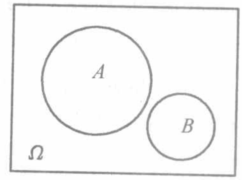

图 1.2.5

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个事件互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$,则称这 n 个事件互不相容,可见 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,一定是两两互不相容的事件. 例如样本空间 Ω 中的各个样本点就是互不相容的.

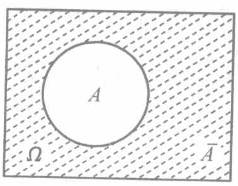

图 1.2.6

4. 互逆

对于事件 A,"事件 A 不发生"也是一个事件,称为 A 的**逆事件**或**对立事件**,记作 $\overline{A}$,它是由 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的(图 1.2.6). 显然 $A\cup\overline{A}=\Omega, AB=\varnothing$.

由定义不难看出,逆事件是相互的,A 也是 $\overline{A}$ 的逆事件,即 $\overline{\overline{A}}=A$. 特别地,$\Omega$ 和 $\varnothing$ 互为逆事件.

1.2.3 事件的运算规律

与集合论中集合的运算一样,事件之间的运算满足下面的运算律.

1) 交换律:$A\cup B=B\cup A; AB=BA$.

2) 结合律:$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$ABC=(AB)C=A(BC)$.

3) 分配律:$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC; A\cup(B\cap C)=(A\cup B)(A\cup C)$.

4) 摩根律:$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}; \overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

这些运算律可以推广到任意多个事件上去,利用运算律及事件间的相互关系,一个较复杂的事件能够表示成相对简单的形式,方便后面的概率计算.

例 3 设 A、B、C 是某试验中的 3 个事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(2) 事件"A、B、C 中至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$.

(3) 事件"A、B、C 中恰好发生两个"可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(4) 事件"A、B、C 中有不多于一个发生"可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

1.3　随机事件的概率

对于随机现象，若只讨论它可能出现什么结果，意义不大，更有价值的是指出各种结果即各种随机事件出现的可能性大小，只有这样，才能对随机现象做定量研究.

对一个随机事件 A，为了度量它在一次试验中发生的可能性大小，引入记号 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**. 显然，概率是一个非负值，且除了必然事件和不可能事件外，任一事件在一次试验中可能发生、也可能不发生，因此

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,\quad P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0.$$

如何度量事件 A 的概率大小? 我们只能从试验中看到 A 的发生或不发生，发生的“可能性”却是无法观测的. 但是，直观看来，若 $P(A)$较大，即 A 在**一次**试验中发生的可能性较大，则在相同条件下进行**多次**试验，A 出现次数应该较多，即 A 发生的频率较大；反之，若 $P(A)$较小，A 的发生频率应较小. 所谓频率，指如下定义：

定义 1　设事件 A 在 N 次重复试验中出现了 n 次，则比值$\dfrac{n}{N}$称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_N(A)$，即 $f_N(A)=\dfrac{n}{N}$.

显然，频率有如下性质：

$$0 \leqslant f_N(A) \leqslant 1,\quad f_N(\Omega)=1,\quad f_N(\varnothing)=0.$$

我们想得到概率，但概率无法观测；注意到上述概率与频率的直观联系，一个自然的想法就是从频率猜测概率，或者说，用频率作为概率的估计值. 但是，对同一个事件 A，当试验次数 N 不一样时，得到的 $f_N(A)$常常不同，用谁作为 $P(A)$的估计?

例 1　在掷硬币试验中，记录“正面朝上”这一事件出现的次数. 表 1.3.1 是试验结果.

表 1.3.1

试验序号	$N=50$		$N=500$	
	n	n/N	n	n/N
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	25	0.50	253	0.506
5	24	0.48	251	0.502
6	21	0.42	246	0.492
7	18	0.36	244	0.488
8	24	0.48	258	0.516
9	27	0.54	262	0.524
10	31	0.62	247	0.494

由表 1.3.1 可以看到，各轮试验中"正面朝上"事件出现的频率不完全相同，有一定波动性；但是，随着试验次数 N 的增大，它们总是围绕 0.5 上下波动，且逐渐稳定于 0.5. 这表明频率具有一定的**稳定性**.

上例展现出的频率的稳定性并不是一个特例，人们通过长期的实践发现，随着试验重复次数 N 的增加，一个随机事件 A 的频率 $f_N(A)$ 将稳定在某一常数附近，表现出"稳定性". 这种稳定性也就是 1.1 节提到的统计规律性.

例 2 频率稳定性在人口统计方面表现得较为明显. 法国著名数学家拉普拉斯(1749～1827)在他的时代里曾对男婴的出生率进行过深入研究，他分析了伦敦、彼得堡、柏林和全法国的人口资料后，发现男婴出生频率总在 $\frac{22}{43}$ 这个数值左右波动.

总之，频率稳定性是随机事件本身固有的客观属性，只要试验是在相同条件下进行，频率所接近和稳定到的这个值就是一个与 N 无关的常数. 对任一事件，都有这样一个客观存在的常数与之对应，因此，可用频率的稳定值描述概率，定义概率为频率的稳定值，这就是**概率的统计定义**.

定义 2 在相同条件下，重复做 N 次试验，设事件 A 在 N 次试验中发生了 n 次，如果当 N 增大时，A 的频率 $\frac{n}{N}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，就称此常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

根据这个定义，例 1 中"正面朝上"事件发生的概率为 0.5，说明掷一次硬币出现正面或反面的可能性相等，足球比赛时裁判正是用掷硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等.

显然，按概率的统计定义来求概率需要进行大量的重复试验，以寻找频率的稳定值，这在现实世界很难做到，注意到试验次数 N 较大时，频率 $f_N(A)$ 就会很接近 $P(A)$，因此实际中常直接拿频率作为概率的近似值. 例如足球比赛中罚点球的命中率是多少？曾有人对 1930～1988 年间世界各地 53274 场重大足球比赛做了统计，在判罚的 15382 个点球中，有 11172 个射中，频率为 11172/15382＝0.726，这就是罚点球命中概率的估计值.

1.4 古典概型

计算各种随机事件发生的概率，是概率论的基本任务之一. 按照 1.3 节概率的统计定义，可通过大量重复试验求概率；但是，对一类特殊的随机现象，不必试验，只需根据研究对象具有的某种"对称性"以及人们关于"对称性"的实际经验，就能直接计算概率.

例 1　盒中装有 5 个乒乓球，其中 3 个白色的，2 个黑色的，从中任取一球，问取到白球的概率是多少？

解　由于 5 个乒乓球没有什么差别，因此它们被取到的可能性都一样. 为方便表示取球的样本空间，不妨设 5 个球的标号为 1,2,3,4,5，则"取到第 i 号球"就是一个样本点；样本空间 Ω 共包含 5 个样本点，$N(\Omega)=5$. 记"取到白球"这一事件为 A，A 包含的样本点个数 $N(A)=3$. 根据人们的实际经验可直接判断，事件 A 发生的概率就是 $\frac{3}{5}$，该值恰好是 A 包含的样本点数与样本点总数的比值，即

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{5}.$$

例 2　将一枚硬币掷两次，求出现一正一反的概率.

解　令 G 表示"出正面"，H 表示"出反面"，掷两次共有 4 种可能结果：(H,H)，(G,G)，(G,H)，(H,G). 由于硬币是均匀的(即是开头所说的"对称性")，所以这 4 种结果是等可能的，且互不相容. 取样本空间为 $\Omega=\{(H,H),(H,G),(G,H),(G,G)\}$，则 $N(\Omega)=4$. 再令 A 表示出现一正一反的事件，则 A 由 (H,G)，(G,H) 两个样本点构成，$N(A)=2$. 与上例同理，可知

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

上面两个随机试验具有的共同特点是：

(1) 试验的样本空间容量有限；

(2) 试验中各样本点的出现是等可能的.

具有上述特点的随机试验是概率论发展初期的主要研究对象，因此被称为**古典概型**. 古典概型要求有限样本空间中各样本点的出现是等可能的(故又称为等可能概型)，在此前提下，事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}. \tag{1.4.1}$$

法国数学家拉普拉斯在 1812 年提出上式作为概率的一般定义，但这个定义只适用于古典概型场合，故称其为概率的古典定义.

从公式看，古典概型非常简单，计算概率时只需知道样本空间容量以及事件 A 包含的样本点数即可；但实际中古典概型的概率计算富有技巧，很多问题有一定难度，样本空间的构造、$N(\Omega)$ 和 $N(A)$ 的求出往往并非易事，还要用到排列和组合的一些公式. 下面举几个例子.

例 3　10 本不同的书按任意次序放到书架上，求其中指定 3 本放在一起的概率.

解　10 本书共有 10！种不同放法，由于书是按"任意次序"放至书架，因此各种

放法出现的可能性相同，该试验为古典概型，样本空间容量 $N(\Omega)=10!$. 令 A 表示"指定的 3 本放在一起"，不妨先将这 3 本书视为一个整体，它与其余 7 本在书架上任意放置，有 8! 种放法，进一步地，在 3 本书内部，有 3! 种排列方式，根据乘法原理，指定三本放在一起的放法共有 $8!\cdot 3!$ 种，即 $N(A)=8!\cdot 3!$；按照古典定义

$$P(A)=\frac{8!3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

例 4 设有 N 件产品，其中 M 件为次品，从中任取 n 件，求"取到 n 件中恰有 m 件次品"的概率.

解 从 N 件中任取 n 件，共有 C_N^n 种等可能的取法，即样本空间容量 $N(\Omega)=C_N^n$. 令 A 表示"n 件之中恰有 m 件次品"，则事件 A 要发生，必须是从 M 件次品中取出 m 件、$N-M$ 件正品中取出 $n-m$ 件，这样的取法共有 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 种；因此

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

例 5 从 $0,1,2,\cdots,9$ 中有放回地随机抽取五个数字，求抽到的五个数字都不相同的概率.

解 有放回指的是抽一个，记录数字后放回，再抽下一个；与之对应的抽样方式是无放回，如例 4. 由于每次抽到数字后都放回，故每次抽取都有 10 个可能的结果，连续 5 次抽得的数字按先后次序排列，就是该试验的一个样本点，显然样本点总数为 10^5，并且"随机抽取"必导致这 10^5 个样本点是等可能的. 令 A 表示"五次抽数都不相同"，则第一次抽数尚有 10 种可能，第二次抽数剩下 9 种，如此类推，可知 A 中包含的样本点个数为 $10\times 9\times 8\times 7\times 6=P_{10}^5$，因此

$$P(A)=\frac{P_{10}^5}{10^5}.$$

该例是古典概型的典型问题，许多实际问题可模型化为这种形式. 例如概率论历史上著名的生日问题：随机选取 n 个人，他们的生日各不相同的概率有多大？设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，这个问题相当于从 365 个数字中有放回地随机抽取 n 个. 根据上例，n 个人生日各不相同的概率就是$\frac{P_{365}^n}{365^n}$. 如果 $n=50$，可算出 $P=0.03$；$n=100$，概率只有 0.0000003，这意味着 100 人的群体中，几乎总有人的生日相同.

例 6 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，它们除颜色不同外，没有其他差别，从中不放回地连取 k 次，每次取一球，求最后一次(第 k 次)取出白球的概率.

解法一 把 $a+b$ 个球看作是互不相同的，例如给每个球一个不同的编号，每次取一球、不放回地连取 k 个共有 $(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)=P_{a+b}^k$ 种取

法，每种取法对应 k 个编号的一个有序排列，视为一个样本点，各样本点等可能，$N(\Omega)=\mathrm{P}_{a+b}^{k}$. 令 A 表示“最后一次取到白球”，最后取出的白球可以是 a 个白球中的任意一个，有 a 种取法，前面 $k-1$ 次取到的可以是其余 $a+b-1$ 个球中的任意 $k-1$ 个，有 P_{a+b-1}^{k-1} 种取法，因此事件 A 包含 $a\cdot\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}$ 个样本点，

$$P(A)=\frac{a\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二　易知本例与下述问题等价：把 a 个白球和 b 个黑球逐个填充到直线上 $a+b$ 个位置，求第 k 个位置是白球的概率.

仍然把 $a+b$ 个球看作是互不相同的，由于 $a+b$ 个球在直线上共有 $(a+b)!$ 种等可能的排列方式，故样本空间容量 $N(\Omega)=(a+b)!$. 第 k 个位置的白球可以是 a 个白球中的任一个，有 a 种可能，填充该位置后，余下 $a+b-1$ 个球在 $a+b-1$ 个位置上可任意放置，有 $(a+b-1)!$ 种放法，因此事件 A 包含 $a\cdot(a+b-1)$ 个样本点，

$$P(A)=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法三　把 $a+b$ 个球看作是互不相同的. 现在只考虑第 k 次取球，第 k 次取到的球可以是 $a+b$ 个球中的任意一个，有 $a+b$ 种取法，每种取法对应一个样本点，即 $N(\Omega)=a+b$，第 k 次取到白球有 a 种取法，$N(A)=a$. 所以

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

从这个例子我们看到：**对于一个随机试验，可以构造不同的样本空间来刻画它**，例如解法一的样本空间包含前 k 次取球，解法二的样本空间包含 $a+b$ 次取球，解法三的样本空间只包含第 k 次取球. **但是，不管如何构造，计算 $N(\Omega)$ 和 $N(A)$ 时必须在同一确定的样本空间中考虑问题.**

以上我们给出了古典概型中的概率定义，并就一些例题进行了计算，下面讨论古典概率的性质：

设试验 E 为古典概型，A 为 E 中事件，则

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：设 E 中的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

由(1.4.1)式，性质(1)和(2)是显然的，现证(3). 事实上，令 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，它们所包含的样本点没有相同的，故 $N(A)=N(A_1)+N(A_2)+\cdots+N(A_n)$. 由(1.4.1)