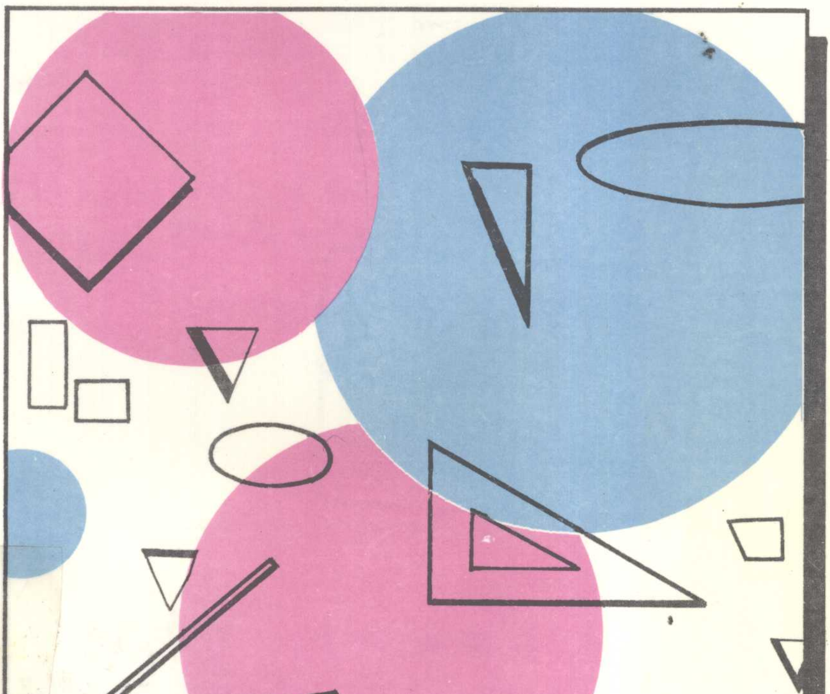
数学奥林匹克丛书

初中第二册

主编　尹旺忠



武漢出版社

数学奥林匹克丛书

初中第二册

尹旺忠 主编

尹旺忠 邱应麟 朱华伟 编著

武 汉 出 版 社

鄂新登字（08）号

数学奥林匹克丛书
初中第二册
尹旺忠　主编
*
武汉出版社出版发行
（武汉市江岸区北京路 20 号　邮政编码 430014）
湖北省京山县印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　32 开　7.875 印张　字数 170 千字
1994 年 4 月第 1 版　　1994 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—21000 册　　定价：4.30 元
ISBN 7—5430—1136—O/G·369

数学奥林匹克丛

小学第一册

（供四年级用

小学第二册

（供五年级用

小学第三册

（供六年级用

小学第四册

（综合训练）

初中第一册

初中第二册

高中第一册

高中第二册

高中第三册

序　言

朋友们编了这一套丛书希望我写几句话，我也恰好想利用一个机会讲几句话。

一

我国参加 IMO（国际数学奥林匹克）的成绩已经快到“顶”了：现在已是 6 块金牌，最多则是 6 个满分。在这时应该冷静地想一下奥林匹克竞赛的目的是什么？教育工作者有一条最基本的道理：在任何时候都要考虑 90%以上的学生。如果为培养少数“尖子”准

备的材料对多数学生没有用处，那就值不得花这么多精力。数学奥林匹克，它终归不是体育运动，更不是职业化的以培养“球星”为目的的那种体育活动。各个运动项目金牌得主，二十来岁（甚至十来岁）就要“退役”，要“告老”，可是IMO的金牌得主一生还没有真正开始，而且离一个科学家所应具备的学识水平还有好长好长的路要走。这套丛书的作者们是考虑到这一点的，因而编撰《数学奥林匹克丛书》之初，不仅仅是注重培优，而且也考虑了提高广大中小学生学习数学的兴趣和水平。但在当前社会风气影响下仅有一套好的书是难以实现这一良好的目标的，还必须有许许多多的教育工作者在使用这套书时多加努力。

二

数学竞赛当然应有难题。其实平时数学教学的习题也应该有需要经过努力才能被多数学生解出的较“难”的题。总的原则是：要多数人能做得出来；要多数人流一点汗。这个分

寸是很难掌握的。“难”题的目的是刺激学生的创造欲望。然后才谈得上能力的锻炼。当前教育的一大问题是许多学生实际上丧失了求知的强烈欲望,而这是十几岁的青年最明显的特点,固然有社会的原因,从教育内部来看,我们的教育行政部门、教师以及家长都应该严肃地想一下这个问题。这一套书分年级编排,高于教材而又不是高不可攀,这是一个很大的优点,它反映了作者们——不仅是教学多年的老师,而且也是培养各类奥林匹克竞赛奖牌得主的老师,像本丛书主要作者之一钱展望老师就指导了两名国际数学奥林匹克竞赛金牌得主——的经验。这些经验无疑会给这套丛书注入许多实战的材料,为实现其目的打下坚实的基础。

三

数学竞赛做题难,其实出题更难。例如平面几何,人们已经做了上千年,问题就那么多,方法也只有那么多,“好”题目应该早就出完了。但是另一方面,由于现代数学的发展,

尤其因为计算机的出现，好多新的东西又可以充实到中学生的精神粮库里去了。如数论之于密码学，组合学之于许许多多方面。对此，这套丛书的作者们在编撰时都作了认真的探讨，我建议从事中小学数学教学的老师不妨也阅读一下这套丛书，是会有些收获的，而且必定会对中小学教育有好处。苏联已经解体了，但是它曾是数学大国。它的经验之一是：最优秀的大数学家时常直接关心中学教育。以此来要求本丛书的作者是不应该的，但我愿借此机会呼吁各个高等学校、科研机构的学有所获的数学家们都来关心青少年（特别是高中学生）的数学教育、数学活动（统称数学竞赛）。造福青少年是功德无量的事。

第31届IMO主试委员会主席、博士导师、武汉大学教授

齐民友　1993.11.5

目　录

第一章 数与式

本章将讨论实数中的两个重要问题：有理数与无理数；非负实数（简称非负数），并研究代数式的恒等变形．通过这些知识灵活运用，培养和提高逻辑思维能力．

§1.1 有理数与无理数

有理数与无理数，统称实数．

有理数包括整数和分数．任何一个有理数，都可以表示成有限小数或无限循环小数．任何一个有理数，都可以表示成既约分数$\frac{p}{q}$的形式（其中q为自然数，p为整数）．

无限不循环小数叫做无理数，任何一个无理数，都不能表示成分数$\frac{p}{q}$的形式（其中q为自然数，p为整数）．

有理数与无理数有以下性质：

1．两个有理数的和、差、积、商（除数不为零）仍是有理数．

2．任何一个非零有理数同一个无理数的积必是无理数．

3．如果a,b是有理数，$\sqrt{m}$是无理数，那么要使

$$a\pm b\sqrt{m}=0,$$

必须且只须$a=0,b=0$．

4．如果a、b、m、n都是有理数，$\sqrt{m}$、$\sqrt{n}$是无理数，那么要使

$$a\pm\sqrt{m}=b+\sqrt{n},$$

必须且只须 $a=b, m=n$.

利用上面一些概念和性质，可解一些与有理数、无理数有关的问题.

一、判别有理数或无理数

例 1 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}\text{（}p\text{ 与 }q\text{ 为互质的自然数），}$$

$$2=\frac{p^2}{q^2}, p^2=2q^2 \qquad ①$$

$\therefore p^2$ 是偶数.

故 p 是偶数，可设 $p=2k$（k 为自然数）.

由①：$(2k)^2=2q^2$，即 $q^2=2k^2$.

$\therefore q^2$ 是偶数.

故 q 是偶数.

于是 p 与 q 有公约数 2，这与 p、q 互质相矛盾.

$\therefore \sqrt{2}$ 是无理数.

注 本题根据有理数的定义，运用奇数、偶数的性质，通过反证法加以证明的.

例 2 设 a、b 是正有理数，$\sqrt{a}$ 是无理数.

证明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数.

证明 假设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数.

$\because a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 是有理数.

故 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{a}$ 是有理数.

$\therefore \sqrt{a}$ 是有理数,这与 $\sqrt{a}$ 是无理数矛盾.

故　$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数.

注　1. 本题运用了有理数的性质.

2. 设 a、b 是正有理数,$\sqrt{b}$ 是无理数,同样有证明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数.

例 3　设 n 为自然数,且 n 不是完全平方数,则 $\sqrt{n}$ 是无理数.

证明　$\because n$ 为自然数,且 n 不是完全平方数,

故必存在自然数 t,使得 $t^2<n<(t+1)^2$.

$\therefore t<\sqrt{n}<t+1$　①

假设 $\sqrt{n}$ 是有理数,则

$\sqrt{n}=\frac{p}{q}$(p 与 q 为互质的自然数).

可知 q 是所有与 $\frac{p}{q}$ 相等的分数(其分母均有自然数的分数)中最小的分母.

由①:$t<\frac{p}{q}<t+1$,

$qt<p<qt+q$,

$0<p-qt<q$　②

由 $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$,得 $n=\frac{p^2}{q^2}$

$\therefore \frac{p}{q}=\frac{qn}{p}$,又 $\frac{p}{q}=\frac{pt}{qt}$,

$\therefore \frac{p}{q}=\frac{qn}{p}=\frac{pt}{qt}=\frac{qn-pt}{p-qt}$

由②:$0<p-qt<q$,

这与 q 是所有与 $\frac{p}{q}$ 相等的分数(其分母均为自然数的分

数)中最小的分母发生矛盾.

$\therefore \sqrt{n}$是无理数.

注 1. 已知分数$\frac{p}{q}$其中p与q为互质的自然数,则q是所有与$\frac{p}{q}$相等的分数(其分母均为自然数的分数)中最小的分母.

2. 注意运用比例性解题.

例 4 求证 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数.

证明 假设$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数,则

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$($p$与$q$为互质的自然数).

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{p^2}{q^2}$,

$\sqrt{6}=\frac{p^2-5q^2}{2q^2}$

$\because 6$不是完全平方数,

$\therefore \sqrt{6}$是无理数.

而$\frac{p^2-5q^2p}{2q^2}$是有理数,

这与$\sqrt{6}=\frac{p^2-5q^2}{2q^2}$发生矛盾.

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数.

注 将原式变形,利用有理数不等于无理数,是本题的关键所在.

本题,还可以运用构造法,通过对所构造的方程验根,进行证明.

另证 设$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,则

$$x^2=5+2\sqrt{6},$$

$$2\sqrt{6}=5-x^2,$$
$$24=25+x^4-10x^2,$$
$$x^4-10x^2+1=0 \qquad ①$$

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是方程①的一个根.

而整余数方程①的有理根只可能是± 1,

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

例 5　若 A 为无理数,a,b,c,d 为有理数,问何时$\frac{aA+b}{cA+d}$是有理数?

解　依题意,c,d 不同为 0. 设 $t=\frac{aA+b}{cA+b}$.

1. 若 $c\neq 0$,则 $t=\frac{a}{c}+\frac{cb-ad}{c(cA+d)}$,其中$\frac{a}{c}$是有理数,$c(cA+d)$是无理数,为使 t 为有理数,必须且只需分子 $bc-ad=0$,即 $ad=bc$.

2. 若 $c=0$,则 $d\neq 0$,$t=\frac{aA+b}{d}=\frac{b}{d}+\frac{aA}{d}$,为使 t 为有理数,必须且只需 $a=0$,此时 $ad=bc$.

综上所述,当且仅当 c,d 不同时为 0,且 $ad=bc$ 时,$\frac{aA+b}{cA+d}$是有理数.

注　根据解题的需要,本题就 $c=0$ 与 $c\neq 0$ 进行了分类讨论,分类时,要作到既不重复又无遗漏,且在同一次分类中保持同一个分类标准.

二、利用有理数、无理数的性质解题

例 6　设 x,y 是有理数,且$(x-\sqrt{3}y)^2=19-8\sqrt{3}$,试求 x,y 的值.

解 由$(x-\sqrt{3}y)^2=19-8\sqrt{3}$,得

$$x^2+3y^2-2\sqrt{3}xy=19-8\sqrt{3}.$$

∵x 和 y 是有理数,$\sqrt{3}$是无理数,

$$\therefore \begin{cases} x^2+3y^2=19 \\ -2xy=-8 \end{cases},$$

解之,得$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$或,$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$或$\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

∵x 和 y 是有理数,

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$为题求之解.

注 要注意验根.

例 7 求满足方程

$$\sqrt{11-4\sqrt{6}}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})=5\sqrt{2}$$

的 x、y 的整数值.

解 原方程两边平方,得

$$(11-4\sqrt{6})(2x+2\sqrt{x^2-y^2})=50$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2-y^2}=\frac{25}{11-4\sqrt{6}}-x,$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=(11-x)+4\sqrt{6}.$$

两边平方,得

$$x^2-y^2=(11-x)^2+96+8(11-x)\sqrt{6},$$

$$[(11-x)^2-x^2+y^2+96]+8(11-x)\sqrt{6}=0.$$

∵x、y 是有理数,$\sqrt{6}$是无理数,

$$\therefore \begin{cases} (11-x)^2-x^2+y^2+96=0 & ① \\ 11-x=0 & ② \end{cases}$$