考研数学精讲

张同斌 主编

根据
最新大纲
编写

- 紧扣大纲 全面解读最新命题趋势
- 多方收集 历年全真试题一网打尽
- 科学分类 精心编排巧妙梳理思路
- 深层详解 提供权威规范多重分析

合肥工业大学出版社

最新考研数学应试指导

考研数学精讲

主　编　张同斌
副主编　呼青英　林　浩
　　　　万建军　焦万堂

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精讲/张同斌主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2008．11

ISBN 978－7－81093－845－7

Ⅰ．考…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 172109 号

考研数学精讲

张同斌　主编　　　　责任编辑　疏利民

出　版	合肥工业大学出版社		版　次	2008 年 11 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号		印　次	2008 年 11 月第 1 次印刷
邮　编	230009		开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551—2903038		印　张	26.75
	发行部：0551—2903198		字　数	650 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn		印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn		发　行	全国新华书店

ISBN 978－7－81093－845－7　　　　定价：38.00 元

前言

本书是工学类、经济学类和管理学类硕士研究生入学考试备考数学的学习指导书．由长期从事考研数学辅导和大学数学教学与研究工作的优秀教师主编而成．

本书紧跟最新数学考研大纲，深刻领会大纲精髓，贴近考试实际，按照数学考研大纲要求次序编排内容．每一章内容按照基本要求、重点与难点，知识点归纳，常见题型，练习题，练习题参考答案与提示等五部分编写．根据作者二十余年考研数学辅导经验，准确把握每部分内容的重点与难点内容，使考生在复习过程中做到重点突出、有的放矢；知识点归纳部分叙述简捷，尽可能挖掘出知识点之间的关联性，便于考生在复习过程中做到一目了然，提高综合解决问题的能力与复习效率；常见题型是作者二十余年考研数学辅导经验的结晶，便于帮助考生掌握多种基本题型的解题思路与方法，找到解决问题的关键、技巧和规律；常见题型与练习题绝大部分都是历年考研数学真题，使考生在复习过程中复习、演练题目的“口味”与考研数学题目相一致，揭开考研数学题目的面纱，达到预期的复习效果．

本书可作为硕士研究生入学考试数一、数二、数三的学习指导书；对于在校的本科生、大专生以及自学考试者，本书也不失是一本较好的学习指导书．

本书在编写过程中，刘一勋教授审阅了概率论与数理统计、高等数学部分内容，并提出了宝贵意见，这里向他表示衷心的感谢．

本书由全国优秀教师张同斌主编，呼青英、林浩、万建军、焦万堂任副主编，参加编写的还有林恒强、党健、王蕊．

限于编者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者指正．

编　者

2008 年 9 月 28 日

目录

第1部分
高等数学

第1章　函数、极限、连续 …… (2)

1.1　基本要求、重点与难点 …… (2)
1.2　知识点归纳 …… (2)
1.3　常见题型 …… (8)
1.4　练习题 …… (25)
1.5　练习题参考答案与提示 …… (28)

第2章　一元函数微分学 …… (30)

2.1　基本要求、重点与难点 …… (30)
2.2　知识点归纳 …… (30)
2.3　常见题型 …… (40)
2.4　练习题 …… (63)
2.5　练习题参考答案与提示 …… (68)

第3章　一元函数积分学 …… (70)

3.1　基本要求、重点与难点 …… (70)
3.2　知识点归纳 …… (70)
3.3　常见题型 …… (82)
3.4　练习题 …… (96)
3.5　练习题参考答案与提示 …… (97)

第 4 章　向量代数和空间解析几何(仅数一要求) ………… (99)

4.1　基本要求、重点与难点 ………… (99)
4.2　知识点归纳 ………… (99)
4.3　常见题型 ………… (106)
4.4　练习题 ………… (110)
4.5　练习题参考答案与提示 ………… (110)

第 5 章　多元函数微分学 ………… (112)

5.1　基本要求、重点与难点 ………… (112)
5.2　知识点归纳 ………… (112)
5.3　常见题型 ………… (119)
5.4　练习题 ………… (130)
5.5　练习题参考答案与提示 ………… (131)

第 6 章　多元函数积分学 ………… (132)

6.1　基本要求、重点与难点 ………… (132)
6.2　知识点归纳 ………… (132)
6.3　常见题型 ………… (144)
6.4　练习题 ………… (157)
6.5　练习题参考答案与提示 ………… (159)

第 7 章　无穷级数(仅数一、数三要求) ………… (160)

7.1　基本要求、重点与难点 ………… (160)
7.2　知识点归纳 ………… (160)
7.3　常见题型 ………… (167)
7.4　练习题 ………… (175)
7.5　练习题参考答案与提示 ………… (176)

第 8 章　常微分方程 ………… (178)

8.1　基本要求、重点与难点 ………… (178)
8.2　知识点归纳 ………… (178)
8.3　常见题型 ………… (185)
8.4　练习题 ………… (197)
8.5　练习题参考答案与提示 ………… (199)

第 2 部分

线性代数

第 1 章 行列式 …… (202)

1.1 基本要求、重点与难点 …… (202)
1.2 知识点归纳 …… (202)
1.3 常见题型 …… (205)
1.4 练习题 …… (213)
1.5 练习题参考答案与提示 …… (215)

第 2 章 矩阵 …… (216)

2.1 基本要求、重点与难点 …… (216)
2.2 知识点归纳 …… (216)
2.3 常见题型 …… (221)
2.4 练习题 …… (230)
2.5 练习题参考答案与提示 …… (233)

第 3 章 向量 …… (235)

3.1 基本要求、重点与难点 …… (235)
3.2 知识点归纳 …… (235)
3.3 常见题型 …… (240)
3.4 练习题 …… (252)
3.5 练习题参考答案与提示 …… (254)

第 4 章 线性方程组 …… (255)

4.1 基本要求、重点与难点 …… (255)
4.2 知识点归纳 …… (255)
4.3 常见题型 …… (259)
4.4 练习题 …… (273)
4.5 练习题参考答案与提示 …… (276)

第 5 章 矩阵的特征值和特征向量 …… (278)

5.1 基本要求、重点与难点 …… (278)
5.2 知识点归纳 …… (278)
5.3 常见题型 …… (280)
5.4 练习题 …… (295)

5.5 练习题参考答案与提示 …… (297)

第 6 章 二次型 …… (299)

6.1 基本要求、重点与难点 …… (299)
6.2 知识点归纳 …… (299)
6.3 常见题型 …… (301)
6.4 练习题 …… (306)
6.5 练习题参考答案与提示 …… (307)

第 3 部分

概率论与数理统计

第 1 章 随机事件和概率 …… (310)

1.1 基本要求、重点与难点 …… (310)
1.2 知识点归纳 …… (310)
1.3 常见题型 …… (313)
1.4 练习题 …… (322)
1.5 练习题参考答案与提示 …… (323)

第 2 章 随机变量及其分布 …… (324)

2.1 基本要求、重点与难点 …… (324)
2.2 知识点归纳 …… (324)
2.3 常见题型 …… (329)
2.4 练习题 …… (337)
2.5 练习题参考答案与提示 …… (339)

第 3 章 多维随机变量及其分布 …… (341)

3.1 基本要求、重点与难点 …… (341)
3.2 知识点归纳 …… (341)
3.3 常见题型 …… (346)
3.4 练习题 …… (361)
3.5 练习题参考答案与提示 …… (363)

第 4 章 随机变量的数字特征 …… (366)

4.1 基本要求、重点与难点 …… (366)
4.2 知识点归纳 …… (366)
4.3 常见题型 …… (369)

4.4 练习题 …… (377)
4.5 练习题参考答案与提示 …… (379)

第 5 章 大数定理和中心极限定理 …… (381)

5.1 基本要求、重点和难点 …… (381)
5.2 知识点归纳 …… (381)
5.3 常见题型 …… (383)
5.4 练习题 …… (387)
5.5 练习题参考答案与提示 …… (387)

第 6 章 数理统计的基本概念 …… (389)

6.1 基本要求、重点与难点 …… (389)
6.2 知识点归纳 …… (389)
6.3 常见题型 …… (393)
6.4 练习题 …… (398)
6.5 练习题参考答案及提示 …… (399)

第 7 章 参数估计 …… (400)

7.1 基本要求、重点与难点 …… (400)
7.2 知识点归纳 …… (400)
7.3 常见题型 …… (404)
7.4 练习题 …… (410)
7.5 练习题参考答案及提示 …… (411)

第 8 章 假设检验(仅数一要求) …… (412)

8.1 基本要求、重点与难点 …… (412)
8.2 知识点归纳 …… (412)
8.3 常见题型 …… (414)
8.4 练习题 …… (418)
8.5 练习题参考答案与提示 …… (418)

第一部分

高等数学

第1章　函数、极限、连续

1.1　基本要求、重点与难点

基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系．

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念．

5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念，掌握函数极限存在与左极限、右极限之间的关系．

6. 了解极限的性质，掌握极限的四则运算法则．

7. 掌握极限存在的两个准则；并会利用它们求极限（仅数一、数二要求），掌握利用两个重要极限求极限的方法．

8. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法．了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系，会用等价无穷小量求极限．

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型．

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会运用这些性质．

重点

求极限的方法，无穷小的比较，函数的间断点的类型的判别．

难点

数列与函数极限的概念，闭区间上连续函数的性质及应用．

1.2　知识点归纳

一、函数

（一）函数的概念

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，如果对于非空实数集合 D 中的每一个 x，按照一定规则，都有一个确定的 y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$．其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为函数的定义域，并把实数集

$$Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域.

2. 分段函数

如果在不同的自变量变化范围内,函数有着不同的表达形式,这类函数称为分段函数.常见的分段函数有

(1) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) 取整函数 $y=[x]$,即$[x]$是不超过x的最大整数.

说明:① 一般地,分段函数在分段点的左、右两侧函数的表达式不同,因此讨论分段函数在分段点处的极限、连续、导数等问题时,应分别用左、右极限,左、右连续和左、右导数.

② 分段函数一般不是初等函数.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z,如果对于 Z 中任意一 y,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 与之对应,则称变量 x 为变量 y 的函数. 记作 $x=\varphi(y)$,$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 U_2,如果 $U_2\subseteq U_1$,则 $y=f(\varphi(x))$ 是定义在 D 上的复合函数. 其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

5. 初等函数

(1) 基本初等函数

我们把

(ⅰ) 常值函数 $y=C$(常数);

(ⅱ) 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数);

(ⅲ) 指数函数 $y=a^x$($a>0, a\neq 1$ 为常数),$y=e^x$;

(ⅳ) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0, a\neq 1$ 为常数),$y=\ln x$;

(ⅴ) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

(ⅵ) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$;

统称为基本初等函数.

(2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次的复合构成并且由一个式子表示的函数称为初等函数. 初等函数在其定义区间上是连续函数.

(二) 函数的特性

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,$X\subset D$,如果对任意 $x_1, x_2\in X$,$x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调增加(或严格单调减少)的;如果任意 $x_1, x_2\in X$,$x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 X 上是不严格单调增加(或不严格单调减少)的.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 X 上有定义，如果对任意 $x \in X$，恒有

$$f(-x)=f(x)\quad(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

说明:① 偶函数的图形关于 y 轴为对称，奇函数的图形关于原点为对称；

② 任意一个函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和(差).

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果存在正常数 T，使得任意 $x \in X$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期。

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果存在正数 M，使得任意 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上是有界的. 如果对任意 $M>0$，存在 $x_0 \in X$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上是无界的.

二、极限

(一) 极限的概念与性质

1. 极限的定义

(1) 数列极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

(2) 函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$\forall \varepsilon>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 极限的性质

(1)(存在唯一性) 设 $\lim f(x)=A, \lim f(x)=B$，则 $A=B$.

(2) 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，且当 x 变化到一定范围时，$f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$；反之，如果 $A>B$，则在 x 变化到一定范围时，有 $f(x)>g(x)$.

说明:当 $g(x)\equiv 0, B=0$ 时，上述结论即为极限的局部保号性.

(3) 如果 $\lim f(x)=A$，则当 x 变化到一定范围时，$f(x)$ 是有界的，反之不真.

3. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

(1) $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim(f(x)g(x))=\lim f(x)\lim g(x)=AB$；

(3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$;

(4) $\lim f(x)^{g(x)} = A^{B}(A > 0)$.

4. 左、右极限

左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

(二)无穷小

1. 无穷小的定义

如果$\lim f(x) = 0$,则称在某一自变量变化过程中 $f(x)$ 为无穷小;也即以零为极限的变量称为无穷小.

2. 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍然是无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是无穷小;

(3) 无穷小与有界变量的乘积仍然是无穷小.

3. 无穷小与无穷大的关系

(1) 无穷大

在自变量的某一变化过程中,如果 $|f(x)|$ 无限增大,则称在自变量的这一变化过程中函数 $f(x)$ 为无穷大. 一般地,无穷大一定是无界变量,但无界变量未必是无穷大.

(2) 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;如果 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

4. 无穷小与极限的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中$\lim \alpha(x) = 0$.

5. 无穷小的比较

设$\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$.

(1) 如果$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小,记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

(2) 如果$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小;

(3) 如果$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = k(k \neq 0, 1)$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小,记为,$\beta(x) = O(\alpha(x))$;

(4) 如果$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小,记为 $\beta(x) \sim \alpha(x)$;

(5) 如果$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha^{m}(x)} = k(k \neq 0)$, m 是正整数,则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的 m 阶无穷小.

6. 等价无穷小替换定理

(1) 常见的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$（其中 α 是实常数）.

(2) 等价无穷小替换定理

设在自变量的某一变化过程中 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且在同一自变量变化过程中 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

（三）求极限的方法

1. 利用极限的四则运算法则.
2. 利用分子（分母）有理化，因式分解等初等数学方法.
3. 利用极限的两个存在准则

(1) 夹逼定理　设 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，如果 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$.

(2) 单调有界数列必收敛.

4. 利用等价无穷小替换定理.
5. 利用两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

6. 利用洛必达法则

法则 Ⅰ（$\frac{0}{0}$ 型）　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

(1) $\lim f(x) = 0$，$\lim g(x) = 0$；

(2) 在自变量 x 的某一变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0$；

(3) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞），

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞）.

法则 Ⅱ（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

(1) $\lim f(x) = \infty$，$\lim g(x) = \infty$；

(2) 在自变量 x 的某一变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0$；

(3) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞），

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞）.

7. 利用导数的定义求极限.
8. 利用定积分的定义求极限.

说明：一些特殊形式的极限

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$；

$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty.$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi.$

三、连续性

1. 函数的连续性的定义

定义一　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，其中 Δx 是在 x_0 处自变量的增量，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是相应的函数的增量，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

定义二　如果函数 $f(x)$ 满足

(1) $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

定义三　如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．

2. 函数的间断点

函数不连续的点称为函数的间断点．或如果下列三种情形之一满足

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点．

函数的间断点分为两类：

第一类间断点：左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，第一类间断点包括跳跃间断点（左、右极限都存在但不相等的间断点）与可去间断点（左、右极限都存在且相等的间断点）．

第二类间断点：非第一类间断点称为第二类间断点，常见的第二类间断点有无穷间断点与振荡间断点.

3. 初等函数的连续性

(1) 有限多个在区间 I 连续的函数的和、差、积，在区间 I 仍是连续的；如果 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 I 连续，且 $g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 I 仍是连续的.

(2) 在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应的区间仍连续且单调.

(3) 由连续函数经过有限次复合而成的复合函数在其定义区间仍是连续函数.

(4) 初等函数在其有定义的区间上是连续函数.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界，即存在常数 $M>0$，对任意的 $x\in[a,b]$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

(2) 最值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值 M 和最小值 m.

(3) 介值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对于介于 $f(a)$ 与 $f(b)$（或介于最大值 M 与最小值 m）之间的任意一实数 C，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C.$$

(4) 零点定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

1.3　常见题型

一、函数及其特性、函数记号的灵活表示

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f(f(f(x)))=$

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$　　[　　]

解　由 $f(f(x))=1$ 知 $f(f(f(x)))=1$. 故应选(B).

2. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.　　[　　]

解　当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\dfrac{\sin 3}{18}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界. 故应选(A).

3. 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$. (1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；(2) 求 $f(x)$ 的