普通高等教育"十一五"规划教材

离散数学

张明尧　编著

DISCRETE MATHEMATICS

免费
电子课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”规划教材

离散数学

张明尧　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是上海市精品课程“离散数学”的教材。内容主要分为如下几个部分：第 1 部分，数理逻辑基础；第 2 部分，集合论基础；第 3 部分，代数系统基础；第 4 部分，图论基础。数理逻辑基础部分主要讲述命题逻辑、谓词逻辑的基础理论和它们在推理理论中的简单应用；集合论基础部分主要讲述集合与关系、映射、函数与集合的基数等基本内容；代数系统基础部分主要讲述二元运算的主要性质及代数系统中若干重要的元素，并介绍广群、半群、含幺半群、群及环和域，以及格与 Boole 代数的基础知识；图论基础部分主要讲述图和树的基础知识及其简单应用。每章后附有一定数量的习题，其中有一些是历年研究生考试的试题，可供读者学习时选做。建议读者能独立完成这些习题中的大部分，这对掌握这门课程的主要内容是至关重要的。本书的电子教案和习题的详细解答将免费提供给任课教师使用（索取邮箱：wbj@mail.machineinfo.gov.cn）。

本书可供计算机专业、应用数学专业以及其他相关专业的本科生作教材使用，也可供有关专业的教师和学生用作教学或者学习参考书，并适合对本书内容感兴趣的数学爱好者自学使用。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张明尧编著. —北京：机械工业出版社，2008.5
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-111-24175-1

Ⅰ. 离… Ⅱ. 张… Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材
Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 080091 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：王保家 责任编辑：姚光明 版式设计：霍永明
责任校对：樊钟英 封面设计：张 静 责任印制：杨 曦
三河市国英印务有限公司印刷
2008 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm·17 印张·421 千字
0001－3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-24175-1
定价：27.00 元

前言

离散数学是计算机专业以及应用数学有关专业的一门专业基础课，也是相应专业研究生入学考试的一门考试课程。因此，它在计算机专业以及相关专业的人才培养中的作用和地位是相当重要的。华东理工大学的相关专业从设立伊始就引入了离散数学这门课程，多年来，老中青三代教师在同一门课程的教学工作中相互竞争又相互合作，形成了一个很好的工作团队，也取得了良好的教学效果。经过若干年持续不断的努力，2005年，华东理工大学离散数学课程被批准为上海市精品课程加以建设。为了配合这门新诞生的精品课程的教学，我们编写了这部《离散数学》新教材，希望它的出版能对建设这门精品课程、提高全国理工科大学离散数学课程的教学质量起到一点推动作用。

在中国的大学里，离散数学作为一门独立的课程，主要是因计算机专业的需要而开设的，而且，即便是在世界数学教育的历史上，也是在计算机成为一个新兴专业之后才逐渐设立了离散数学这门课程的，因此，相对许多年代悠久的数学课程而言，离散数学课程开设较晚，对于它的教学内容和要求，国内外至今尚无完全统一的标准，不同作者所编著的教材在内容上以及侧重面也有所不同。从国内来看，目前各个高校的离散数学课程的教学内容已有基本统一的要求，其内容大致分为以下几大部分：数理逻辑基础；集合论基础；代数系统基础；图论基础。这4大部分中，除了最后一部分图论的整体理论在数学史上形成较晚且其中涉及的问题大体上属于应用数学的范畴以外（当然，其中某些单个的问题依然有较为悠久的历史），前面3个部分都是纯粹数学中有悠久历史的独立的数学分支。这4个部分实际上是当今大学数学系以及应用数学系的4门重要的基础课程或者专业基础课程，要在离散数学这一门课程中讲授完这4门既有深度又有广度的数学课程的基础内容，显然需要有适当的取舍和良好的讲授方法。本着提高兴趣、精简教材的目标，我们在实际教学中，一方面对教学内容上作了必要的调整，适当删减了某些较为困难的内容，加强了对于基础部分的讲述；另一方面利用其他的非教学时间，适当为感兴趣的学生开办选修课或者讲座，选讲与离散数学这4大数学分支有关、但在正常教学时间内无法讲述的有趣而且重要的数学问题，收到了良好的效果。因此，在本书末尾，我们从日常给学生举办的讲座中选择了一些问题，写成了几篇附录，以供青年教师和感兴趣的学生以及其他数学爱好者选读。书末还提供了各部分内容所涉及的经典著作以及若干现代的参考书籍，可供有志进一步学习该分支的读者参考。根据我们的教学经验，对于有至少72个学时的教学计划的离散数学课程，基本上可以讲授完本书正文中的绝大部分内容。然而，鉴于目前各高校以及不同专业的离散数学课程的教学时数有较大的差别，因此，建议教师在选用本教材时要根据教学时数以及所教授专业的特点对于教学内容作适当的选择甚至增减。本书带“*”的章节为选讲内容。

关于习题，我们经过筛选，安排了一定数量的难度不等的练习题附在每章的后面，供教师布置习题时选用，其中多数题目是不太困难的基础练习题，但也有一些习题是历年离散数学课程研究生考试的试题，有一定的难度。题目的数量是我们根据自己的经验选择的，过少

的习题固然不可能实现基本的教学目标，但是太多的习题也不见得就能达到最好的效果。对于书中的习题，我们基本上都做出了较为详细的解答，少数题目只给出了答案或者提示。为了促使使用本教材的学生能够尽可能在学习中养成独立思考的习惯，我们没有像通常的做法那样把习题解答附在书的后面，而是由出版社单独提供给选用本教材的教师，老师可以发邮件到出版社免费索取。此外，还配有电子教案，欢迎选用本书作教材的老师索取，索取邮箱：wbj@mail.machineinfo.gov.cn。

本书有4个附录（请读者到www.cmpedu.com下载），收录的是作者给本科生开设的数学选修课中部分讲座的内容。

目录如下：

附录A　与集合论有关的数学问题

附录B　Boole代数的Huntington公理化定义

附录C　Pólya-Burnside计数定理及其应用

附录D　有限域与正交Latin方

这些附录分别介绍了与离散数学有关的某些重要数学分支中饶有趣味的数学问题，理论性与实用性兼备，值得学习离散数学这门课的同学们一读。希望这些附录能开拓同学们的眼界，增加他们学习数学的兴趣。

在本书出版之际，我要对华东理工大学离散数学精品课程组全体老师及机械工业出版社的编辑表示衷心的感谢，并欢迎读者对本书提出宝贵的意见和建议。

张明尧

于上海市金山区辰凯花苑

目　　录

第 4 部分 图论基础

第 1 部分　数理逻辑基础

第 1 章　命题逻辑初步

1.1　命题及其表示

在日常生活中，人们使用的是人类的自然语言。由于自然地域、文化渊源以及历史发展的进程不尽相同，身处世界各地的不同种族、不同自然环境的人产生了丰富多彩、风格迥异的自然语言、文明历史及文化传统。但是，无论哪一种自然语言都有某些基本共同的功能，例如，使用自然语言的人都要面临如何用自己的语言来清楚明白地表达自己的意见、分析、判断以及推理问题。然而，虽然人类的自然语言内涵极其复杂、丰富，但往往不够精确、严谨，甚至常产生多义和歧义现象，使得仅用自然语言无法很好地完成数学中所需要的严格的分析、判断及推理工作。因此，为了适应数学科学以及其他科学分支发展的需要，数学家们从人的自然语言中发展出了一套严格的形式逻辑语言及相应的数学符号。本书第 1 章将向读者简要介绍命题逻辑的基础知识。

命题逻辑这一部分涉及的是命题、真值以及联结词等一系列最为基本的概念，它们是后面所要讲述的命题演算的推理理论的基础。

[定义 1-1]　（命题和真值）本章中研究的基本对象是命题。命题满足以下两个条件：首先它必须是一个陈述句，此外该陈述句的结论必须要么为真，要么为假。这里的“真”或“假”称为该命题的真值。本书中所研究的真值只有“真”和“假”两个值。为了书写简单起见，也常用英文字母“T”和“F”或者数字“1”和“0”来分别表示“真”和“假”。

[注]

① 在模糊数学里的模糊逻辑系统中，每个命题不必一定取真值“真”，也不必一定取真值“假”，而有可能是以 0～1 之间的某个程度取到真值“真”或者真值“假”。

② 在某些数学软件（如 Mathematica）中，为了使用方便，在软件的一般逻辑系统及其运算中除了“真”和“假”这两个真值外，还给出了第三个真值“非真非假”。如果该软件在对某个逻辑命题经过判断给出“非真非假”的真值，就表明软件无法判断该命题的真值。

[例 1-1]

(1) 北京是中华人民共和国的首都。

（2）大海最深处离海平面的高度小于地球上最高峰离海平面的高度。

这两个自然语言表述的句子显然都是陈述句，而且它们都有确切的真值（第一个句子的真值显然为“真”，第二个句子的真值显然为“假”，这里不考虑所研究的问题随着历史变迁可能产生的变化），根据定义，它们都是命题。

[例 1-2]

（1）$1+1=10$。

（2）$x+1=0$。

第一个表达式可以用一个陈述句来表达，这符合命题定义中的第一个条件。然而，由于在不同的进位制下该表达式的真值有不同的结果（例如，在十进制下这个结论的真值为“假”，而在二进制下，这个表达式的真值为“真”），故严格地说，它不能算作一个命题。不过，只要讲出讨论该表达式所约定的进位制，它就一定有确定的真值，从而就是一个命题。

至于第二个表达式，同样由于其中变量 x 的具体取值并未加以明确指定，因而它也不能成为一个命题。当然，如果能适当指定变量 x 的取值，使得第二个表达式能有确定的真值，那么它仍然有可能成为一个命题。

[例 1-3]

（1）请为实现你自己的人生理想而努力奋斗！

（2）在太阳系以外的天体中是否有与人类相似的有高度智慧的生物存在？

这两个句子中，前一个是祈使句（有时也称为命令式），而后者则是疑问句，它们都不是陈述句，因而都不是命题。当然，如果将它们适当加以改动，它们还是有可能成为命题的。比如下两句改动的句型就都是我们所定义的命题：

(1a) 只要努力，任何人都有可能实现自己的人生理想。

(2a) 在太阳系以外不存在像人类一样的有高度智慧的生物。

只不过，像“在太阳系以外不存在像人类一样的有高度智慧的生物。”这样的陈述句，它的真值究竟是什么，可能目前还无法准确地知道。随着科学的不断发展，人类相信总有一天会对这个问题给出肯定或者否定的答案，因此仍然可认定它是一个命题。

[例 1-4] 试判断下述结论是否是一个命题。

某人说：“我正在说谎。”

这句话是一个陈述句乃显而易见，关键在于它是否能有确切的真值。如果该陈述句的真值为“真”，那就说明该说话人确实是在说谎，那么他说的“我正在说谎。”本身应是谎言，从而他事实上并未说谎，也即陈述句的真值就应当为“假”，矛盾；如果该陈述句的真值为“假”，那就说明该说话人并不是在说谎，那么他说的“我正在说谎。”本身应是正确的，从而他事实上是在说谎，也即陈述句“我正在说谎。”的真值就应当为“真”，又是矛盾！从而，“他说：‘我正在说谎。’”这个陈述句的真值既不可能为“真”，也不可能为“假”。因而，所给结论不是命题。

[注] 这是著名的 Eubulides 悖论（公元 4 世纪）的多种变种中的一种，也称说谎者悖论。这种悖论的思想构成了形式公理理论中著名的 Gödel 不完全性定理的证明的基础。

[定义 1-2] （命题常量和命题变量）像上面例子中列举的每个成为命题的那种陈述句，它们的共同特点是：它们皆为一个具体的、完全确定的、其内容不可更改的命题，其真值也均完全确定。这样的命题均称为命题常量。而有时也直接用大写字母 A，B，C 等来表

示抽象的、事先并未具体给出其内容的命题，它们的共同特点是：它们的具体内容并未事先给定，从而它的真值并不是确定的，其真值需待用确定的命题常量替代掉这个变量后才能完全确定下来。这样的命题称之为命题变量。

所以，事实上严格地讲，命题变量还不是真正的命题，只有当命题变量被一个具体的命题常量取代后才能成为真正有确定真值的命题。不过，在命题演算中常用命题变量而不用命题常量。因为只有这样做，才更能体现出所讨论的性质的不依赖于具体命题常量的一般特性和本质特征，有利于一般规律的研究和总结。就好像在中学学习代数时，总是用字母而不是用具体的数字来表达运算定律，由此可以更加突出代数运算中不依赖于具体数字的更为一般的运算规律和特性。这两者的精神是完全一样的。对于一个含有命题变量的命题公式（有关命题公式的严格定义要在讲完联结词后才能给出），在其中所含的命题变量的所有可能的真值选择下，该公式所对应的真值的全部可能结果列成的表格称为该命题公式的真值表。

为了进一步扩大命题的范围，需要介绍有关联结词的概念。本书中一共要介绍 9 个联结词，下面先介绍其中最重要的 5 个联结词，剩下的 4 个联结词放在以后再介绍。

1.2　命题联结词

命题联结词的作用是将命题与命题相连接，从而产生出更为复杂的命题。从某种意义上说，它们与代数运算中的运算符号“+、−、×、÷、$\sqrt{\ }$”等的作用非常相似，因而也可以称为逻辑运算符。代数运算符$\sqrt{\ }$（开平方运算符）只作用在一个数字（或变量）上，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{x}$等，它称为一个单目（代数）运算符；而代数运算符+、−、×、÷等则必须夹在两个数字（或变量）之间使用，例如 $x+y$，$y-5$，10×7，$x\div 2$ 等，它们均称为双目（代数）运算符。命题联结词也有类似的划分。

[定义 1-3]　（否定（也称为“非”，用符号“¬”表示））设 P 是一个命题公式，则命题公式 $\neg P$（读作“非 P”或“P 的否定”。有的书上 P 的否定也用符号$\bar{P}$ 表示）的真值与 P 的真值恰好相反。$\neg P$ 的真值表如表1-1所示。

表 1-1　联结词否定的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

[例 1-5]

（1）P：汉城和首尔是同一个城市。则 $\neg P$：汉城和首尔不是同一个城市。

（2）P：计算机基础是所有本科生的一门必修课。则 $\neg P$：计算机基础不是所有本科生的一门必修课。

[定义 1-4]　（合取（用符号“∧”表示））设 P 和 Q 是两个命题公式，则命题公式 $P\wedge Q$（读作 P 与 Q 的合取）的真值可以用一句话来表达：当且仅当 P 和 Q 的真值均为 T 时，$P\wedge Q$ 的真值才为 T。或说成是：只要 P 和 Q 的真值中有一个是 F，则 $P\wedge Q$ 的真值就必为 F。$P\wedge Q$ 的真值表如表1-2所示。

表 1-2 $P \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

[例 1-6] 试用数理逻辑符号表达下述各命题：

(1) 他一边吃饭一边说话。

(2) 她不但在家是一位好母亲，在学校里也是一名优秀的教师。

(3) 我今天晚上去柏林看世界杯足球冠军争夺赛，同时我家里有 12 把椅子。

[解]

(1) 如果用字母 P 表示命题“他在吃饭”，而用字母 Q 表示命题“他在说话”，则原命题可以用合取式 $P \wedge Q$ 表示。

(2) 如果用字母 P 表示命题“她在家是一位好母亲”，用字母 Q 表示命题“她在学校是一位优秀的教师”，则原命题可以用合取式 $P \wedge Q$ 来表示。

(3) 如果用字母 P 表示命题“我今天晚上去柏林看世界杯足球冠军争夺赛。”，用字母 Q 表示命题“我家里有 12 把椅子。”，则原命题可以用合取式 $P \wedge Q$ 来表示。

[注] 由上面几个例子可以看出，合取这个联结词与人的自然语言中的“不但……，而且……”、“一边……，一边……”、“既……，又……”等说法相类似。不过它们之间还是有某种区别。在人类的自然语言中，上面提到的每一种与数理逻辑中的合取联结词相类似的说法中，所涉及的两部分命题在事实上常常是有某种逻辑上的关联性的，然而在数理逻辑的合取式中所涉及的两部分命题可以没有任何逻辑上的关联。例如，例 1-6 中的（3）就是一个这样的例子。在数理逻辑中写出这样的合取式没有任何不适当或令人奇怪之处，它是完全符合要求的一个合取式；然而，如果一个人在日常生活中说出像例 1-6 中（3）这样一个合取式来，是有可能被他人怀疑为由于有精神疾病而导致的不正常的语言行为。

[定义 1-5] （析取（用符号“$\vee$”表示））设 P 和 Q 是两个命题公式，则命题公式 $P \vee Q$（读作 P 与 Q 的析取）的真值可以用一句话来表达：当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时，$P \vee Q$ 的真值才为 F。或说成是：只要 P 和 Q 的真值中有一个是 T，则 $P \vee Q$ 的真值就必为 T。$P \vee Q$ 的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3 $P \vee Q$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

由定义 1-5 可以看出，关联词 $\vee$ 的作用与人类的自然语言中的词汇“或”、“要么……，要么……”、“不是……，就是……”等说法类似。然而，仔细分析自然语言会发现，自然语言中的“或”的含义较为丰富，且有多义性。请看下面几个例子。

[例 1-7]　分析下述命题中"或"的含义：

(1) 他今天晚上要么在家吃饭，要么在学校食堂吃饭。

(2) T27 次从北京西站开往拉萨的列车或者是早晨 9 点半开，或者是晚上 9 点半开。

(3) 他是奥运会的 100m 冠军，或者是奥运会的 200m 冠军。

[解]

(1) 由于他今天晚上只能在某一个地方吃晚饭，因而本句中的"或"应该是二者不可兼得的，也即俗称的"不可兼或"。

(2) 由于同一趟列车只能有一个唯一的发车时间，因而容易看出本句中的"或"与上一个例子中的"或"相同，即仍然是"不可兼或"。

(3) 对于一位优秀的短跑运动员来说，100m 和 200m 这两个项目往往是他们同时选择参加的短距离竞赛项目。为了充分发挥优秀运动员的潜质，给优秀运动员有更多展示自己才华的机会，奥运会的组织者通常都会有意识地将这两个短跑项目的比赛时间错开举行，以使任何一位希望同时参加这两个项目的运动员有机会选择同时参加这两项比赛。因而，对于一位特别优秀的短跑运动员而言，如果他选择参加这两项比赛的话，他完全有可能既获得 100m 冠军，同时也获得 200m 冠军。换言之，本例中的"或"是通常我们所说的"可兼或"。这与本例中前面两个例子中的"不可兼或"完全不同。

要注意的是，在数理逻辑中定义的析取联结词$\vee$是"可兼或"。

在例 1-7 的第三个例子中，如果用 P 表示命题"他是奥运会 100m 冠军"，而用 Q 表示命题"他是奥运会 200m 冠军"，那么该例中所说的命题就可以用析取式 $P\vee Q$ 来表达。

至于例 1-7 中前面两例中的不可兼或如何用数理逻辑的方法加以表达，讲完本节中的 5 个联结词后，这个问题就可以顺利得到解决。

[定义 1-6]　（条件（用符号"$\rightarrow$"表示，也称为单条件，或称为蕴含））设 P 和 Q 是两个命题公式，则命题公式 $P\rightarrow Q$（读作 P 条件 Q）的真值可以用一句话来表达：当且仅当 P 的真值为 T，而 Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值才为 F。$P\rightarrow Q$ 的真值表如表 1-4 所示。

表 1-4　$P\rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

条件式 $P\rightarrow Q$ 中的 P 称为前件（也称为前提或假设），而 Q 则称为后件（也称为结果或结论）。

[注]　当条件式的前件取真值 F 时，不论后件取何种真值，该条件式的真值都为 T。这在数理逻辑中称做"善意推定"。

[例 1-8]　试用数理逻辑符号表达下述各命题，并确定命题的真值：

(1) 如果我被选为总统，我将铲除一切腐败。

(2) 如果太阳从西边出，我就向你投降。

(3) 如果 $1+2=3$，那么 $2+2=6$（假设在十进制下考虑）。

[解]

(1) 用 P 表示命题“我被选为总统。”，用 Q 表示命题“我将铲除一切腐败。”，则原命题可用条件命题 $P \to Q$ 来表示。本例中条件命题 $P \to Q$ 的真值要视命题 P 和命题 Q 的真值才能最后确定。

(2) 用 P 表示命题“太阳从西边出。”，用 Q 表示命题“我向你投降。”，则原命题可用条件命题 $P \to Q$ 来表示。由于本例中作为条件命题的前件的命题 P 的真值为 F，从而不论后件 Q 的真值如何，该条件命题的真值均应为 T。

(3) 用 P 表示命题“$1+2=3$。”，用 Q 表示命题“$2+2=6$。”，则原命题可用条件命题 $P \to Q$ 来表示。在十进制下容易看出本例中命题 P 的真值为 T，命题 Q 的真值为 F，从而由定义知该条件命题的真值应为 F。

[注] 为了与国际国内的主流教科书的定义一致，联结词单条件在本书中也称为蕴含。但在有的教科书中，单条件与蕴含被定义成两个不同的概念，读者需要注意区分不同教材中有关概念之间的区别。

[定义 1-7] （双条件（用符号“$\rightleftarrows$”或“$\leftrightarrow$”表示，或用英文字符“iff”表示，也称为等价））设 P 和 Q 是两个命题公式，则命题公式 $P \rightleftarrows Q$（读作 P 双条件 Q）的真值可以用一句话来表达：当且仅当 P 与 Q 的真值相同时，$P \rightleftarrows Q$ 的真值才为 T。$P \rightleftarrows Q$ 的真值表如表 1-5 所示。

表 1-5 $P \rightleftarrows Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightleftarrows Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

[注] 也有的书上把双条件和等价定义成两个不同的概念，读者阅读不同的教材时需加以注意。

[例 1-9] 试用数理逻辑符号表达下述各命题，并对各命题的真值做出判断：

(1) 两个三角形相似的充分必要条件是它们的 3 个内角对应相等。

(2) 设 a 是一个非负整数，那么，当且仅当 a 是奇数时，a 的平方 a^2 被 4 除所得的余数才是 1。

(3) “$a>b$”，当且仅当“$a^2>b^2$”。

[解]

(1) 用 P 表示谬题“两个三角形相似。”，用 Q 表示命题“两个三角形的 3 个内角对应相等。”，则原命题可用双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 来表示。本笼中双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值必为 T，这是因为对于任意给定的两个三角形，命题 P 和命题 Q 必定取同样的真值，因而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值必为 T。

(2) 用 P 表示命题“a 是一个非负奇整数。”，用 Q 表示命题“a^2 被 4 除余 1。”，则原命题可用双条件命蹄 $P \rightleftarrows Q$ 来表示。本例中双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值也必为 T，这是因为

对于任意给定的非负整数 a，命题 P 和命题 Q 必定取同样的真值，因而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值必为 T。

(3) 用 P 表示命题“$a>b$”，用 Q 表示命题“$a^2>b^2$”，则原命题可用双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 来表示。本例中双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值并不是完全确定的，而要看对于具体给出的数 a 和 b 命题 P 和命题 Q 的真值才能确定。例如，若取 $a=3$，$b=2$，则容易看出命题 P 的真值为 T，而命题 Q 的真值也为 T，从而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 T；若取 $a=-2$，$b=-3$，则容易看出命题 P 的真值为 T，而命题 Q 的真值为 F，从而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 F；若取 $a=-3$，$b=2$，则容易看出命题 P 的真值为 F，而命题 Q 的真值为 T，从而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 F；若取 $a=2$，$b=3$，则容易看出命题 P 的真值为 F，而命题 Q 的真值也为 F，从而双条件命题 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 T。

当在一个复杂的命题公式中出现多个联结词时，需要约定一个秩序，以确保所给出的命题公式对于其中出现的所有命题变量的任何一组指定的真值都能有唯一确定的真值，这就是所谓的联结词运算的优先级。规定如下：

(1) 如果有括号，则括号中的联结词优先计算。

(2) 没有括号时，运算优先级从高到低的顺序是：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\rightleftarrows$。

(3) 同一联结词连续运算，且没有括号时，按照从左向右的次序依次计算。

[注] 在不改变原有运算顺序的条件下，为了使原来的运算次序显得更加清楚明确，可以适当增加若干括号对所述的运算次序予以强调，以免因疏忽产生错误。

[定义 1-8] （最小联结词组）一组联结词，如果用它们可以表达出所有其他的联结词，而从中去掉任何一个联结词后，至少有一个联结词不能用剩下的联结词组表出，则称该联结词组为最小联结词组，或称为全功能联结词组。

可以证明，对上面介绍的 5 个联结词有下面的结论成立。

[定理 1-1] （最小联结词组）$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$ 和 $\{\neg, \rightarrow\}$ 均为最小联结词组。

1.3 命题演算的合式公式、命题公式的真值表以及命题公式的翻译

本章中研究的主要对象是所谓的命题公式，说得更确切一些应是合法的命题公式，也即通常所定义的命题演算的合式公式。下面的定义在最大可能范围内给出了命题演算的合式公式的定义。

[定义 1-9] （命题演算的合式公式）满足如下诸条件的每个公式都是命题演算的合式公式：

(1)（合式公式的基础）每个字母所代表的命题变量或命题常量（T 或 F）都是合式公式，它们常称为原子命题。

(2)（合式公式的扩充）对合式公式正确使用括号和任何联结词所得到的命题公式也都是合式公式。

(3)（合式公式的限制）在每个合式公式中，所使用的原子命题的个数、括号的对数以及每种联结词的个数都只能各使用有限多次，这样得到的任何命题公式也都是命题演算的合

式公式。

［**定义 1-10**］ （简单命题和复合命题）不含任何联结词的命题称为简单命题（也称为原子命题），含有联结词的命题称为复合命题。

真值为“真”的命题常量通常用固定的字母“T”或数字“1”来表示；而真值为“假”的命题常量通常用固定的字母“F”或数字“0”来表示。

为了叙述简便起见，除非需要特别强调“合式公式”，以后在谈到命题演算的合式公式时，都简称其为命题公式或公式。一般来说，除非特别需要并加以说明，在本书中都只研究命题演算的合式公式。

［**定义 1-11**］ （真值表）给定一个命题公式（即刚才所定义的命题演算的合式公式，下同），其中除了某些有确定真值的命题常量之外，还可能含有有限多个命题变量。对于其中的所有命题变量的每一组指定的真值，都可以通过定义算出整个命题公式的唯一确定的真值，把所有可能情形下整个命题公式的一切可能取到的真值写成一张表，称为该命题公式的真值表。

［注］

① 在书写一个给定的命题公式的真值表时，设该公式中有 n 个命题变量，由于每个变量都有 T 和 F 这两种不同的取值，故整个命题公式的真值表应该恰有 2^n 行，也即该命题公式总共恰有 2^n 个可能的真值。

② 在书写一个命题公式的真值表时，要注意对其中出现的每个变量的可能取的真值按照某种有规律的顺序书写（详见后面的例子中的书写方法），以免造成重复或遗漏。此外，在所给出的命题公式较为复杂时，切记不要试图急于一次就将每种情形下原公式对应的真值写出，而应将原公式按照它的运算顺序分解成若干个较简单的子公式，逐步推进，直至最后写出原公式的真值表来。这也是避免产生错误的好方法。

③ 真值表有很多实际的应用，比如用真值表可以判断两个命题公式是否等价（注意，外表样子不同的两个公式未必一定不等价），更多的应用会在以后逐步介绍给读者。

［**例 1-10**］ 写出下述各命题公式的真值表：

(1) $P\rightarrow(Q\vee R)$。

命题公式 $P\rightarrow(Q\vee R)$中有 3 个命题变量，故它的真值表中应有 $2^3=8$ 行，如表1-6所示。

表 1-6 $P\rightarrow(Q\vee R)$的真值表

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\rightarrow(Q\vee R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

(2) $((P\rightarrow Q)\rightleftarrows(\neg Q\rightarrow\neg P))\wedge R$。

命题公式 $((P\rightarrow Q)\rightleftarrows(\neg Q\rightarrow\neg P))\wedge R$ 中同样有 3 个命题变量，故它的真值表中也应有 8 行，如表 1-7 所示。

表 1-7　$((P\rightarrow Q)\rightleftarrows(\neg Q\rightarrow\neg P))\wedge R$ 的真值表

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg P$	$P\rightarrow Q$	$\neg Q\rightarrow\neg P$	$(P\rightarrow Q)\rightleftarrows(\neg Q\rightarrow\neg P)$	原命题
T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	F
T	F	T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	F

问题：由表 1-7 给出的真值表能看出哪些结论？

如何将人类的自然语言所表述的某些内容用数理逻辑的符号表达出来，并根据数理逻辑的运算规则进行演算和推理，这也是数理逻辑应用的一个重要方面。反过来，也可以将数理逻辑的符号所表达的命题等用适当的自然语言表达出来。下面给出几个简单的具体例子。

［例 1-11］　将以下自然语言表达的命题公式用数理逻辑符号表达出来：

(1) 独立人格与自由思想既是一流大师的必备条件，也是一流大学的必备条件。

(2) 京剧如果能不断继承创新，那么它不但能受到人民群众的欢迎，而且它的生命力就是永恒的。

［解］　(1) 用字母 P 表示命题“独立人格与自由思想是一流大师的必备条件”，用字母 Q 表示命题“独立人格与自由思想是一流大学的必备条件”。则原命题可用符号 $P\wedge Q$ 来表示。

(2) 用字母 P 表示命题“京剧能不断继承创新”，用字母 Q 表示命题“京剧能受到人民群众的欢迎”，用字母 R 表示命题“京剧的生命力是永恒的”，那么原命题可以用符号表示为 $P\rightarrow(Q\wedge R)$。

1.4　重言式和矛盾式、等价的命题公式、命题公式的逻辑蕴含式

［定义 1-12］　（重言式）一个命题公式，如果对于它所含的原子命题变量的每一组真值，该命题的真值均为 T，则称它是一个重言式，或永真式。

［定义 1-13］　（矛盾式）一个命题公式，如果对于它所含的原子命题变量的每一组真值，该命题的真值均为 F，则称它是一个矛盾式，或永假式。

［定义 1-14］　（可满足式）一个命题公式，如果它所含的原子命题变量至少有一组真值能使得该命题的真值为 T，也即该命题公式不是矛盾式，就称它是可满足式。

［定义 1-15］　（等价的命题公式）如果两个命题公式 A 和 B 在其中所含的命题变量的任一组取定的真值下都有完全相同的真值（即它们的真值表完全相同），则称它们是等价的

命题公式，记为 $A \Leftrightarrow B$（或记为 $A \equiv B$）。显然，等价的命题公式可以看成是本质上完全相同的公式，且可以互相替代使用。

［例 1-12］　研究下面几组命题公式的等价性：

(1) $P \rightarrow Q$ 和 $\neg P \vee Q$。

(2) $P \rightleftarrows Q$ 和 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$。

(3) $P \rightleftarrows Q$ 和 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$。

(4) $\neg(P \wedge Q)$ 和 $\neg P \wedge \neg Q$。

(5) $\neg(P \vee Q)$ 和 $\neg P \wedge \neg Q$。

［解］　对本例的（1）有如表1-8所示的真值表。

表 1-8　$P \rightarrow Q$ 和 $\neg P \vee Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

由表 1-8 容易看出，给定的两个命题公式等价。

对本例的（2）有如表 1-9 所示的真值表。

表 1-9　$P \leftrightarrows Q$ 和 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \rightleftarrows Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

由表 1-9 容易看出，给定的两个命题公式等价。

对本例的（4）有如表 1-10 所示的真值表。

表 1-10　$\neg P \vee \neg Q$ 和 $\neg(P \wedge Q)$ 的真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

由表 1-10 容易看出，给定的两个命题公式等价。

对本例的（3）和（5）的证明与以上方法类似，留给读者作为一个练习。其中的等价公式

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

称为（命题演算的）德·摩根（De Morgan）公式。

表 1-11 中列出了命题演算中常用的一些等价公式，这些公式都可以用真值表来加以证明。