产品质量抽样检验

程序与实施

袁建国 秦士嘉 周宏斌 编著

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

产品质量抽样检验程序与实施

袁建国　秦士嘉　周宏斌　编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

产品质量抽样检验程序与实施/袁建国等编著.—北京:中国计量出版社,2004.5
ISBN 7-5026-1939-9

Ⅰ.产…　Ⅱ.袁…　Ⅲ.产品质量—质量检验—抽样调查　Ⅳ.F273.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第024691号

内 容 提 要

本书针对产品质量检验工作的需要,以现行的有关抽样检验方法和程序的国家标准为主线,详细介绍了计数抽样检验、计量抽样检验、散料抽样检验、可靠性抽样检验和监督抽样检验的原理、方法、程序及实施,同时还采用大量实例演示了上述各种标准的抽样检验程序及实施。

本书着眼于提高读者正确、有效地理解有关抽样检验标准的能力,具有实用性强、重点突出的特点,适用于高等院校管理工程、工业工程、质量管理、应用统计和商品检验专业的教学。也适合产品验收、商品检验和质量监督人员学习参考。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲2号
邮政编码　100013
电话 (010)64275360
E-mail　jlfxb@263.net.cn
北京市迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
787 mm×1092 mm　16开本　印张12.25　字数293千字
2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷
*
印数1—3 000　**定价:28.00元**

前　言

在高度关注质量的今天，抽样检验技术的作用日趋重要，其应用也越来越广泛。随着现代科技的高速发展，各种高精度的现代分析仪器层出不穷，分析误差和灵敏度都达到了一个较高的水平，但是如果抽样技术仍处于一个落后水平，那么再好的样品分析结果也将起不到其应有的作用。一般样品分析的误差只要达到抽样误差的 1/5 就可以了，过高的分析误差相对客观存在的抽样误差而言就是一种浪费，反过来讲抽样是能否准确地检验和判断一个批的可接收性的关键。

本书针对产品质量抽样检验工作的实际需要，以现行颁布的有关抽样检验方法和程序的国家标准为主线，分别介绍了计数抽样检验、计量抽样检验、散料抽样检验、可靠性抽样检验和监督抽样检验的原理、方法、程序及实施，用通俗易懂的语言描述了较为复杂的数理统计理论，用大量的实例演示了各有关标准的抽样检验程序及实施。本书还追踪国际标准化组织（ISO）的最新成果，将近年来 ISO 有关抽样检验的最新成果在本书中作了介绍。本书最后一章还针对抽样检验数据的浪费，专门介绍经过抽样检验后获得的数据的处理。本书着眼于提高读者正确、充分、有效地应用和理解有关抽样检验标准的能力，具有实用性强、面广、易懂、重点突出的特点。本书适用于高等院校管理工程、工业工程、质量管理、应用统计、商检等相关专业的教学，以及从事有关产品验收、商品检验及质量监督的在职人员自学和参考之用。

本书由袁建国、秦士嘉、周宏斌编著，中国对外经贸大学佟海山教授审定。各章分工如下：第一章、第二章、第四章、第六章由袁建国、周宏斌执笔，第三章、第五章、第七章由秦士嘉执笔。由于时间仓促和水平有限，难免有不当之处，请读者提出批评、指教。

编　者

2003 年 12 月 10 日

目　　录

第一章　概　　述

1.1　基本概念

在抽样检验中，我们经常会用到总体、批、单位产品、样品和样本等基本概念。所谓总体，是指所检验的产品或原材料的全体。一批产品，某工序在一段时间内生产的产品的全体等，都可以叫做一个总体。抽样检验则是从产品总体中按照某个（或某些）事先规定好的抽样方案，随机抽取有限数量的单位产品或者有限数量的材料，对总体作出某种统计判断。下面介绍的是在抽样检验中常用的基本概念、术语及符号。

1. 单位产品(item; unit)

单位产品指为了实施抽样检验或试验并能获得观测值的基本单位，以决定该基本单位是合格品还是不合格品（参见第(3)条），或者计算它的不合格项数或缺陷（参见第(3)条）数。

例如：单件产品，一组产品，一定长度，一定面积，一定体积，一张库存记录卡，一段磁带，都可以作为单位产品。它与采购、供应、生产、销售和运输中所用的单位产品可以相同，也可以不相同。

单位产品往往与质量的“保证单位”相一致。

2. 检验批[inspection lot(batch)]

检验批指为实施抽样检验而汇集起来的在一致条件下生产的一定数量的单位产品，用以从中抽取样本进行检验，以确定是否接收或拒收（参见第(11)条）。又称交验批、提交批或验收批。本书简称为批。

所谓一致条件（有时称为同质性条件）是指：同一生产过程，相同的生产条件和相近的一段生产时间。

批中包含的单位产品数量称为批量(lot size)，常用符号 N 表示。

批分连续批和孤立批两大类。

批与批之间质量关系密切（待检批可利用最近已检批提供的质量信息）的连续提交检验的系列批，称为连续批(continuing series of lots)。在同一生产过程中连续生产的一系列批，只要产品的设计、结构、工艺、主要原材料、制造场所等基本相同，在某一规定时期内连续生产的一系列批，一般来说可视为连续批。显然，连续批中各批，应来自同一生产方，并且抽样次序与生产次序相对应。

不能定为连续批的批统称为孤立批。例如，单个批(unique lot)，脱离连续批序列或当前检验批序列的批(isolated lot)，孤立序列批(isolated sequence of lots)。一系列质量信息互相独立的连续提交的批也是孤立批。

3. 不合格与不合格品[nonconformity and nonconforming item(unit)]

不合格与不合格品指单位产品的质量特性不符合规范要求。为顺口,常把不合格称为不合格项。不合格是与图纸、标准所规定的要求相比,这些规定要求与使用者的使用要求可能一致,也可能不一致。缺陷(defect)是指质量特性不满足预定使用要求。所以"不合格"与"缺陷"事实上是两个不同的术语。在国内,由于受以前教科书与习惯叫法的影响,往往把它俩看成是一个术语,即把不合格项称为缺陷。早期制定的标准中凡提到"缺陷"的地方均是指"不合格"。

一个或多个质量特性不合格的单位产品称为不合格品。

一般按质量特性的重要性,或不合格的严重程度,对不合格项进行分类。不同类别的不合格项具有等级不同的重要性,同一类别中的所有不合格项,大致有相同的重要性等级。一般将不合格项分为 A、B、C 三大类别。A 类最严重,其次是 B 类,C 类为最不严重。有时附加一类致命不合格类别。所谓致命不合格项是指对使用、维护、运输、保管和信赖产品的人可能造成危害或不安全的不合格项。对致命不合格项的检验,一般采用全检。由于致命不合格特别严重,在任何检验过程中,只要一发现,就立即判该批拒收。

相应的,不合格品也分为 A、B、C 三个类别。这里有两种分类方法。一种是按不合格品上出现的最严重不合格项对其进行分类。例如:某个单位产品上有 A 类不合格项,同时又有 B 类或/和 C 类不合格项,则把此单位产品划为 A 类不合格品。第二种是按不合格品上出现的不合格项对其分类。例如:某个单位产品上有 B 类不合格项,同时又有 C 类不合格项,则把此单位产品看成为一个 B 类不合格品,同时又是一个 C 类不合格品。

4. 不合格(项)率(proportion of nonconformities)

不合格(项)率指总体中不合格项数目除以总体中单位产品总数:

$$\text{不合格(项)率} = \frac{\text{总体中不合格项数}}{\text{总体中单位产品总数}}(100\%)$$

常用百分数表示。在抽检方法标准中常用每百单位产品不合格(项)数[nonconformities per hundred items(units)],它是不合格(项)率的 100 倍。

当总体为批时,即是批不合格(项)率,当总体是过程时,即是过程不合格(项)率或称过程平均不合格(项)率。

5. 不合格品率[proportion of nonconforming items(units)]

不合格品率指总体中不合格品数目除以总体中单位产品总数:

$$\text{不合格(品)率} = \frac{\text{总体中不合格品数}}{\text{总体中单位产品总数}}(100\%)$$

常用百分数表示。在抽检方法标准中,常用每百单位产品不合格品数[nonconforming items (units) per hundred items(units)],它是不合格品率的 100 倍。

与不合格(项)率一样,不合格品率也分为批不合格品率和过程不合格品率或过程平均不合格品率。

不合格(项)率和不合格品率常用符号 p 表示。

6. 过程平均(process average)

过程平均指一系列初次检验批的平均质量水平。初次检验是指对批的第一次检验，不包括第一次检验判为拒收，返工后再次提交所进行的检验。

过程平均是度量生产过程质量水平的一个指标。是作为稳定生产条件下一系列交验批的平均质量水平。它可由一定时期内各检验批的抽检结果加以估计，一般不少于10批，特殊情况下5批也可以。

7. 样本(sample)

样本以抽样为目的，从批中或过程中随机抽取供检验用的单位产品。依据样本的检验结果可对批或过程作出是否接收的判断。

样本中包含的单位产品数，称为样本量或样本大小(sample size)，常用符号 n 表示。样本中的单位产品称为样品或样本单位(sample unit)。

8. 计数抽样检验(sampling inspection by attributes)

计数抽样检验指在判断一批产品是否可接收时，只计算样本中不合格数或不合格品数的抽检方法。

计数抽样检验比较简便，常用目测，极限量规“过，不过”的测量方法，计算工作量少，检验的管理工作比较简单，而且能把多种质量特性作为一个整体规定一个质量标准。

9. 计量抽样检验(sampling inspection by variables)

计量抽样检验指在判断一批产品是否可接收时，对样本中的每个样品进行计量检测(用连续尺度测量方法)的抽检方法。与计数抽检相比，计量抽检能提供更多、更详细的产品质量信息，因此，所需样本量比计数抽检少。但它需要假定质量特性服从某种分布律，如正态分布、指数分布等。也不能把多种计量特性合并起来规定一个质量标准。

当给出了单位产品某个计量特性合格和不合格的规格限时，可把计量抽检转变为计数抽检。

10. 抽样方案(sampling plan)

抽样方案指为决定样本量和判断批能否接收而规定的一组规则。

如计数一次抽检，由样本量 n、接收数 A 和拒收数 R 组成一个抽样方案。接收数(acceptance number)是指接收批样本中允许的不合格项或不合格品最大数目。拒收数(rejection number; non—acceptance number)是指拒收批样本中不合格项或不合格品最小数目。如计量抽检，一般由样本量 n，接收常数 k 组成一个抽样方案。接收常数(acceptance constant)是指判断批接收与否的(连续度量)常数。

与使用的抽样方案有关的抽检要求和(或)抽检规程，称为抽样程序(sampling procedure)。有时把抽取样本和制备样本的程序也叫抽样程序。

11. 批的接收与拒收(acceptance and rejection of lot)

批的接收与拒收指由样本中获得的信息以判断批是否满足抽样方案规定的接收准则，满

足接收准则的称接收该批,否则称拒收(或不接收)该批。

习惯上,常称“接收该批”为“判该批合格”,“拒收该批”为“判该批不合格”。

12. 接收概率(probability of acceptance)

接收概率指批或过程质量水平为一定值时,使用一定抽样方案验收时接收该批或单位产品的概率。拒收该批或单位产品的概率称为拒收概率。接收概率用代号 P_a 表示。

以质量水平为横坐标,P_a 为纵坐标画出的曲线,称为抽检特性曲线或抽查特性曲线,简称 OC 曲线(operating characteristic curve;OC curve)。OC 曲线有三类:

A 类:对于给定的抽样方案,表示批接收概率与批质量水平函数关系的曲线。

B 类:对于给定的抽样方案,表示批接收概率与过程质量水平函数关系的曲线。

C 类:对于给定的抽样方案,表示单位产品接收概率与过程质量水平函数关系的曲线。

13. 生产方风险质量水平(producer's risk quality level;PQL)

生产方风险质量水平指多数批或大部分时间被抽样方案接收的一个质量水平。生产方是指提供检验批供抽检的单位、组织或个人,有时称供货方。

14. 使用方风险质量水平(consumer's risk quality level;CQL)

使用方风险质量水平指多数批或大部分时间被抽样方案拒收的一个质量水平。使用方是指接收检验批的单位、组织或个人,有时称购货方。CQL 有时称为极限质量水平(limiting quality level;LQL)。

15. 生产方风险(producer's risk)

生产方风险指具有 PQL 质量的产品被抽样方案拒收的概率。用符号 α 表示。

16. 使用方风险(consumer's risk)

使用方风险指具有 CQL 质量的产品被抽样方案接收的概率。用符号 β 表示。

17. 鉴别比(discrimination ratio)

鉴别比指对应接收概率为 10% 的质量水平与对应接收概率为 95% 的质量水平之比,用代号 OR 表示。也有用连接 OC 曲线上点(PQL,$1-\alpha$)与点(CQL,β)直线的斜率来定义。

18. 中位质量水平(indifference quality level;IQL)

中位质量水平指对应接收概率和拒收概率都为 50% 的质量水平。中位质量水平也称为无区别质量水平。

19. 可接收质量水平(acceptable quality level;AQL)

可接收质量水平指为了进行抽样验收,作为过程平均认为可接收的批中不符合规范要求的单位产品的最大比例。具有 AQL 质量的产品被拒收的概率就是生产方风险 α。AQL 也称为合格质量水平。

20. 平均检出质量(average outgoing quality;AOQ)

平均检出质量指对一定质量的产品,用某一抽样方案抽样检验后,检出产品的平均质量水平,它包含所有的接收批和拒收批,对拒收批,经过有效地 100% 筛选,并用合格品替换发现的不合格品。

21. 平均检出质量上限(average outgoing quality limit;AOQL)

平均检出质量上限指在产品质量水平整个变化范围内,AOQ 的最大值。

22. 平均抽样个数(average sample number;ASN)

平均抽样个数指使用一定抽样方案作出接收或拒收判断时,平均每批要检验的样品数。也称平均样本量(average sample size)。

23. 平均总检验量(average total inspected;ATI)

平均总检验量指根据接收批样本量和拒收批的所有产品计算出的平均每批要检验的单位产品数。ATI 也可称为平均检验总数。

24. 标准型抽样检验(sampling inspection having desired operating characteristics)

标准型抽样检验指具有所需要的 OC 曲线(抽检特性)的抽样检验。

25. 挑选型抽样检验(rectification sampling inspection)

挑选型抽样检验指对判为拒收的批必须进行 100% 检验的抽样检验。也称为剔换型抽样检验。

26. 调整型抽样检验(adjustment sampling inspection)

调整型抽样检验指对连续批,依过去的检验结果来调整抽样检验严格度(severity of sampling)的抽样检验。所谓严格度是指检验批所接受检验的严格程度。

27. 逐批检验(lot—by—lot inspection)

逐批检验指为判断提交的一系列批中的每一批能否接收,对每一批都进行检验。

28. 周期检验(periodic inspection)

周期检验指在规定的周期内,从逐批检验接收的某个批或若干批中抽取样本的检验。

1.2 基础知识

1.2.1 概率论基本知识

概率论是数理统计的重要数学基础。考虑到大多数读者已具备概率论方面的基础知识,

本节简要介绍概率论的一些基本概念、定义、定理和公式，以供回顾复习之用。

1. 事件

概率论研究的对象是事件。事件可分为不可能事件(用 V 表示)，必然事件(用 U 表示)，及随机事件。在一次试验后，可能发生也可能不发生的事件即是随机事件。

事件 A 与 B 至少发生一个所构成的事件，称为 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。和事件运算可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

事件 A 与 B 都发生所构成的事件，称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB。积事件运算可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

若 AB = V，即事件 A 与 B 不可能同时发生，则称 A 与 B 互不相容。

称“A 不发生”的事件为事件 A 的对立事件，记作 $\bar{A}$。

2. 概率的定义和性质

事件 A 发生可能性的大小用概率 $P(A)$表示。

概率的统计定义：

在同一条件下进行 n 次重复试验，其中事件 A 发生了 m 次，称 $R(A)=m/n$ 为事件 A 发生的频率。当 n 增大时，$R(A)$的稳定值 p 称为事件 A 的概率，即

$$p=p(A)$$

概率的古典定义：

随机试验只可能出现有限的 N 种基本结果，此 N 种基本结果两两不相容，且在一次试验中必定发生其中之一；在一次随机试验中，各个基本结果发生的可能性相等。如果事件 A 包含 M 种基本结果，则称

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

为事件 A 的概率。

概率有如下性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(U)=1, P(V)=0$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(4) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

(5)若事件 A 发生必有事件 B 发生，即 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$;

(6) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)。$$

3. 条件概率与独立性

定义　若 $P(B)>0$，则称在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率为事件 A 对事件 B 的条件概率，记作 $P(A|B)$。

条件概率公式是

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{B})} \quad (P(\mathrm{B})>0)$$

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{A})} \quad (P(\mathrm{A})>0)$$

即

$$P(\mathrm{AB})=P(\mathrm{B})P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \tag{1-1}$$

(1 - 1)式是概率乘法公式。

全概率公式　若事件 $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\cdots,\mathrm{B}_n$ 两两不相容,并且在一次试验中必定发生其中之一,且

$$P(\mathrm{B}_i)>0(i=1,2,\ \cdots,n)$$

则

$$P(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n}P(\mathrm{B}_i)P(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}_i) \tag{1-2}$$

贝叶斯(Bayes)公式在(1 - 2)条件下,再另加条件 $P(\mathrm{A})>0$,则

$$P(\mathrm{B}_i\mid\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{B}_i)P(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(\mathrm{B}_j)P(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}_j)} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1-3}$$

(1 - 3)式中,称 $P(\mathrm{B}_i)$为先验概率,$P(\mathrm{B}_i|\mathrm{A})$为后验概率。

定义 若 $P(\mathrm{AB})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$,则称事件 A 与 B 相互独立或独立。

若 $P(\mathrm{A})>0,P(\mathrm{B})>0$,则称事件 A 与 B 独立的充要条件是

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\text{或 }P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=P(\mathrm{B})$$

即事件 A 与 B 独立表示 A 发生的可能性不依赖 B 的发生;B 发生的可能性也不依赖于 A 的发生。通常说 A 与 B 的发生互不影响。

在一定条件下进行 n 次独立重复试验,每次试验只有两种可能结果:

A 与 $\bar{\mathrm{A}}$,记 $P(\mathrm{A})=p,p(\bar{\mathrm{A}}),1-p=q(0<p<1)$

那么 n 次试验事件 A 发生 k $(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$P_n(k)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}p^kq^{n-k},k=0,1,\cdots,n \tag{1-4}$$

称(1 - 4)式为贝努里概率。

4. 随机变量及其概率分布

表示随机试验结果的量称为随机变量。

定义 设 X 为一随机变量,对任一实数 x,令

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}$$

则称 $F(x)$是 X 的分布函数。

显然

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$$

$$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$$

若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$

定义 若随机变量 X 所有可能取的值是有限多个或可列无限多个,则称 X 为离散型随机变

量。

称

$$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots, \sum_i p_i = 1$$

为 X 的分布列。

定义 若随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $f(t) \geqslant 0$,则称 X 为连续型随机变量,并称 $f(x)$ 是 X 的分布密度。

显然,在 $f(x)$ 的连续点有

$$F'(x) = f(x)$$

另外有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

一些常见的概率分布有:

二项分布 分布列为

$$p_i = P\{X = i\} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} p^i (1-p)^{n-i} \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

$n = 1$,称为二点分布。

泊松分布 分布列为

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad (i = 0,1,\cdots), \lambda > 0$$

超几何分布 分布列为

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\begin{bmatrix} N-D \\ n-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}}, \quad i = 1,\cdots,n$$

均匀分布 分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b & (a < b) \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

正态分布 分布密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad \sigma > 0$$

正态分布记作 $N(\mu,\sigma^2)$。$N(0,1)$ 称为标准正态分布,其分布函数记为 $\Phi(x)$。

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$(即随机变量 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布),则

$$F(x) = \Phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \Phi\left[\frac{b-\mu}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{a-\mu}{\sigma}\right]$$

设 C 与 Y 独立,且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

5. 随机变量的矩

定义 设 n 是自然数,则称

$$a_n = E(X^n) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x \\ \sum_i x_i^n p_i \end{cases}$$

为随机变量 X 的 n 阶原点矩。

一阶原点矩 $E(X)$ 称为 X 的数学期望,它表示多次试验的理论平均值,也是概率分布的中心。

定义 设 n 是自然数,则称

$$\mu_n = E[(X - E(X))^n] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^n f(x)\mathrm{d}x \\ \sum_i (x_i - E(X))^n p_i \end{cases}$$

为随机变量 X 的 n 阶中心矩。

二阶中心矩($n = 2$)称为 X 的方差,记为 $D(X)$。

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

称 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差。

随机变量的方差和标准差表示概率分布对数学期望的分散程度,方差也表示多次试验的试验值对数学期望的平均平方偏差。

$E(X)$ 和 $D(X)$ 是 X 的两个重要的数字特征。

对于二项分布,$E(X) = np, D(X) = np(1-p)$。对于泊松分布 $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$。对于均匀分布,$E(X) = (a+b)/2, D(X) = (b-a)^2/12$。对于正态分布,$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$。

下面给出数学期望和方差的某些性质:

设 a 和 b 为常数,则

$E(a) = a$;

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$;

若 X 与 Y 独立,则 $E(XY) = E(X)E(Y)$;

设 $Y = g(X)$,则 $E(Y) = E(g(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x \\ \sum_i g(x_i)p_i \end{cases}$

设 X 与 Y 独立,则 $D(aX + bY) = a^2D(X) + b^2D(Y)$

$D(a) = 0$;

$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$,其中

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

上式称为 X 与 Y 的协方差。

定义 称

$$\rho_{X,U} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{[D(X)D(Y)]^{\frac{1}{2}}}$$

为 X 与 Y 的相关系数。

$|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$；$|\rho_{X,Y}| = 1$ 的充要条件是 X 与 Y 有线性关系的概率为 1。相关系数表示为 X 与 Y 的线性联系密切程度。若 $\rho_{X,Y} = 0$，则称 X 与 Y 不相关。若 X 与 Y 独立，则必有 X 与 Y 不相关，但反过来不一定成立。显然，若 X 与 Y 不相关，则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$。

6. 大数定律与中心极限定理

贝努里大数定律　设 n 次独立重复试验事件 A 发生 m 次，且每次试验 A 发生的概率是 p，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} p\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1 \tag{1-5}$$

(1－5)式说明，可用大量试验事件 A 发生的频率来近似每次试验 A 发生的概率。

切比雪夫大数定律　设独立随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中的数学期望为 $E(X_i)$，且方差 $D(X_i)$ 有界，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} p\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \right| < \varepsilon \right\} = 1 \tag{1-6}$$

特别，当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = \mu$，$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = \sigma^2 < \infty$，则(1－6)式为

$$\lim_{n \to \infty} p\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1 \tag{1-7}$$

切比雪夫大数定律的(1－7)式说明可用大量试验随机变量的试验平均值来近似数学期望。

中心极限定理　设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2 > 0 (i = 1, 2, \cdots)$，则对任意 x 有

$$\lim_{n \to \infty} p\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x) \tag{1-8}$$

(1－8)式表明，当 n 很大时，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$。特别地，当 n 很大时，n 次贝努里试验事件 A 发生次数近似服从 $N(np, np(1-p))$。

1.2.2　数理统计基本知识

本节介绍数理统计中一些基本术语、基本概念，以及一些重要的统计量分布—抽样分布和参数点估计、区间估计及假设检验等内容。

1. 总体、个体和样本

研究对象的全体元素组成的集合，称为总体或母体。组成总体的每个元素称为个体。个

体的划分主要便于统计研究。

总体不能只看作是逐一列举而规定的大量事物,更应该把它看作是由某个特性决定的一个集合。而这个特性能区分属于或不属于这个集合的事物。因此,总体具有完整性的内涵。

当总体内所含个体个数有限时,称有限总体;个体个数无限时,称无限总体。

来自总体的部分个体的集合,称为样本或子样,样本中的每个个体称为样品。获得样本的过程,称为抽样。样品个数称为样本量或样本大小或样本容量。

通过样本得出有关总体的结论,是数理统计的任务,而得出结论的好坏,取决于样本的性质、样本量及样本是如何得来的。

抽样的原则是,所取得的样本尽可能地代表总体,充分反映总体的信息。在商品抽样检验中,采用的抽样方法大多是简单随机抽样法。

对于大小为 N 的有限总体,从中抽取容量为 n 的样本,如果使得 $\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}$ 个不同的样本每一个被抽中的机会都相等,这种抽样方法就是简单随机抽样法。对于无限总体,设 X 是我们要研究的总体的特征,则总体中的每一个个体都有相应的特征,如果我们独立地观测总体中的 n 个个体,得到相应的特征 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,则称这 n 次独立的观测为简单随机抽样,所得的样本为简单随机样本。简单随机样本的特征是:样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$中各个体独立同分布,且每一随机变量的概率分布是总体分布。在本书中,除特别指出外,样本都是指简单随机样本。

在有限总体情况,当 $n/N \leqslant 0.05$ 时,无返回抽样(每取一个样品检查后不再放回总体中)获得的随机样本,实用上可把它看作为简单随机样本。

样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是 n 维随机变量,这是对具体进行一次抽样前而言。在抽样后获得它的一组观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,称为样本值。为方便,本书把样本和样本值统称为样本。

设总体 X 的分布函数为 $F(X)$,则样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率分布函数为

$$F_n(x_1, \cdots, x_n) = F(x_1) \cdots F(x_n)$$

2. 统计量与抽样分布

样本是进行统计分析和统计推断的依据,在处理具体理论和应用问题时,常常对样本进行必要的加工处理。

定义　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个连续函数,如果 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$中不包含任何未知参数,则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量。统计量是随机变量,它的概率分布称为抽样分布。

下述这些样本数字特征都是统计量:

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

样本方差 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 或 $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

样本 k 阶原点矩 $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2\cdots$

样本 k 阶中心矩 $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2\cdots$