首席教师

专题小课本

- 小方法大**智慧**
- 小技巧大**成效**
- 小单元大**提升**
- 小课本大**讲坛**

高中数学 不等式

总主编/钟 山

金星教育

中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

图书在版编目（CIP）数据

首席教师专题小课本. 高中数学. 不等式 / 钟山主编.
北京：现代教育出版社，2008.4
ISBN 978－7－80196－663－6

Ⅰ.首… Ⅱ.钟… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

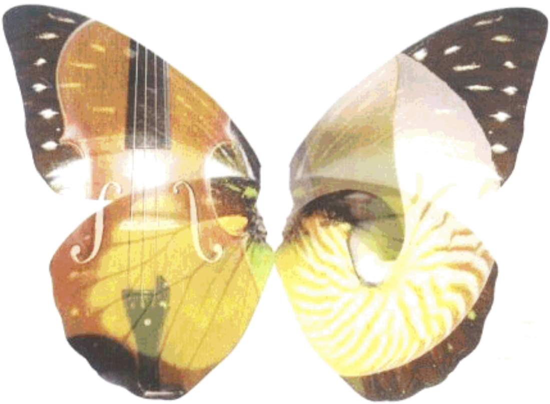
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038432 号

书　　名： 首席教师专题小课本·高中数学—不等式
出版发行： 现代教育出版社
地　　址： 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码： 100011
印　　刷： 北京市梦宇印务有限公司印刷
发行热线： 010－61743009
开　　本： 890×1240　1/32
印　　张： 7.25
字　　数： 310 千字
印　　次： 2008 年 4 月第 1 版　第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978－7－80196－663－6
定　　价： 12.80 元

⑫

您需要的不是机会

NINXUYAODEBUSHIJIHUI



而是变换支点

小单元——知识·方法·能力·命题的交汇处

小单元——高效学习·成功备考的新支点

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、高考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法

首席教师

专题小课本

高中数学

不等式

总 主 编：钟 山

本册主编：曹贤波

本丛书成立答疑解惑工作委员会，如有疑难问题可通过以下方式与我们联系：

企业网站：

http://www.bjjxsy.com

产品网站：

http://www.swtnet.net

服务电话：010-61743009

010-61767818

电子邮箱：

book@bjjxsy.com

service@swtnet.net

通信地址：北京市天通苑邮局6503号信箱

邮政编码：102218

专题三级提升

思维方法攻略

高考热点突破

专题速记图解

专题提升

高考热点导航

高考零距离检测

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

高考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析高考对知识内容的具体要求配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从高考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的高考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现高考备考同步化，科学阐释了零距离高考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选高考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华到大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

发现依靠眼光　行动决定收获

前言 QIANYAN

近年来，我国的基础教育改革和素质教育进程已进入深化实施阶段，中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局，高考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学考的新趋势、新特色，我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果，精心构思，编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力，主要体现在以下四个方面：

1．核心单元，提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比，是更高层次的提升性学习，是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点，弥补了同步教学的缺失和薄弱环节，单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序，层次鲜明，通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练，有效的为师生最大限度提升成绩，建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2．螺旋提升，提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度，再加上平时的课时学习、讲练结合、循序渐进、螺旋提升，构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3．突出方法，多维度培养能力

无论是疑难讲解，问题解决，还是应试与训练，均以方法归纳、提炼与运用为突破口，力求做到集“学习法、解题法、应试法、训练法”于一身，帮助学生高效构建知识体系和方法体系，使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法，发掘自己的最大学习潜能。

4．汲取各版本精华，真正的专题教材

在编写过程中，充分汲取各版本教材的特色与精华，选取其中典型素材、典题典例、方法技巧，以师生完成同步教材的课时学习为基础，通过整合、深化、发散、分级，达到高考要求，既是学生完成提升性学习的专题教材，更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说：给我一个支点，我将撬起地球。本套丛书必将成为您成功的新支点、发展的新平台。

目录

首席寄语 …… (1)

单元提升篇 …… (3)

第一章 不等式的性质及解法 …… (3)

第一单元 不等式的性质及其应用 …… (3)

第二单元 有理不等式的解法 …… (17)

第三单元 指、对不等式及无理不等式解法 …… (38)

章末综合提升 …… (54)

方法·技巧·策略

作差法(6)/作商法(6)/分子(分母)有理化(7)/一元二次不等式的解法(17)/简单的高次不等式及分式不等式的解法(17)/绝对值不等式(17)/绝对值不等式的几何意义(17)/掌握不等式并注意等号成立的条件(18)/数轴标根法(22)/零点分段讨论法(23)/图解法(23)/绝对值不等式的解法综述(34)/公式法(34)/分类讨论法(35)/双绝对值不等式问题的解法(36)/区间讨论法(36)/调整视角法(37)/两边平方法(37)/用构造法解不等式(53)/构造图(53)/构造斜率(53)/含参数不等式的解法(54)/一元二次方程根的分布问题(56)/有理不等式及绝对值不等式解法(59)/含参数的一元二次不等式的解法(60)/无理及指、对不等式解法(62)/不等式在集合、函数等部分的综合应用(62)/利用函数思想处理不等式问题(70)/绝对值外含参数不含 x 的绝对值不等式(71)/绝对值外含参数又含 x 的绝对值不等式(71)

第二章 不等式的应用及证明 …… (72)

第一单元 不等式的性质及性质的应用 …… (73)

第二单元 基本不等式 …… (99)

第三单元 不等式的证明 …… (120)

第四单元 不等式的应用 …… (153)

章末综合提升 …… (172)

方法·技巧·策略

二元一次不等式(组)(73)/二元一次不等式(组)表示的平面区域(73)/线性规划问题(74)/线性规划问题的步骤:画、移、求(74)/妙用线性规划的两个结论(95)/判别一元二次不等式(组)表示的平面区域(96)/求可行域的面积(97)/求目标函数的最优解(97)/求目标函数的取值范围(98)/线性规划的实际应用问题(98)/均值不等式中符号的制约(118)/比较法(123)/综合法(124)/分析法(126)/反证法(127)/换元法(127)/放缩法(128)/判别式法(129)/数学归纳法(129)/导数法(130)/用构造法证明不等式(150)/构造几何模型(151)/构造向量模型(151)/巧用不等式知识(171)/恒成立问题(172)/分离参数法(172)/

变更主元法(173)/一次型及二次型(174)/一次型(174)/二次型(175)/数形结合法(175)/特值猜想归纳法(176)/判别式法(177)/条件极值问题(177)/代入法(178)/凑用不等式法(178)/数形结合法(178)/恒成立问题的转化策略(189)/直接转化(189)/分离变量转化(190)/转化为方程根的分布问题(190)

专题提升篇 …… (191)

第一单元 专题思想方法 …… (191)

方法·技巧·策略

对数不等式问题(192)/解含参一元二次不等式(194)/解含参指、对不等式(195)/解含参无理不等式(196)/恒成立问题(196)

第二单元 专题高考热点 …… (214)

方法·技巧·策略

解不等式(214)/不等式的证明(215)/不等式的综合应用(217)/线性规划(219)/不等式的证明及综合应用指南(225)

首席寄语

专题导引

本专题内容主要包括不等式的性质及解法，不等式的证明及应用两大部分.

不等式的性质及解法主要讲解不等式的性质及其综合运用，解法部分主要讲解常见一元二次不等式的解法，如恒成立问题及常见分式、高次不等式的解法. 另外，讲解与函数部分密切相关的指数、对数不等式及无理不等式的解法以及绝对值不等式的解法.

不等式的证明及应用部分主要讲解数学归纳法、综合法、分析法、反证法等常见不等式的证明方法与技巧.

另外，本书还从总体角度讲解了学习不等式的常见思想方法及高考热点问题.

高考命题规律

不等式是中学数学的重点内容之一，不等式具有变通灵活、应用广泛、知识综合、能力复合等特点，它可以渗透到中学数学很多章节，又是学习高等数学的基础和重要工具，所以它一直是高考考查的重点和热点内容.

本章的主要内容是不等式的性质、证明和解法以及不等式的应用.

在高考试题中，不等式的内容命题的特点和趋势是：

1. 重视对基础知识的考查，重点考查四种题型：①解不等式；②证明不等式；③涉及不等式的应用题；④涉及不等式的综合题. 所占比例远远高于在课时和知识点中的比例，重视基础知识的考查，常考常新，创新不断. 图表信息题、多选型填空题等情境新颖的题型受到命题者的青睐，值得引起我们的关注.

2. 突出重点，综合考查在知识与方法的交汇点处设计命题，在不等式问题中蕴含着丰富的函数思想，不等式又为研究函数提供了重要工具，不等式与函数既是知识的结合点，又是数学知识与数学方法的交汇点，因而在历年的高考题中始终是重中之重，在全面考查函数与不等式基础知识的同时，将不等式的重点知识以及其他知识有机结合，进行综合考查，强调知识的综合和知识的内在联系，加大数学思想方法的考查力度，是高考对不等式考查的又一新特点.

3. 加大推理、论证能力的考查力度，充分体现由知识立意向能力立意转变的命题方向，由于代数推理没有几何图形作依托，因而更能检测出学生抽象思维能力的层次，这类代数推理问题常以高中代数的主体内容——函数、方程、不等式、数列及其交叉部分为知识背景，并与高等数学知识及思想方法相衔接，有利于高考选拔功能的充分发挥，对不等式的考查更能体现出高观点、低设问、深入浅出的特点，考查容量之大、功能之多、能力要求之高，一直是高考的热点.

4. 突出不等式的知识在解决实际问题中的应用价值，借助不等式来考查学生的应用意识.

■学习应试策略

学习本部分内容时，需要注意以下问题：

根据本部分上述的命题趋向我们迎考复习时应加强数学思想方法的复习.

在复习不等式的解法时，加强等价转化思想的训练与复习，解不等式的过程是一个等价转化的过程，通过等价转化可简化不等式(组)，以便快速、准确求解.

加强分类讨论思想的复习，在解不等式或证不等式的过程中，遇到含参数问题，一般要对参数进行分类讨论.复习时，学生要学会分析引起分类讨论的原因，合理的分类，做到不重不漏.

加强函数与方程思想在不等式中的应用训练.不等式、函数、方程三者密不可分、相互联系、互相转化.如求参数的取值范围问题，函数与方程思想是解决这类问题的重要方法.

在不等式的证明中，加强化归思想的复习，证不等式的过程是一个把已知条件向要证结论转化的过程，既可考查学生的基础知识，又可考查学生分析问题和解决问题的能力，正因为证不等式是高考考查学生代数推理能力的重要素材，所以复习时应引起我们足够的重视.

利用函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的单调性解决有关最值问题是近几年高考中的热点，应加强这方面的训练和指导，强化不等式的应用.

高考中除单独考查不等式的试题外，常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用问题的试题中涉及不等式的知识，加强不等式的应用能力是提高解综合题能力的关键.因此，在复习时应加强这方面的训练，提高应用意识，总结不等式的应用规律，只有这样才能提高解决问题的能力.

[单元提升篇]

第一章　不等式的性质及解法

课程标准要求

(1)通过具体情境，感受在日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式(组)的实际背景.

(2)理解不等式的性质并会灵活应用.

(3)经历从实际情景中抽象出一元二次不等式模型的过程.通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.会解一元二次不等式，对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序框图.

(4)掌握某些简单不等式(如分式不等式、指数不等式、对数不等式)的解法.

(5)理解绝对值的几何意义，并能利用绝对值不等式的几何意义证明下列不等式：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$；会解以下类型的不等式：$|ax+b|\leqslant c$，$|ax+b|\geqslant c$，$|x-c|+|x-b|\geqslant a$.

第一单元

不等式的性质及其应用

知识清单精解 ZHISHIQINGDANJINGJIE

1　性质

性质	内容
对称性	$a>b\Leftrightarrow b<a$
传递性	$a>b,b>c\Rightarrow a>c$
单调性	$a>b\Leftrightarrow a+m>b+m$
不等量乘正量	$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$
同向可加	$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

续表

性质	内容
异向可减	$a>c,b<d\Rightarrow a-b>c-d$
同向可乘	$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$
取倒数	$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　$a>b,ab<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
异向相除	$a>b>0,0<c<d\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$
乘方	$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$
开方	$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$
绝对值不等式的性质	$\lvert x\rvert>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$ $\lvert x\rvert<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$ $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert\leqslant\lvert a\pm b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$

2 应用

1. 作差法是证明不等式和比较两个代数式大小最常用的方法，也是最重要的方法.
2. 利用不等式的性质可解决一些范围问题.

方法技巧突破
FANGFAJIQIAOTUPO

数学思想方法

一、特殊化思想

特殊化思想是指对于一些抽象的数学问题借助于一些特殊元素的选取，如特殊值的选取起到化繁为简的目的，迅速得到答案.

例1 若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论不正确的是(　　)

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$　　C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $|a|-|b|=|a-b|$

解析：取 $a=-1,b=-2$ 代入各选项验证知只有 D 不成立，故选 D.　　答案：D

点评：本题若以基本方法求解反而不好判断答案的正误，而采用特值法简单、直接、正确率高.

二、分类讨论思想

例2 已知 $x\in\mathbf{R}$，比较$\frac{1}{1+x}$与 $1-x$ 的大小.

解：$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$，当 $x=0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}=0$，∴ $\frac{1}{1+x}=1-x$；

当 $x<-1$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<0$，∴ $\frac{1}{1+x}<1-x$；

当 $x>-1$ 且 $x\neq0$，即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}>0$，∴ $\frac{1}{1+x}>1-x$.

点评：本题在作差后，为判断各因式的符号，利用了分类讨论的数学思想，在学习中要注意体会.

例 3 设 $a>0,a\neq1,t>0$，比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小，并证明你的结论.

分析：由于 $\frac{t+1}{2}\geqslant\sqrt{t}$，所以应根据 $t=1$ 与 $t\neq1$ 两种情况讨论．在 $t\neq1$ 时，由于底数为 a，故还应分 $0<a<1$ 与 $a>1$ 两种情况讨论.

解：当 $t=1$ 时，$\sqrt{t}=\frac{t+1}{2}$，此时 $\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{t+1}{2}$；

当 $t\neq1$ 时，恒有 $\sqrt{t}<\frac{t+1}{2}(t>0)$.

①若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{2}\log_a t>\log_a\frac{t+1}{2}$；

②若 $a>1$，则 $\frac{1}{2}\log_a t<\log_a\frac{t+1}{2}$.

综上所述，当 $t=1$ 且 $a>0,a\neq1$ 时，$\log_a\frac{t+1}{2}=\frac{1}{2}\log_a t$；

当 $t>0$ 且 $t\neq1$ 时，若 $a>1$，则 $\log_a\frac{t+1}{2}>\frac{1}{2}\log_a t$；

若 $0<a<1$，则 $\log_a\frac{t+1}{2}<\frac{1}{2}\log_a t$.

点评：在讨论问题时，要把握好分类的原则，进行合理、恰当的讨论，讨论要在允许的取值范围内，讨论时要做到不重不漏．解题结束时，要加上综述进行总结.

例 4 已知 $x>0$ 且 $x\neq1,m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

分析：本题应对 x 分类讨论，即讨论 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两种情况.

解：$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$

$=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)$.

当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$，知 $x^m<x^n$ 且 $x^{m+n}<1,1-\frac{1}{x^{m+n}}<0$，

$\therefore (x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0$；

当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$，知 $x^m>x^n$ 且 $x^{m+n}>1,1-\frac{1}{x^{m+n}}>0$，

$\therefore (x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0$．综上，知当 $x>0$ 且 $x\neq1,m>n>0$ 时，

$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，即 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

解题技法

一、作差法

要比较两个实数 a、b 的大小，只需比较 $a-b$ 与 0 的大小即可. 这种比较大小的方法叫作差法，其一般步骤是：作差→变形→判号→定论.

例 5 已知正数 a,b,c 成等比数列，比较 $a^2-b^2+c^2$ 与 $(a-b+c)^2$ 的大小.

分析：本题运用作差法解答.

解：$\because$ $ac=b^2$，$b>0$，$\therefore$ $(a^2-b^2+c^2)-(a-b+c)^2$

$=a^2-b^2+c^2-a^2-b^2-c^2+2ab-2ac+2bc$

$=2ab-4b^2+2bc=2b(a-2b+c)=2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant 0$.

$\therefore$ $a^2-b^2+c^2\geqslant(a-b+c)^2$.

例 6 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant m\leqslant n$，比较 a^n+b^n 与 $a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$ 的大小.

分析：a^n+b^n 与 $a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$ 有公因式（按分组看）a^{n-m}、b^{n-m}，可以考虑用作差法解答本题，提取公因式后，对正数 a 与 b 的大小顺序要进行分类讨论.

解：$\because$ $a,b\in\mathbf{R}^+$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant m\leqslant n$，

$\therefore$ $a^n+b^n-(a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m})$

$=a^{n-m}(a^m-b^m)+b^{n-m}(b^m-a^m)=(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})$.

当 $a=b>0$ 时，$a^n+b^n-(a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m})=0$，即左边=右边；

当 $a>b>0$ 时，$a^m>b^m$，$a^{n-m}\geqslant b^{n-m}$，$(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})\geqslant 0$，即左边$\geqslant$右边.

当 $b>a>0$ 时，$a^m<b^m$，$a^{n-m}\leqslant b^{n-m}$，$(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})\geqslant 0$，即左边$\geqslant$右边.

综上，有 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$.

例 7 若 $a\in\mathbf{R}$，$p=a^2-a+1$，$q=\dfrac{1}{a^2+a+1}$，比较 p 与 q 的大小.

解：$p-q=a^2-a+1-\dfrac{1}{a^2+a+1}=\dfrac{a^2(a^2+1)}{a^2+a+1}=\dfrac{a^2(a^2+1)}{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

由于 $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，$a^2+1>0$，$a^2\geqslant 0$，故 $p-q\geqslant 0$，$p\geqslant q$（当且仅当 $a=0$ 时，上式等号成立）.

点评：本题是先通分，再通过因式分解来判断式子的符号. 一般来说，判断一个式子的符号最常用的方法是将其分解因式，即变为若干式子的积（或商）的形式，然后先判断各个因式的符号，最后判断整个式子的符号.

二、作商法

若 a 和 b 都是正数，则可通过下面的方法确定 a 与 b 的大小关系.

$\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

这种比较实数大小的方法称为作商法,它的一般步骤是:作商→变形→与1比较大小→定论.

例 8　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,比较$\frac{a+b}{2}$与$(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}$的大小.

解:∵ $\frac{\sqrt{ab}}{(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{b}{a+b}}b^{\frac{1}{2}-\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}$,$a,b\in\mathbf{R}^+$,

∴ 若 $a\geqslant b$,则$\frac{a}{b}\geqslant 1$,$a-b\geqslant 0$,根据指数函数的性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}\geqslant 1$;

若 $a<b$,则 $0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,根据指数函数的性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}>1$.

∴ $\frac{\sqrt{ab}}{(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}}\geqslant 1$.又∵ $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,∴ $\frac{a+b}{2}\geqslant(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}$.

例 9　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a\neq b$,比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

解:$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$,

当 $a>b>0$ 时,有$\frac{a}{b}>1$,$a-b>0$,$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$;

当 $b>a>0$ 时,有 $0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.∴ $a^ab^b>a^bb^a$.

点评:对"当 $b>a>0$ 时,有 $0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$"的理解,在 $\mathbf{R}$ 上,指数函数 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 是减函数$\left(0<\frac{a}{b}<1\right)$,$a-b<0$,∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$.

三、分子(分母)有理化

例 10　已知 $a\geqslant 1$,试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小.

分析:若直接求差可得 $M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$,此式的正负不易判定.若先将 M、N 通过分子(或分母)有理化,然后再求差,就容易多了.

解:∵ $M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$

$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}<0$,∴ $M<N$.

点评:本题是先利用分子有理化再判断差的符号.一般来说,涉及偶次根式的问题,分子或分母有理化是变形中常用的技巧.

高考能力培养
GAOKAONENGLIPEIYANG

1. 推理论证能力

推理论证能力是考查不等式的一个重要方面,每年的高考题几乎都有对不等式

推理论证的考查.

例 1 (2006·浙江)设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$,若 $a+b+c=0$,$f(0)>0$,$f(1)>0$,求证:(1)$a>0$ 且 $-2<\frac{b}{a}<-1$;(2)方程 $f(x)=0$ 在(0,1)内有两个实根.

证明:(1)因为 $f(0)>0$,$f(1)>0$,所以 $c>0$,$3a+2b+c>0$.

由条件 $a+b+c=0$,消去 b,得 $a>c>0$;

由条件 $a+b+c=0$,消去 c,得 $a+b<0$,$2a+b>0$.

故 $-2<\frac{b}{a}<-1$.

(2)抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{3a},\frac{3ac-b^2}{3a}\right)$.

$-2<\frac{b}{a}<-1$ 的两边同乘 $-\frac{1}{3}$,得 $\frac{1}{3}<-\frac{b}{3a}<\frac{2}{3}$.

而 $f\left(-\frac{b}{3a}\right)=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$,所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(0,-\frac{b}{3a}\right)$ 与 $\left(-\frac{b}{3a},1\right)$ 内分别有一实根,故方程 $f(x)=0$ 在(0,1)内有两个实根.

2. 知识迁移能力

知识迁移能力是指对于已知的知识掌握熟练之后,用来应对一些探究性问题的能力,本类题目一般是通过观察找出探究性问题与已学习过的知识的联系.

例 2 (2007·佛山模拟)考察下列一组不等式:$2^3+5^3>2^2\cdot5+2\cdot5^2$,$2^4+5^4>2^3\cdot5+2\cdot5^3$,$2^5+5^5>2^3\cdot5^2+2^2\cdot5^3$,……

将上述不等式在左右两端仍为两项和的情况下加以推广,使以上的不等式成为推广不等式的特例,则推广的不等式可以是________.

解析:由不完全归纳法类比可知.

答案:$a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m$($a$、$b>0$,$a\neq b$,$m$、$n>0$)

例 3 某水库有 10 个泄洪闸,现在水库的水位已经超过安全线,上游河水还在按一成不变的速度增加.为了防洪,需调节泄洪速度,假设每个闸门的泄洪速度相同,经测算,若打开一个泄洪闸,30 个小时水位降至安全线,若打开两个泄洪闸,10 个小时水位降至安全线,现在抗洪指挥部要求 3 个小时内使水位下降至安全线以下,问至少同时打开几个闸门?

解:设水库已有超过安全水位的水量是 x m³,上游河水以每小时 y m³ 的水量注入水库,每个泄洪闸每小时泄洪 z m³,依题意有 $\begin{cases}x+30y=30z,\\x+10y=2\times10z,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=15z,\\y=0.5z.\end{cases}$

假设打开 n 个闸门,可在 3 小时内使水位降至安全线以下,则有 $x+3y<3nz$,把 $x=15z$,$y=0.5z$ 代入得 $n>5.5$.

$\because n\in\mathbf{N}$,$\therefore n\geqslant6$,即最少要同时打开 6 个闸门.