经济管理数学基础

江丕林　王永烈　李进级　编著

安徽人民出版社

目　　录

第一篇微积分

第二篇线性代数

第三篇概率论与数理统计

第十二章 数理统计基础

第一篇　微积分

微积分是变量数学的基础，随着社会的发展，科学的进步，变量数学也进入经济计量领域，成为经济研究的必备工具。本篇主要介绍微积分学。同时，对微积分学的主要研究对象——初等函数进行系统的复习。对以不定积分作为主要求解工具而建立起来的微分方程也作一点介绍。

第一章　函数的极限与连续

在客观世界中，各种事物的变化都是相互制约的、相互联系的。反映在它们量的关系上，就是人们所熟习的函数关系。

函数的极限与连续是学习微积分学的基础。本章重点介绍初等函数的有关概念及性质、函数极限与连续的定义及其运算法则。

§1—1　函数的概念

一、常量和变量

当我们进行生产实践和科学实验时，常常会遇到两种不同的量：一种是在某一过程的进行中相对保持不变，是一个

固定的数值，这种量叫常量；另一种是在某一过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做变量。如某种商品的单价，可以看做常量，而购买的数量以及付出的金额，则可当作变量。常量除用常数表示外，一般用字母a、b、c等表示；而变量一般用s、t、x、y等表示。常量和变量是对某一过程来说的，是相对的。

二、函数定义

定义：设在某一变化过程中存在两个变量x、y，如果对于变量x的每一个确定的值，变量y按照给定的法则有确定的值和它对应，那么变量y叫做变量x的函数。变量x叫做自变量，变量y叫做因变量。

y是x的函数，我们常用$y=f(x)$或$y=g(x)$等式子来表示，这里符号“f”、“g”表示确定函数关系的对应法则。

对于函数$y=f(x)$，当自变量$x=a$时，对应的y值就用$y=f(a)$来表示。

三、函数的定义域和值域

在函数$y=f(x)$里，自变量x可取值的全体叫做函数的定义域；对应于x的函数值的全体叫做函数的值域。

函数的定义域一般要根据问题的实际意义来确定，若一般地研究解析式$y=f(x)$所表示的函数定义域，那么函数的定义域就是使解析式$f(x)$有意义的x值的全体。

例1，求下列函数的定义域和值域。

$y=\sqrt{x^2-1}$

解：要使$\sqrt{x^2-1}$有意义，必须使$x^2-1\geqslant 0$，

所以解不等式得函数的定义域是：

$x \leqslant -1$或$x \geqslant 1$

由$y=\sqrt{x^2-1}$，两边平方得：$y^2=x^2-1$，

所以　$x=\pm\sqrt{y^2+1}$

因为不论y是任何实数，$\sqrt{y^2+1}$都有意义

即　$-\infty<y<+\infty$

但由$y=\sqrt{x^2-1}$　　知$y\geqslant 0$

所以函数的值域是：$0\leqslant y<\infty$

定义域一般用下面二种方法表示：

1.不等式表示法

$y=\sqrt{1-2x}$，定义域为$x\leqslant \frac{1}{2}$

2.区间表示法

$y=\sqrt{x^2-4}$，定义域为

$(-\infty, -2]$和$[2, +\infty)$

四、函数的表示方法

表示两个变量间的函数关系的方法，最常用的有下面三种：

1.解析法：用等式来表示两个变量之间的函数关系。如$S=\pi r^2$表示圆的面积和半径之间的函数关系。

2.列表法：把自变量一系列的值和对应的函数值列成表格来表示函数关系，例如常用的“平方表”、“三角函数表”等即属此法。

3.图象法：在直角坐标系里，把自变量和函数之间的对应值作为点的横坐标和纵坐标，用对应的点的集合即图形来

表示函数关系。

五、单值函数

在函数$y=f(x)$的定义域里，自变量的每一个确定值，如果在函数的值域里，只有唯一确定的函数值和它对应，那么这种函数就叫做单值函数。如$y=x^2$是单值函数。多值函数此处不多作介绍，我们所研究的函数在未作说明时，一般指的均为单值函数。

六、反函数

1.反函数的定义

如果因变量y是自变量x的函数，即：$y=f(x)$，在这个函数中，如果把y看作自变量，x看作因变量，由此确定x是y的函数：$x=\varphi(y)$，称$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数。习惯上把自变量记为x，因变量记为y，所以反函数$x=\varphi(y)$改记为：$y=\varphi(x)$。通常函数$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$。

必须注意：

反函数是建立在一一对应的基础上的，如果函数关系不是一一对应，那么函数$y=f(x)$在整个定义域上就没有反函数。若我们把函数定义域划分成几个单值区间，则可以在各个区间上求$y=f(x)$的反函数。

例2，求函数$y=x^2$的反函数。

解：函数$y=x^2$定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[0, +\infty)$，由于函数关系不是一一对应，所以在整个定义域区间不存在反函数。

由$x=\pm\sqrt{y}$，若把定义域划分为两个区间$(-\infty, 0)$，$[0, +\infty)$，则在每个区间上有反函数。

所以函数$y=x^2$

(1) 在区间$(-\infty, 0)$上的反函数是：

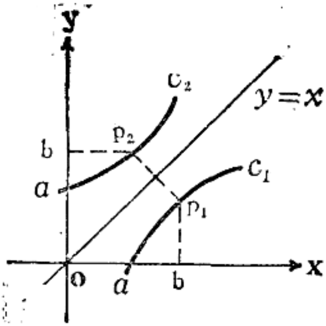
$$y=-\sqrt{x} \qquad (x>0)$$

（2）在区间[0，$+\infty$）的反函数是：

$$y=\sqrt{x} \qquad (x\geqslant 0)$$

2．反函数的图象

函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象是同一条曲线；而$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图象是关于直线 $y=x$ 对称的两条曲线。如图（1—1）中，C_1表示$y=f(x)$的图象，C_2表示$y=f^{-1}(x)$的图象。可以证明，C_1上任一点P_1关于直线$y=x$的对称点P_2必在C_2上，反之亦然。



图（1—1）

§1—2　函数的性质

常常需要对所给函数的特征和变化趋势进行探讨，以便于掌握函数的变化规律。因而必须研究各类函数所具有的特征，首先从下面三个方面进行。

一、函数的奇偶性

在函数$y=f(x)$中，若以$-x$代换x，总有$f(-x)=-f(x)$成立，则称$y=f(x)$为奇函数。例如函数$y=x^3$为奇函数，奇函数的图象关于原点成中心对称图形。同样，在函数$y=f(x)$中，若以$-x$代换x，总有$f(-x)=f(x)$成立，则称函数$y=f(x)$为偶函数。例如函数$y=x^2$为偶函数。偶函数的图象关于y轴成轴对称图形。

但是，也存在这样一些函数，若以$-x$代换x，既不满足$f(-x)=-f(x)$，也不满足$f(-x)=f(x)$，则函数 $y=$

$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数。如函数$y=x+1$或 $y=x^2+2x-3$等都属于这类函数。

例1，下列各函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数，也不是偶函数？

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$

(3) $f(x)=x^2-x+1$

解：(1) $\because\quad f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=f(x)$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{1+x^2}\text{是偶函数。}$$

(2) $\because\quad f(-x)=\log_a[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]$

$$=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$$

$$=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$=-f(x)$$

$\therefore\quad f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数。

(3) $\because\quad f(-x)=(-x)^2-(-x)+1$

$$=x^2+x+1$$

$\therefore\quad f(x)=x^2-x+1$既不是奇函数也不是偶函数。

二、函数的单调性

如果对于函数$y=f(x)$的定义域中某个区间上自变量的两个任意值x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，所对应的函数值$f(x_1)$与$f(x_2)$适合下列条件：

1.总有$f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是递增的。

2. 总有$f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数$y=f(x)$在这个区间上是递减的。

在已知区间上的递增（或递减）的函数，分别叫做这个区间上的增函数（或减函数），统称为这个区间上的单调函数，而这个区间就叫做函数的单调区间。

函数所具有的这种性质，叫做函数的单调性。

例 2，确定函数$y=x^2$的单调区间。

解：设$f(x)=x^2$，自变量x任取二值x_1与x_2，且$x_1<x_2$

那么，$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2$

$$=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

$\because \quad x_1<x_2$

$\therefore \quad x_2-x_1>0$

当$x_1<x_2<0$时，$x_1+x_2<0$，

这时$f(x_2)-f(x_1)<0$，所以函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上是递减的。

当$0<x_1<x_2$时，$x_1+x_2>0$，

这时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，所以函数在区间$(0, +\infty)$上是递增的。

三、函数的周期性

如果存在一个不为零的常数T，对于定义域里的每一个x的值，函数$f(x)$的值都适合等式$f(x+T)=f(x)$，那么函数$f(x)$叫做周期函数。不为零的常数T叫做这个函数的周期。一切T中最小的正数值，叫做函数$f(x)$的最小正周期。通常就把函数$f(x)$的最小正周期，称为函数$f(x)$的周期。函数的这种性质，叫做函数的周期性。例如$\sin(2k\pi+x)=\sin x$（k为整数），因此正弦函数$y=\sin x$是个周期函数，周期为2π。

除此之处，函数还有一些其它性质，诸如有界性、极值等，这里不详述。

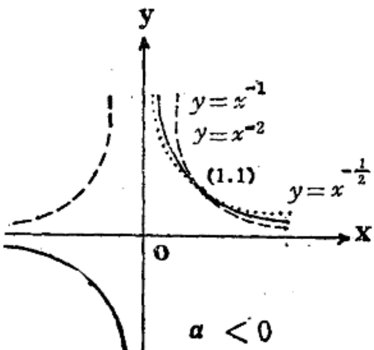
§1—3 基本初等函数

中学数学已经学习了五种函数，幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数，统称为基本初等函数。在这里再进行一次简单的介绍。

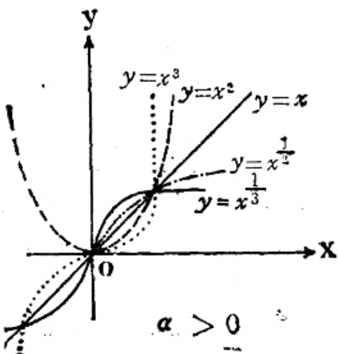
一、幂函数

函数$y=x^a$叫做幂函数，其中x是自变量，a为任意实数。

常用的幂函数有$a=0$、1、2、3、$\frac{1}{2}$、-1、-2等几种情形。当$a=0$时，有$y=1$；$a=1$时，有$y=x$为正比函数；$a=2$时，有$y=x^2$为二次函数，它的图象为抛物线；$a=3$时，有$y=x^3$是三次函数，它的图象为立方抛物线；$a=\frac{1}{2}$时，有$y=\sqrt{x}$为抛物线一支；$a=-1$时，有$y=\frac{1}{x}$为反比函数，其图形是等轴双曲线；$a=-2$时，有$y=\frac{1}{x^2}$为平方反比函数。幂函数的图象见图(1—2)与图(1—3)所示。



图(1—2)

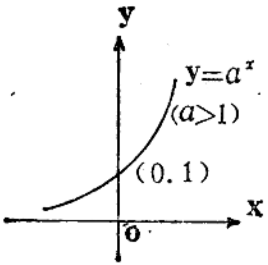


图(1—3)

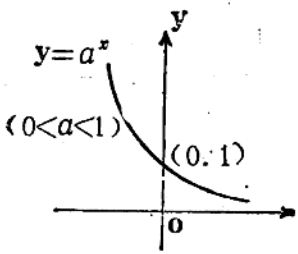
二、指数函数

函数$y=a^x$叫做指数函数，其中a是个大于零且不等于1的常数。

指数函数的图象随a的取值不同而异，具体情况见图（1—4）和图（1—5）所示。



图（1—4）

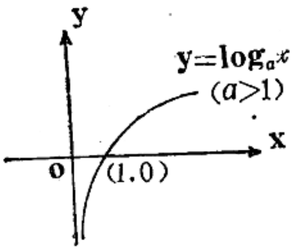


（图1—5）

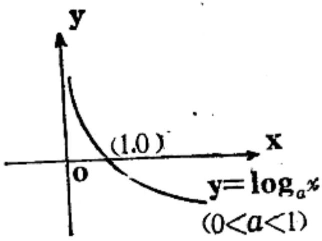
三、对数函数

对数函数$y=\log_a x$叫做对数函数，其中a是一个大于零且不等于1的常数。

对数函数$y=\log_a x$与指数函数$y=a^x$互为反函数，它们



图（1—3）



图（1—7）

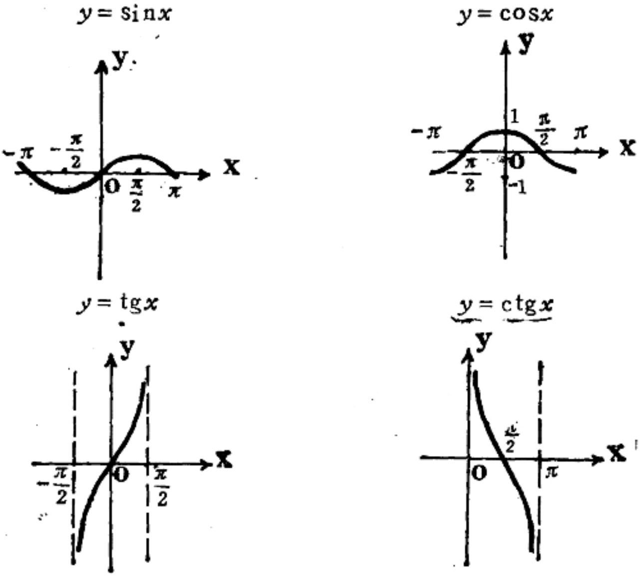
的图象关于直线$y=x$对称。

对数函数的图象因底a的取值不同而不同，具体情况见图（1—6）和图（1—7）所示。

应特别注意：以10为底的对数叫常用对数，其函数的解析式记为$y=\lg x$。以e为底的对数叫自然对数，其解析式记为$y=\ln x$。数e的意义将在下节给出。

四、三角函数

由角x的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割所确定的函数$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}\,x$、$y=\mathrm{ctg}\,x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$统称为三角函数，这里我们仅研究前四种三角函数，它们的图象见图（1—8）所示。



图（1—8）

五、反三角函数

首先我们来研究正弦函数的反函数。

正弦函数$y=\sin x$的图象是以2π为周期沿x轴向两方无限伸展的，即在函数定义域（$-\infty$，$+\infty$）上每一个确定的x值，都对应唯一确定的y值，但是，在函数值域$[-1,1]$上的每一个确定的y值，却对应着无穷多个x值，所以在正弦函数的整个定义域里不存在反函数。

如果我们把正弦函数的定义域划分许多单调区间，那么在每一个区间上，自变量x和函数y之间就可以建立一一对应的关系，从而得到正弦函数的反函数。

我们把区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上正弦函数$y=\sin x$的反函数叫做反正弦函数，记作$y=\arcsin x$，并且把区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$叫做反正弦函数$y=\arcsin x$的主值区间。反正弦函数的定义域是$[-1, 1]$，

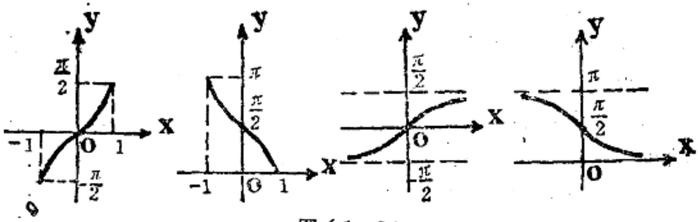
值域是$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

仿照反正弦函数的定义，我们可以定义反余弦函数、反正切函数和反余切函数，并分别记为：

$y=\mathrm{arc}\cos x$，$y=\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}x$和$y=\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}x$。

它们的定义域分别是$[-1, 1]$，$(-\infty, \infty)$和$(-\infty, \infty)$；值域分别是$[0, \pi]$，$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$和$(0, \pi)$。它们的函数图象见图（1—9）所示。

$y=\arcsin x$　$y=\arccos x$　$y=\mathrm{arctg}\,x$　$y=\mathrm{arcctg}\,x$



图（1—9）

§1—4　初等函数

一、复合函数

在许多实际问题中，变量间的函数关系往往是比较复杂的。如在函数$y=\lg\sin x$中，不难看出这个函数的值不是直接由自变量x来确定的，而是通过x的函数$\sin x$的值来确定的。如果用u来表示$\sin x$，那么函数$y=\lg\sin x$就可以表示成$y=\lg u$，而$u=\sin x$，这就说明了y与x之间的函数关系，是通过中间变量u来确定的。

定义：如果y是u的函数，即$y=f(u)$，而u又是x的函数，即$u=\varphi(x)$，通过中间变量u将y表示成x的函数，即$y=f[\varphi(x)]$，那么y就叫做x的函数，或称为复合函数，u叫做中间变量。

需要注意的是：函数$u=\varphi(x)$的值域，应该取在函数$y=f(u)$的定义域之内，否则复合函数将失去意义。如复合函数$y=\lg u$，$u=x-1$，由于$y=\lg u$的定义域为$(0, +\infty)$所以中间变量$u=x-1$的值域必须在$(0, +\infty)$内，即x的定义域在区间$(1, +\infty)$上。

复合函数是本节的重点，我们应该正确而又熟练地掌握复合函数的复合过程，将为今后学习求函数的导数和积分带

来许多方便。

例，指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$　　(2) $y=\sin 2x$

(3) $y=\cos^2 x$　　(4) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$

(5) $y=[\log_a(x^2+2)]^3$　$(a>0, a\neq 1)$

解：(1) 函数$y=\sqrt{1+x^2}$是由函数$y=\sqrt{u}$和函数$u=1+x^2$复合而成的。

(2) 函数$y=\sin 2x$是由函数$y=\sin u$和函数$u=2x$复合而成的。

(3) 函数$y=\cos^2 x$是由函数$y=u^2$和函数$u=\cos x$复合而成的。

(4) 函数$y=2\sin\sqrt{1-x^2}$是由函数$y=2\sin u$。$u=\sqrt{v}$及$v=1-x^2$复合而成的。

(5) 函数$y=[\log_a(x^2+2)]^3$是由函数$y=u^3$．$u=\log_a v$及$v=x^2+2$复合而成的。

二、初等函数

由五种基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）以及有限次函数的复合而得出的函数，统称初等函数。

如：$y=3x^3-x^2+2x+4$；　$y=x+\sqrt{x^2+1}$；

$y=x^2+3^x+1$；　$y=\dfrac{\sin^2 x}{x^2-5}$；

$x=\log_a\sqrt{3x-1}+bx$；　$y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$。

初等函数是微积分学的主要研究对象。

§1—5　管理中常用函数

在经济分析中，常用到一些函数来表达某些经济变量之