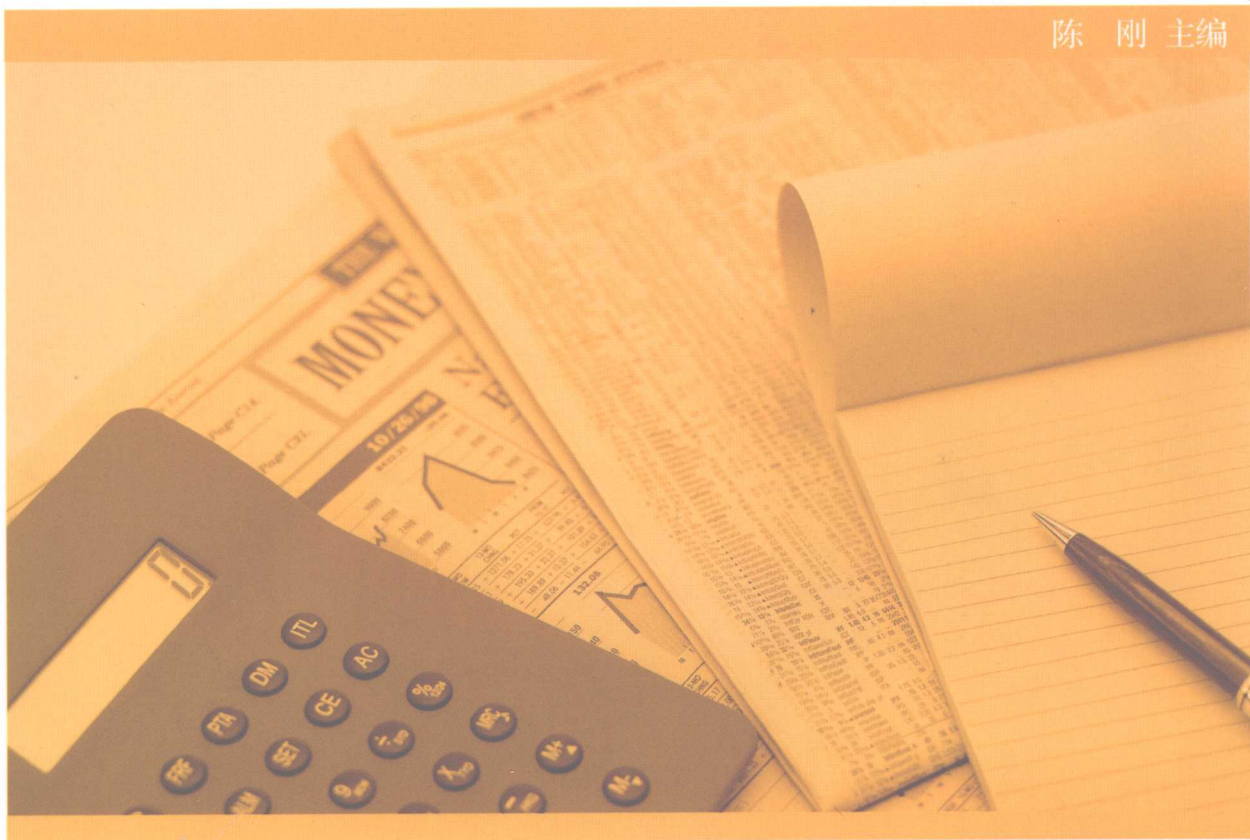




全国高职高专教育“十一五”规划教材

经济应用数学

陈刚主编



高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

内容提要

经济应用数学

陈刚 主编

高峻嶒 马怀远 沈跃云

副主编

吴彬 冯晨

ISBN 978-7-04-024337-9

北京：高等教育出版社
地址：北京市西城区德胜大街4号
邮编：100120
电话：(010) 58581000
网址：<http://www.hep.com.cn>

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第103978号

出版发行：高等教育出版社

责任编辑：陈洪红
封面设计：李燕
版式设计：陈洪红
印刷：北京印刷厂
发行：北京印刷厂

出版发行：高等教育出版社
地址：北京市西城区德胜大街4号
邮编：100120
电话：(010) 58581000
网址：<http://www.hep.com.cn>

责任编辑：陈洪红
封面设计：李燕
版式设计：陈洪红
印刷：北京印刷厂
发行：北京印刷厂

ISBN 978-7-04-024337-9
定价：33.50元

高等教育出版社

地址：北京市西城区德胜大街4号
电话：(010) 58581000

内容提要

本书是中国高等职业技术教育研究会基础课改革工作委员会组织编写的高职高专“应用数学”系列教材之一,为高职高专财经和管理专业学生学习后继专业课程以及未来从事经济量化分析提供最基本的数学基础知识。本书贯彻“定位高职,融通学科体系;面向经济,引导量化分析”的编写原则,密切结合专业需求,强化经济信息,注重突出经济中量化分析的基本思维方法和表达交流模式;针对高职学生特点,语言表述通俗简洁,深入浅出,可读性强,使数学理论不再艰涩深奥。

全书共分八章:函数——经济量化模型,导数——边际与弹性分析,导数应用——经济图像解读,积分——变化积累效应,概率——随机定量技术,统计——局部推断总体,矩阵——多元线性运算,线性规划——经济系统运筹。本书通过大量的经济案例与模型,将经济应用与数学知识互动交融,让学生在分析经济问题的环境中学习数学,在解决实际问题的感悟中认识数学。

本书可作为高职高专财会、经济和各类管理专业学生学习经济数学课程的教材或参考书,也可供成人教育相关专业和自学考试的读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/陈刚主编. —北京:高等教育出版社, 2008. 8

ISBN 978-7-04-024337-6

I. 经… II. 陈… III. 经济数学-高等学校:技术学校-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103678 号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 李陶 封面设计 张志奇 责任绘图 黄建英
版式设计 陆瑞红 责任校对 金辉 责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2008 年 8 月第 1 版
印 张	17	印 次	2008 年 8 月第 1 次印刷
字 数	400 000	定 价	23.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24337-00

致本书读者

(代序)

在国家大力发展高等职业教育的时候，欣喜地看到一套三册的《经济应用数学》、《工科应用数学》、《计算机应用数学》出版。这是一套很有特色的书，也是作者们长期经验积累的结果，可以预料一定会对数学学习有很多帮助。在这里，作为一个和数学打交道超过半个世纪的老人，想和本书的读者说几句话。

各位读者正是风华正茂、青春无敌的年纪。不久的将来你们会投入到国家建设中去，成为经济生产一线的骨干和核心。那么，眼前的这本“数学”书会带给你们什么呢？你们为什么要学习“高等数学”呢？

为人在世，读书是终生相伴的。读书的目的有二，一是当作工具使用，产生实际效益。二是当作精神享受，提高个人文化修养。比如读唐诗，背古文，既是有助于写作，更多的则是后者，即为了欣赏，为了个人的精神修养。

数学其实也是一样。数学是一种语言，用符号、数字按规则写成的一串科学公式，是我们彼此交流的基础工具。你可以不创造数学，却必须听懂别人说的数学语言。现在诸如微分、积分、线性、矩阵等等名词，高中生也懂得一二。如果进入金融界，人家说“边际”如何，没有微积分的基础就听不懂。你进入工程界，领导要求“最优化”，可是没有学一点线性规划，就会不知所云。你如果进入信息技术领域，连图像的上升、下降也无法判断，那是要耽误事的。总之，工作上难免碰到一些数学问题，如果连“数学话”都不会说，作为大学生，如何在社会上立足？因此，学习数学是为了掌握一门工具性的语言。

然后，数学还是一种文化修养。我国台湾作家龙应台关于文化是这样说的：“什么是文化？它是随便一个人迎面走来，他的举手投足，他的一颦一笑，他的整体气质。他走过一棵树，树枝低垂，他是随手把枝折断丢弃，还是弯身而过？一只满身是癣的流浪狗走近他，他是怜悯地避开，还是一脚踢过去？电梯门打开，他是谦抑地让人，还是霸道地把别人挤开？……”（人民网 2005 年 10 月 19 日）

文化其实体现在一个人如何对待他人、对待自己，如何对待自己所处的自然环境的行动中。于是，我们可以类似地用比较通俗的语言来谈数学文化。当你看到一个数学定理的时候，你会浮现出古人的身影，产生敬畏之心吗？在你思考问题的时候，你是否关注它的数量方面？是常量还是变量？在打开一本书，里面有一行行的符号，你立刻就丢掉不看了，还是并不畏惧它们？在一连串的变换之后问题得解，你会由衷地感叹数学之美吗？在律师叙述理由的时候，你会觉察理由是否充分、是否必要么？在碰到一桩随机事件，例如购买彩票，你会习惯性地看看中奖的概率有多少吗？你能够欣赏“指数爆炸”、“直线上升”、“事业坐标”、“人生轨迹”这样的语言吗？

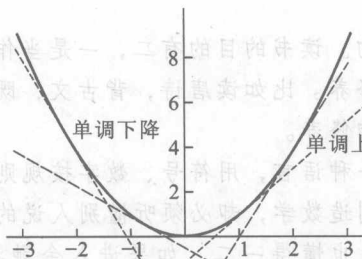
一次和一位经济师闲谈，我说到今天蔬菜比台风前涨了 1 元钱，他马上回应“弹性不大；再涨也得买”。这个弹性，也和微积分有关。学经济的人，不知道弹性，就没法和人家交

流了。

现在，我们可以明白，数学考试成绩固然重要，但真正对一个人的终生发生作用，贯穿于日常行动的，往往是数学文化。如果数学课堂能够具有广博的文化知识滋养，充满高雅的文化氛围，弥漫着优秀的文化传统，数学教学可以说达到最高境界了。

一个国家的未来，决定于硬实力和软实力。软实力中，普通百姓的文化素质，特别是受过高等教育人群的文化素养，是一个决定性的因素。环顾世界，追索历史，凡是世界强国，必定是数学强国。当今的数学格局是，美国一马当先，西欧紧随其后，俄罗斯独树一帜，日本正在迎头赶上，中国则是一个未知数。但毋庸置疑的是，与中国国力的逐步提升相伴随的，是全民数学素质的提升。

学习数学，不要老是盯着题目和考分，应该多从思想方法上考察，一旦能够有所意会，那真是其乐无穷。就拿大家非常熟悉的二次函数 $y=x^2$ 来说，中学里对它演练过无数的题目，可是你可曾观察过图像各点处切线斜率的变化？



从左往右看，切线斜率在 $x < 0$ 部分是负的，由负无穷大渐渐接近于 0， $x = 0$ 处切线斜率为 0，然后斜率成为正数，越来越大。用切线斜率看曲线，就是微积分方法。它用切线斜率告诉你函数的上升、下降、端点、极大或极小等等，美不胜收。况且，你是否也能用这一观点看看股票走势图呢？

瞬时速度，也是微积分涉及的名词。其实，我们每个人头脑中都有“瞬时速度”的概念。试问，快车追赶慢车，在超过慢车的那一刹那，快车速度是不是比慢车的速度快？你一定回答：是！可是我们还没有定义什么是瞬时速度，你怎么就知道了快车在“一刹那”的速度了？这表明，我们的头脑是能动的，有数学潜在力的。如能充分运用这种“直觉”，高等数学完全可以理解得很深刻！

数学表示的一个缺点是过度形式化。定义、定理、证明、推论等等，简洁精确，显示出“冰冷的美丽”。据作者们告诉我，本套书的编写，适当采用了“案例”教学方法，用具体的例子说话，那就容易掌握了。

我曾经跟一位青年朋友写过一首小诗，作为这篇谈话的结束。

你如果亲近它，它会和你忠实相随，

应付艰难险阻，陪伴你走过咸淡人生；

如果你嫌弃它，它也会不高兴，

冷不防咬你一口。
我们需要数学作为精神家园的朋友，
直到永远。
祝各位的数学学习成功。

张奠宙
写于华东师范大学数学系
2008年5月

。要体现经济数学的应用性，重点在于应用基础知识的掌握和能力的培养，而所
 学知识，应能满足经济数学应用的需要，同时，在数学知识的应用中，应体现
 这个应用性。本教材在编写过程中，力求做到“应用性、实用性、可读性、可
 操作性”。

前言

应用性	实用性	可读性	可操作性
基础性	应用性	可读性	可操作性
基础性	应用性	可读性	可操作性
基础性	应用性	可读性	可操作性

作为财经管理专业的高职高专学生，在未来的经济建设大潮中将形成一个人数众多、富有朝气的银领阶层。在资源有限的市场经济环境下，机遇与风险并存，他们既需要具备娴熟的专业操作技能和丰富的商场实战经验，也需要具有最基本的经济量化分析和判断能力，才能准确地把握各种经济信息所蕴含的机遇，在激烈的市场竞争中洞察秋毫、掌握主动。

我们编撰《经济应用数学》教材的初衷，就是为高职高专学生提供一部以经济应用为主旨，以量化分析为引导，定位高职的基础性读本，以满足经济技术型人才对数学知识的基本需求。

由于数学的抽象性以及长期以来数学教学与专业应用的脱节，高职学生在学习数学时不能真正感受到数学对他们所学专业的作用，对数学普遍缺乏兴趣，甚至感到畏惧，他们学习数学往往比较被动；与此同时快速发展的市场经济和高职层次经济管理人才的需求对经济应用数学教材提出了多元化、超前化、专业化、精简化、高效化的改革要求。在中国高等职业技术教育研究会基础课改革工作委员会和高等教育出版社的指导下，我们确定了“定位高职，融通学科体系；面向经济，引导量化分析”的教材编写原则。

定位高职，融通学科体系，就是以人为本，以高职学生的基础状况和实际需要为依据，尊重学科但不拘泥于学科，突破数学与专业的学科界限，增进数学与经济的互动交融，不为追求系统而面面俱到；以高职学生的可接受程度为尺度标杆，以形象直观化和通俗情理化铺叙知识脉络主线，避免艰涩繁琐的理论推导；注重淡化严密性的教学设计，选用的材料经过深入的改造与处理，对于难度不同的内容，以效果为判据，采用灵活多样的叙述方式，引导学生在自然亲和的数学环境中步入经济技术应用的广阔天地。

面向经济，引导量化分析，就是以能力为本，将教材定位在为经济、管理专业服务上，强化经济应用信息，引导经济定量分析最基本的思维、表达、交流和方法；对于教材内容的设计和知识体系的演绎，以经济专业需求为主导，改革为讲数学而讲经济的模式，紧扣操作性和应用性，集中了必需够用的数学核心技术；融入建模思想，实施案例驱动，还原数学应用广泛的本色，让学生感到数学实实在在就在身边，而且是为他们掌握专业技能、步入职业生涯搭建的台阶，是他们搏击经济浪潮的强劲翅膀。

由于目前各高职院校经济管理专业、课程的设置精彩纷呈，所需数学知识并不完全一致，因此我们在教材内容选材上以后继课程与经济应用需求定取舍为原则，力求覆盖面最大化。例如在经济领域涉及多指标、多变量的问题居多，因此多元微分、多元极值、多元线性回归等均列入本教材；在经济系统运筹中具有重大实用价值的影子价格、灵敏度分析等也未作删除省略。我们以实用案例为驱动，通俗语言作铺叙，降解数学上的理论抽象，获取更广泛的应用知

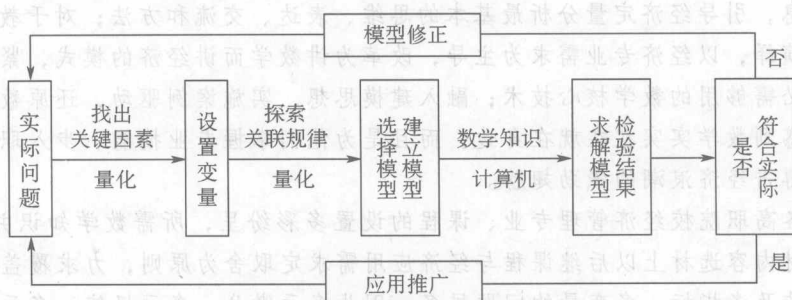
识面，力求最大限度地实现基础服务于专业、数学应用于经济的初衷。

总体框架设计为 8 个模块，可根据不同经济专业的教学计划进行多种模块搭建；同时考虑到各校各专业所开课程学时的不同，设计了建议学时分别为 98 和 54 的基本型与精简型两个版本，供教师在教学实践中参考，当然这两个版本的内容还可以根据各专业的动态需求进一步拆解整合。

经济应用点	适用专业	基本模块	建议学时	
			基本型	精简型
经济量化模型，银行复利、乘数原理	经济、财会、 管理类通用 基础	函数极限	10	26
边际分析与弹性分析		导数微分	12	
经济优化模型，经济图像解读		导数应用	12	
经济积累效应，非均匀系统运行		积分，微分方程	14	
市场随机规律量化分析，风险决策	财会、营销、 保险、管理	概率知识	10	14
估计与推断，回归预测控制		统计方法	12	
多元线性模型，经济系统分析	农资，物流， 企管等	矩阵方法	16	14
单纯形法，对偶方法，影子价格，灵敏度分析		线性规划	12	
合 计			98	54

本教材的编撰旨在为高职学生修习《经济应用数学》课程提供一个基础平台，同学们站在这个平台上，切勿局于一隅，简单地、被动地去继承数学知识，而要从概念中解读本质内涵，从理论中感悟脉络关联，从案例中掌握应用技能，力求开阔视野，使自己在认知层面上实现从常量到变量、静态到动态、有限到无限、单因素到多因素、确定到随机、感知到应用的提升，为未来踏上知识更新、实践创新和可持续发展的更高平台夯实基础。

我国著名科学家钱伟长说过：“我们是以解决实际问题为己任的”。数学建模是由数学通往应用的桥梁，数学建模并不高深莫测，中学里我们都做过列方程解应用题的题目，其中列方程就是建模的雏形和缩影，数学建模则是变量众多、关系错综、所需数学知识更丰富的大型应用题，二者并无明确界限，解决问题的线路基本相同。



在阅读本教材时，同学们要尽量关注衬托数学知识的经济背景，有意识地从经济案例量化分析中汲取建模思想方法，逐步培养拨开经济迷雾、捕捉关键信息、洞察内在规律的敏感性和

判断力。

我们感谢欧亚科学院院士、华东师范大学张莫宙教授撰写的“致本书读者”序言，作为著名数学教育家，张莫宙先生始终关注着我国高等职业教育和数学普及教育事业的发展，他的序言浅显亲切，寓意深刻，既是引导高职学生爱数学、学数学、在生活实践中感悟和运用数学的指南，也是对我们数学教育工作者努力探索教学改革新思路的勉励与鞭策。

感谢本书的主审，南通职业大学朱文辉教授对书稿提出的大量建设性意见和建议。

全书统稿工作由南通职业大学的陈刚承担并任主编，由高峻嶒、马怀远、沈跃云、吴彬、冯晨任副主编。按本书章节顺序，参加编写的有：冯晨(南京信息职业技术学院)，高峻嶒(南京工业技术职业学院)，马怀远、沈跃云、韩彦林、熊建华(江苏经贸职业技术学院)，吴彬、陈刚(南通职业大学)。

编写教材是百年树人的教育工程中的重要项目，我们如履薄冰。书稿虽经多次推敲、反复校对，仍难免有纰漏不妥之处，期待着读者的批评指正，在此表示衷心感谢。

作者

2008年4月

118 市代其数量变用解... 四
 123 脚... 已... 五
 124 2-2 题区

125 市代其数量变用解... 3-2 题
 129 数... 一
 131 数... 二
 131 市代其数量变用解... 三
 132 3-2 题区
 133 区... 五章区

第一章 函数——经济量化模型 1

§ 1-1 函数与经济函数 1

- 一、函数的概念 1
- 二、函数的性质 4
- 三、经济函数及其模型的建立 6
- 习题 1-1 9

§ 1-2 极限与趋势分析 9

- 一、极限及其计算 9
- 二、重要极限 14
- 三、无穷小的比较 15
- 四、函数的连续性 16
- 五、银行复利与投资乘数原理 17
- 习题 1-2 19

第一章复习题 20

第二章 导数——边际与弹性分析 21

§ 2-1 函数的导数 21

- 一、导数的概念及其计算 21
- 二、导数的用途 26
- 三、高阶导数 28
- 四、隐函数的导数 29
- 五、多元函数的偏导数 30
- 习题 2-1 32

§ 2-2 微分与全微分 33

- 一、一元函数的微分 33
- 二、多元函数的全微分 36
- 习题 2-2 38

§ 2-3 边际与弹性 38

39 代得宝不 1-4 题
 39 代得宝不... 一
 70 发公本基... 二
 70 得... 三
 73 科系... 四
 73 1-4 题区
 73 式... 5-4 题
 73 者... 一
 77 总... 二

一、边际的概念 38

二、弹性与弹性分析 40

习题 2-3 43

第二章复习题 43

第三章 导数应用——经济图像解读 45

§ 3-1 微分中值定理 45

- 一、罗尔定理 45
- 二、拉格朗日定理 46
- 三、柯西定理 46
- 习题 3-1 47

§ 3-2 函数变化的性态 47

- 一、升降的变化与函数的单调性 47
- 二、波动的峰谷与函数的极值 49
- 三、弯曲的方向与曲线的凹凸性 52
- 习题 3-2 54

§ 3-3 经济中的图像分析 54

- 一、图像与函数性态分析 54
- 二、需求—供给曲线及其应用 57
- 习题 3-3 58

§ 3-4 经济中的优化方法 58

- 一、函数的最大值与最小值 58
- 二、经济优化问题中的边际分析 60
- 三、条件极值与拉格朗日乘数法 62
- 习题 3-4 64

§ 3-5 未定式与洛必达法则 65

习题 3-5 67

第三章复习题 67

第四章 积分——变化积累效应 69

§ 4-1 不定积分	69	四、连续型随机变量及其分布	118
一、原函数与不定积分	69	五、正态分布与 3σ 原则	122
二、不定积分的基本公式	70	习题 5-2	124
三、不定积分的性质	70	§ 5-3 随机变量的数字特征	125
四、不定积分与边界条件	72	一、数学期望	125
习题 4-1	72	二、方差与标准差	129
§ 4-2 不定积分的方法	73	三、随机变量的极限性质	131
一、换元积分法	73	习题 5-3	132
二、分部积分法	77	第五章复习题	133
习题 4-2	79	第六章 统计——局部推断总体	135
§ 4-3 定积分及其计算	80	§ 6-1 点估计与区间估计	135
一、非均匀积累与定积分	80	一、随机样本与统计量	135
二、微积分基本公式	83	二、点估计	139
三、定积分的换元法与分部积分法	85	三、区间估计	141
四、函数的平均值	86	习题 6-1	144
五、广义积分	87	§ 6-2 假设检验	145
习题 4-3	88	一、假设检验的一般步骤	145
§ 4-4 定积分的应用	89	二、正态总体均值与方差的假设检验	147
一、几何问题的微元分析	89	三、两个正态总体的参数检验	150
二、积累效应的微元分析	92	四、非参数检验	153
习题 4-4	93	习题 6-2	155
§ 4-5 微分方程与系统运行模型	94	§ 6-3 线性回归分析	156
一、微分方程的概念	94	一、最小二乘法	156
二、微分方程的求解	94	二、线性化方法	158
三、系统运行模型	97	三、相关性检验	160
习题 4-5	100	四、预测与控制	161
第四章复习题	100	五、多元线性回归	162
第五章 概率——随机定量技术	102	习题 6-3	164
§ 5-1 随机事件及其概率	102	第六章复习题	165
一、随机事件及其运算	102	第七章 矩阵——多元线性运算	167
二、事件的概率	105	§ 7-1 行列式	167
三、事件的独立性	107	一、二阶、三阶行列式	167
四、全概率公式	110	二、克拉默法则	169
习题 5-1	112	三、 n 阶行列式的性质与计算	169
§ 5-2 随机变量及其分布	114	习题 7-1	174
一、事件的数量表示与随机变量	114	§ 7-2 矩阵	175
二、离散型随机变量及其分布	114	一、矩阵及其运算	175
三、保险项目的风险评估	118	二、矩阵的初等行变换	180

三、矩阵的秩	180	§ 8-2 单纯形法	204
四、逆矩阵	182	一、单纯形法的基本概念和操作过程 ..	204
习题 7-2	185	二、单纯形法的基本原理与算法步骤 ..	207
§ 7-3 线性方程组	186	三、松弛变量与形式的标准化处理	208
一、求解线性方程组的矩阵变换法	186	习题 8-2	210
二、齐次线性方程组与基础解系	188	§ 8-3 对偶及其经济意义	211
三、非齐次线性方程组解的结构	190	一、对偶单纯形法	211
习题 7-3	192	二、对偶规划	213
§ 7-4 多元线性运算实用例解	193	三、影子价格	215
一、凯恩斯国民收入模型	193	习题 8-3	217
二、采购成本	194	§ 8-4 灵敏度分析	218
三、实际问题例解	194	一、灵敏度分析的概念	218
习题 7-4	197	二、基逆矩阵及其作用	219
第七章复习题	197	三、灵敏度分析的方法	221
第八章 线性规划——经济系		习题 8-4	224
统运筹	199	第八章复习题	225
§ 8-1 线性规划模型与几何解法 ..	199	习题答案	228
一、线性规划的概念与数学模型的建立	199	附录 1 排列组合知识	242
二、双变量线性规划的几何解法	202	附录 2 附表	246
习题 8-1	203	参考文献	255

第一章

函数——经济量化模型

在当今经济迅猛发展的时代，人们越来越关心各类经济变量指标及其变化态势，如股票指数、房价指数、企业的成本利润、国内经济产值GDP、物价指数CPI等，而各个指标都与诸多因素相关联，这些因素按照一定的规律影响和制约着指标的变化和发展。定量地分析经济变量指标的规律，是掌握市场竞争主动权的重要基础。经济指标变量变化的基本数学模型就是函数，函数的极限思想则是经济趋势分析的重要数学基础。

§ 1-1 函数与经济函数

一、函数的概念

如果两个变量 x 和 y 之间有某种对应规律相联系，那么就称变量 x 和 y 存在函数关系。通常用 x 表示自主性变量，即 x 确定时 y 随之确定， x 变动时 y 随之变动， x 是自变量， y 是因变量，两者的函数关系记作 $y=f(x)$ ，称 y 为 x 的函数。

这里的字母 f 不表示一个数，而是代表变量 x, y 间的对应规律。例如函数 $y=x^2+1$ 的对应规律是“平方后加1”，可形象地理解为 $f=()^2+1$ 。在函数记号 $y=f(x)$ 中，对应规律 f 是最关键的，而 x, y 换成其他字母并不改变函数的属性，一个函数区别于其他函数，就是因为对应规律不同，所以实际上应该把 f 叫做函数。

不要把函数关系简单地理解为因果关系。因果关系可以表现出对应规律，但对对应规律未必是前因后果。图 1-1 是上海证券交易所某公司股票在一个交易日中的成交价变动曲线，时间 t 是自变量，股票成交价格 P 是因变量，在一个确定的时间点，股票价格是确定的，能够在曲线上找到对应的点，随着时间的变动，股价也跟着变动，所以图 1-1 表示一个函数 $P=f(t)$ 。但是时间绝不是形成股票价格的原因，决定股价的因素很多，如公司经营状况、宏观经济形势、监管政策导向、买卖需求数量、市场炒作影响……。

图 1-1 表示的函数还有一个特点，就是对应规律 f 很难用数学式子来表示，但这并不影响它成为函数。当然，我们研究函数，最好有一个具体的数学表达式，以便进行量化分析。以后我们着重讨论有数学表达式的函数。

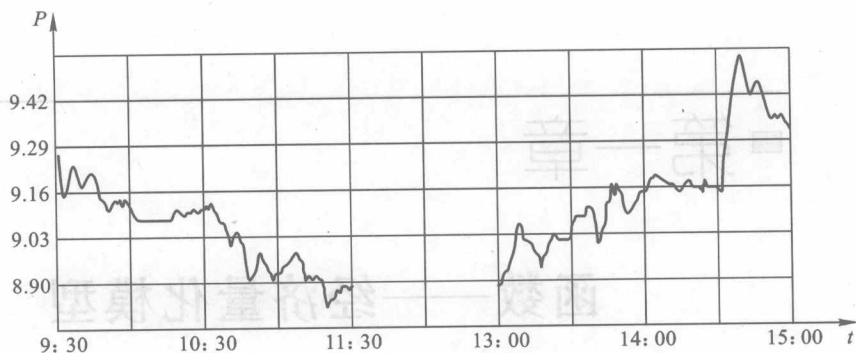


图 1-1 股票成交价随时间变动的情况

如果一个经济指标变量 y 的变化是由单个因素 x 的变动引起, x 按照一定的规律 f 影响着 y , 那么我们就可以建立函数模型 $y=f(x)$, 通过对模型的分析求解来预测指标变量 y 的变化趋势, 或者通过选择、调整和控制 x 来实现 y 的某个目标.

在现实经济生活中, 影响一个经济指标 y 的因素往往会有很多个, 为了抓住主要矛盾便于分析处理, 首先要根据有关信息进行因素过滤, 保留影响较大的关键因素, 剔除影响微弱的次要因素. 如果保留一个最主要的因素 x , 那就是上面所说的 $y=f(x)$, 也称为一元函数; 如果保留的重要因素不止一个, 如 x_1, x_2, \dots, x_n 都很重要, 这时指标变量 y 就有 n 个自变量, 它们的关系记为

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

叫做 n 元函数, 或多元函数. 我们主要讨论一元函数的性质, 并适当推广到多元函数.

在函数 $y=f(x)$ 中, 自变量 x 的变动总是有一个范围, 这个范围叫做函数 f 的定义域, 定义域一般记做 D . 例如图 1-1 函数的定义域由两个区间构成, 它们是 $9:30 \leq t \leq 11:30$ 和 $13:00 \leq t \leq 15:00$, 中午 11:30 到 13:00 交易所休市. 由于因变量 y 随着 x 变动, 所以 y 一定也有相应的变动范围, y 的变动范围叫做函数 f 的值域. 例如从图 1-1 可以查出股价最高为 9.54 元, 最低为 8.84 元, 中间没有跳空, 所以该函数的值域是 $8.84 \leq P \leq 9.54$.

在研究函数时, 首先要考虑它的定义域, 因为定义域是自变量的变化环境, 在定义域外研究函数是没有意义的.

对于用数学式子给出的函数, 通常约定函数的定义域是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合, 如函数 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$, 自变量 x 必须满足 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$, 即函数的定义域为 $D=[-2, -1) \cup (-1, 2]$. 这种建立在数学式子基础上的定义域又叫做解析定义域.

一般的, 求函数解析定义域的基本原则是:

(1) 分母不能为 0, $\frac{1}{P(x)} \Rightarrow P(x) \neq 0$;

(2) 偶数次根号下非负, $\sqrt[k]{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0 (k \in \mathbf{Z}_+)$;

(3) 对数的真数为正, $\log_a P(x) \Rightarrow P(x) > 0$;

(4) 反正弦和反余弦记号下的表达式相当于正弦值和余弦值, 其绝对值不超过 1, 即

$\arcsin P(x) \Rightarrow |P(x)| \leq 1$, $\arccos P(x) \Rightarrow |P(x)| \leq 1$.

对于具有实际背景的函数, 要根据变量的具体意义来确定定义域, 又称为可行域. 例如, 球体的体积 V 是半径 r 的函数 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, 它的可行域为 $D = (0, +\infty)$.

我们平时乘出租车“打的”按里程收费: 不超过 3 km, 收费 8 元, 叫做起步价; 超过 3 km 部分按每千米 0.60 元收取. 这样, “打的”费 y 与里程 x 的函数关系为

$$y = f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 3 \\ 8 + 0.60 \times (x - 3), & x > 3 \end{cases}$$

这个函数的图像由两段直线构成, 形成一条折线, 如图 1-2 所示.

这种在自变量的不同变化范围中, 对应规律用不同表达式表示的函数, 称为分段函数, 分段函数是用几个式子表示一个函数. 比如绝对值函数 $y = |x|$ 可表示为

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

这也是一个分段函数. 在上面的出租车收费问题中, 为了计算方便, 实际运营时都规定起步价以外“不足 1 km 按 1 km 计价”, 这样计费函数就成了分许多段的分段函数:

$$y = f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 3, \\ 8 + 0.60 \times 1, & 3 < x \leq 4, \\ 8 + 0.60 \times 2, & 4 < x \leq 5, \\ 8 + 0.60 \times 3, & 5 < x \leq 6. \\ \dots & \dots \end{cases}$$

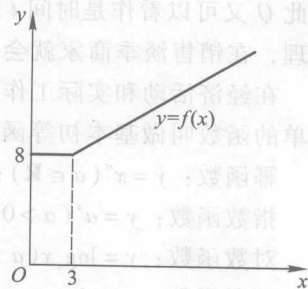


图 1-2 出租车计费函数

在现实经济活动中, 一个经济变量指标在不同的阶段按不同的规律变动, 这时我们就可以用分段函数来表示.

若函数关系直接由仅含自变量的算式表示, 那么把它叫做显函数. 如 $y = x + 2\sin x$, $y = |x - x^2|$ 等都是显函数, 又称函数的显式表示. 在很多情况下, 两个经济变量的相互关联不一定是显现的, 而是被制约在一个方程中, 如 $x^2 - 3y^2 = 1$, $y^5 + 3x^2y - x^4 + \sqrt{x} = 2$ 等. 这种以方程形式确定的函数 $y = f(x)$ 叫做隐函数, 又称函数的隐式表示, 即认为变量 x, y 之间的关系被“隐藏”在方程中, 要解出这个方程有时候可能很困难.

对于函数 $y = f(x)$, 有时我们需要反过来把 y 当作自变量, 根据 y 的取值来确定 x 的值, 不过按照习惯要用 x 表示自变量, 因此记作 $x = f(y)$, 这实际上是个隐函数. $x = f(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数. $y = f(x)$ 和 $x = f(y)$ 中的对应规律 f 是一样的, 但是对应方向发生了变化, 所以还是认为它们是不同的函数, 反函数 $x = f(y)$ 也可记为 $y = f^{-1}(x)$. 如果 $y = f(x)$ 是一个数学表达式, 从 $x = f(y)$ 中解出 $y = f^{-1}(x)$, 其表达式显然与 $y = f(x)$ 不同, 例如 $y = x^3 + 5$ 的反函数是 $x = y^3 + 5$, 解出 y 成了 $y = \sqrt[3]{x-5}$.

设有两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$, y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数, 我们把这个函数称作是由函数 f 和 φ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$. 两个函数进行复合实际上

是一种运算,称之为**复合运算**.复合运算与除法运算、开方运算等类似,也有可行与否的问题,两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合运算要求 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成,还可以由多个函数复合而成.复合函数刻画了变量之间多层次的联络和制约关系.反过来,对于一个复杂的函数,可以将它分解为若干层,通过对各层简单函数的分析来了解、掌控总函数的变化性态,这也是研究复杂经济变量的一个常用方法.

例如销售收入 R 是销售量 Q 的函数 $R=R(Q)$, 有很多产品的销售量与时间、季节有关,因此 Q 又可以看作是时间 t 的函数 $Q=Q(t)$, 于是 $R=R[Q(t)]$, 成了复合函数.明白了这个道理,在销售淡季商家就会主动策划各种促销活动来提高产品销量 Q , 从而增加收入 R .

在经济活动和实际工作中,我们会遇到多种多样的函数,有的简单,有的复杂,我们把最简单的函数叫做**基本初等函数**,以下五类函数统称为**基本初等函数**.

幂函数: $y=x^a (a \in \mathbf{R})$;

指数函数: $y=a^x (a > 0, a \neq 1)$;

对数函数: $y=\log_a x (a > 0, a \neq 1)$;

三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

当对数函数的底数为 e 时,称之为**自然对数**,记为 $y=\ln x$, 这里 $e=2.71828\cdots$ 是一个重要常数,以后我们经常要和它打交道.

对若干个基本初等函数进行运算,得到的函数当然要复杂一些,应当把“基本”两个字去掉,成为初等函数,说得明确点就是:由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的函数,称为**初等函数**.初等函数的数学表达式未必简单,但是它的运算结构很“初等”,因而具有许多良好的性质,是经济函数模型的主要依据.

初等函数最明显的特征是能够用一个式子来表示,这也是判定初等函数的简便方法.例如, $y=\sqrt{4-x^2}, y=\ln \sin \frac{\pi}{2}x, y=\frac{x+2}{3x^2}$ 等都是初等函数.初等函数是常见和常用的函数,而基本初等函数则是这些函数最基本的组成单元.当然基本初等函数本身也是初等函数.

例 1.1 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$, 将 y 表示成 x 的函数.

解 u 和 v 都是中间变量,逐层代入便得到 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 1.2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y=\sin^2(x+1)$.

解 (1) 从外往里逐层用中间变量替换得到: $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 由 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=x^2+1$ 复合而成;

(2) $y=\sin^2(x+1)$ 由 $y=u^2, u=\sin v, v=x+1$ 复合而成.

二、函数的性质

1. 函数的单调性

对于函数 $y=f(x)$, 如果随着 x 的增加, y 也增加, 则称函数 $f(x)$ 是**单调增加**的; 如果随

着 x 的增加, y 反而减少, 则称函数 $f(x)$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

单调性的概念也可以用数学不等式描述: 函数 $f(x)$ 单调增加, 意味着对于任意两点 x_1 和 x_2 , 只要 $x_1 < x_2$, 便有 $f(x_1) < f(x_2)$; 函数 $f(x)$ 单调减少, 意味着对于任意两点 x_1 和 x_2 , 只要 $x_1 < x_2$, 便有 $f(x_1) > f(x_2)$.

从几何直观上看, 单调增加函数的曲线沿 x 轴正向从左往右向上攀升, 简称上升; 单调减少函数的曲线沿 x 轴正向从左往右向下走低, 简称下降. 例如图 1-3 所示, 函数 $y = \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内单调增加; 函数 $y = x(4-x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 内单调增加, 在区间 $(2, +\infty)$ 内单调减少, 但 $y = x(4-x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内, 不是单调函数.

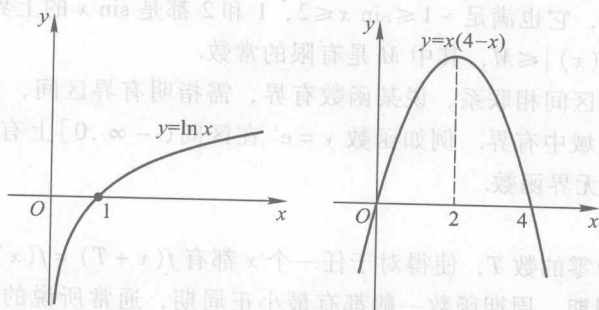


图 1-3 函数的单调性

函数的单调性应与区间相联系, 说某函数单调, 需指明单调区间, 比如“函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加”. 如果不指明单调区间, 则认为函数在整个定义域中单调.

在市场上, 某种商品的销售量 Q 随该商品的价格 P 变化, 而且一般来说价格上涨, 消费者就会减少购买而使销售量下跌, 反之降价会带来销售量的提高, 因此函数 $Q = f(P)$ 通常是一个单调递减函数.

2. 函数的奇偶性

对于任意 x , 若 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数. 当然偶函数、奇函数的定义域 D 应该关于原点对称.

偶函数的图像关于 y 轴对称; 奇函数的图像关于原点对称. 例如 $y = x^2$ 是偶函数, $y = x^3$ 是奇函数, 它们的图像如图 1-4 所示.

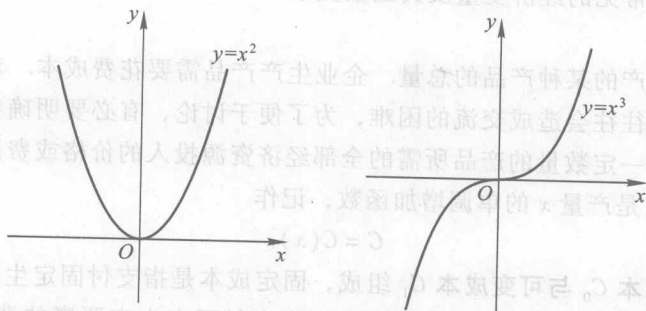


图 1-4 偶函数与奇函数