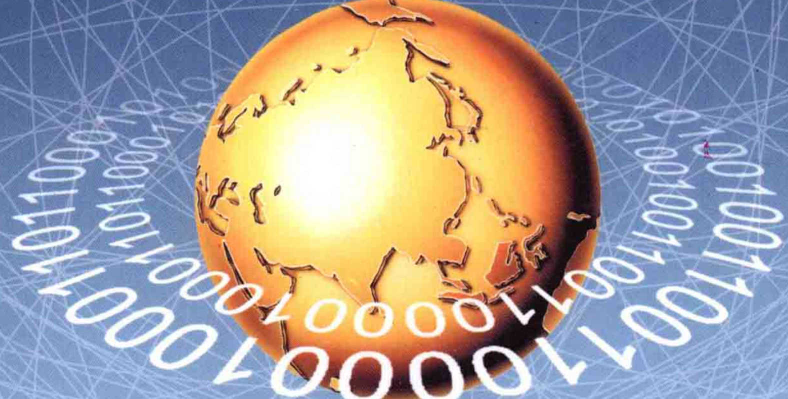
信息与计算科学专业系列教材

数值计算方法学习指导书

知 识 要 点 · 典 型 例 题 详 解 · 模 拟 试 题

邹秀芬　陈绍林　胡宝清　向华　编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

信息与计算科学专业系列教材

数值计算方法学习指导书

知识要点·典型例题详解·模拟试题

邹秀芬　陈绍林　胡宝清　向华　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法学习指导书/邹秀芳,陈绍林,胡宝清,向华编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.8
信息与计算科学专业系列教材
ISBN 978-7-307-06469-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①邹… ②陈… ③胡… ④向… Ⅲ.数值计算—计算方法—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 122067 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:王　建　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂
开本:720×980　1/16　印张:16　字数:282 千字　插页:1
版次:2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06469-0/O·389　　定价:23.00 元

内 容 简 介

本书是与武汉大学出版社出版的教材《数值计算方法》相配套的学习辅导书。为理工科院校各专业的学生在学习“数值分析”或“计算方法”课程时，更好地理解课程内容、掌握知识要点，提高解题技巧而打下基础。本书包括误差分析、线性方程组的数值解法、非线性方程（组）的数值解法、插值法、函数逼近、曲线拟合、数值积分、常微分方程的数值解法、矩阵特征值问题的数值方法等内容一共九章。每章都由基本要求、知识要点和典型例题详解三部分组成。在各章基本要求部分，简明扼要地列出了本章的要求和要掌握的知识点；在知识要点部分，系统地归纳了本章所涉及的重点内容，并进行了总结和评注；在典型例题详解部分，选择了丰富的能巩固本课程内容的典型例题，并作详细的分析与解答，许多题目还给出了多种解法和用 Matlab 数学软件的计算方法。书末附 3 份模拟试卷及其参考解答。

本书除了对教材的主要习题进行了解答外，还对教材的重难点内容补充了大量的例题，并给出了解题思路。凡是典型例题详解部分涉及的相关定理和性质都已在知识要点中列出，因此对教材具有相对的独立性。可作为理工科各专业本科生及研究生学习数值分析或计算方法课程时的辅导书，还可供从事科学与工程计算的科技人员自学时使用，对准备考研的人员也有很好的参考价值。

前　言

在“数值分析”或“计算方法”课程的学习过程中，学生常常对某些知识的理解以及部分习题的推理论证感到较为困难。为了帮助学生能更好地理解数值计算方法的基本内容，开拓思路，提高解题技巧，并灵活运用所学知识解决问题，我们参考教育部关于理工科学生“数值计算方法”课程基本要求，根据多年的教学经验，编写了这本与武汉大学出版社出版的教材《数值计算方法》相配套的学习指导书。

本书包括误差分析、线性方程组的数值解法、非线性方程（组）的数值解法、插值法、函数逼近、曲线拟合、数值积分、常微分方程的数值解法、矩阵特征值问题的数值方法等内容。每章都由基本要求、知识要点和典型例题详解三部分组成。在各章基本要求部分，提出了本章的要求和要掌握的知识点；在知识要点部分，系统地归纳了本章所涉及的重点内容，并进行了总结和评注；在典型例题详解部分，选择了丰富的能巩固本课程内容的典型例题，并作详细的分析与解答，许多题目还给出了多种解法和用 Matlab 数学软件的计算方法。书末附三份模拟试卷及其参考解答。

本书第一章、第二章和第九章由邹秀芬老师编写，第四章和第五章由陈绍林老师编写，第六章和第七章由胡宝清老师编写，第三章和第八章由向华老师编写。模拟试题及解答由邹秀芬老师、冯慧老师和孙乐林老师共同编写。全书由邹秀芬老师定稿。

武汉大学信息与计算科学系冯慧老师、孙乐林老师、郑慧娆老师、莫忠息老师和黄象鼎老师对本书的内容提出了宝贵的意见；武汉大学出版社责任编辑顾素萍、谢云琳为本书的出版给予了大力支持并付出了辛勤劳动，在此一并致谢。

由于作者才疏学浅，书中难免有疏漏及不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者
2008 年 1 月
于武汉大学

目　录

第一章 基本知识

1.1 基本要求

本章要求掌握绝对误差、相对误差和有效数字的基本概念. 掌握向量范数，矩阵范数及状态数（条件数），矩阵序列的极限的概念、性质和有关重要结论，学会用范数来分析方程组的性态.

1.2 知识要点

一、误差的基本概念

1. 绝对误差与相对误差

用x^*表示一个精确数，x表示x^*的近似数，$\Delta x = x - x^*$表示x与x^*的误差. 分别称$\varepsilon = |\Delta x|$，$\xi = \left|\dfrac{\Delta x}{x^*}\right|$为近似数$x$的绝对误差和相对误差.

2. 有效数字

若近似数x关于其精确数x^*满足$|x - x^*| \leq \dfrac{1}{2} \times 10^{-k}$，则称$x$近似表示$x^*$时精确到小数点后的第$k$位. 从这位（包括第$k$位）数字起，直至该数最左端的非零数字之间的所有数字，称为该近似数的有效数字.

3. 有效数字与绝对误差、相对误差的关系

有效数字越多，绝对误差与相对误差越小.

4. 算法的数值稳定性

一个算法如果输入数据有扰动(即有误差),而计算过程中舍入误差不增长或可以控制,则称此算法是数值稳定的,否则称此算法为不稳定的.

5. 数值计算中的注意事项

(1) 避免两个相近的数相减,防止有效数字的损失.

(2) 绝对值太小的数不宜作除数,防止数值超出计算机能表示的数值范围而发生"溢出".

(3) 防止大数"吃掉"小数.

(4) 简化计算程序减少运算次数,以减少误差积累.

(5) 选用数值稳定性好的算法.

二、向量范数与矩阵范数

1. 向量范数

(1) 定义

设V是数域$\mathbf{K}$(实数域$\mathbf{R}$或复数域$\mathbf{C}$)上的一个n维向量空间. 若对任一$\boldsymbol{x}\in V$,有一个非负实数$\|\boldsymbol{x}\|$与之对应,满足:

① $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$时$\|\boldsymbol{x}\|>0$,当且仅当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时$\|\boldsymbol{x}\|=0$(非负性);

② $\forall\lambda\in\mathbf{K}$,$\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$(齐次性);

③ $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$(三角不等式),

则称$\|\cdot\|$为V上的一个向量范数.

(2) V中常用向量范数

设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V$.

1-范数: $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$;

2-范数: $\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x_i}x_i}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}$;

∞-范数: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$.

一般的 Hölder 范数(或p-范数): $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1\le p<\infty$.

2.(有限维空间中的)矩阵范数

(1) 定义

设$M=V\times V$表示数域$\mathbf{K}$上n阶矩阵全体形成的n^2维线性空间. 若对任

一$A\in M$，有一非负实数$\|A\|$与之对应，满足

① $A\neq O$时$\|A\|>0$，当且仅当$A=O$时$\|A\|=0$；

② $\forall\lambda\in\mathbf{K}$，$\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$；

③ $\forall A,B\in M$，$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$，

则称$\|\cdot\|$是M上的一个矩阵范数. 若还满足

④ $\forall A,B\in M$，$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$（相容性条件），

则称$\|\cdot\|$是M上的相容矩阵范数（若无特别说明，本书矩阵范数均指相容矩阵范数）.

(2) 矩阵范数与向量范数的相容性

设$A\in M$，$\|A\|_\alpha$是矩阵范数. $x\in V$，$\|x\|_\beta$是向量范数，若

$$\|Ax\|_\beta\leq\|A\|_\alpha\|x\|_\beta,$$

则称矩阵范数$\|\cdot\|_\alpha$与向量范数$\|\cdot\|_\beta$相容.

(3) Frobenius 范数（或 F-范数）

设$A\in M$，$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ 是 Frobenius 范数.

① 设$\alpha_j,\beta_i^{\mathrm{T}}$分别为$A$的列向量和行向量，则

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|_2^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|\beta_i\|_2^2}$$
$$=\sqrt{\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)}.$$

② $\|A\|_F$是相容的矩阵范数，即满足

$$\|AB\|_F\leq\|A\|_F\|B\|_F.$$

③ $\|A\|_F$与向量 2-范数相容，即满足

$$\|Ax\|_2\leq\|A\|_F\|x\|_2.$$

(4) 从属于已知向量范数的矩阵范数

设$\|\cdot\|$是V上已知的任一种向量范数，则对一切$A\in M$，$\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$确定的非负实数定义了$M$上的一种矩阵范数，记为$\|A\|$，且有

$$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|,$$

称$\|A\|$为从属于已知向量范数$\|x\|$的矩阵范数，或由向量范数$\|x\|$产生的算子范数、诱导范数.

(5) 三种常用的从属矩阵范数

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M$，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}.$$

(6) 三个重要定理

定理 1.1 设$\boldsymbol{A}\in M$，$\rho(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的谱半径，$\|\boldsymbol{A}\|$是M上任意的一种矩阵范数，则有$\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|$.（谱半径$\rho(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的特征值按模最大者，设$\boldsymbol{A}$的特征值集合为$\sigma(\boldsymbol{A})$，则$\rho(\boldsymbol{A})=\max\{\,|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$）.

注 此定理在特征值与范数的相关结论的证明中经常用到.

定理 1.2 $\|\cdot\|$是从属的矩阵范数，$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵且$\|\boldsymbol{A}\|<1$，则必有$\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{A}$可逆，且$\|(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{A})^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$.

注 此定理保证方程$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$唯一可解，它与后面压缩映射原理密切相关.

定理 1.3 设$\boldsymbol{A}$是n阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{E}$是任意n阶矩阵. 若$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\|<1$，那么$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$也非奇异，且

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\le\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\|}.$$

注 此定理给出了扰动方程组（包含非线性扰动）的可解性，而且给出了扰动矩阵的逆阵的误差，它是某些非线性方程组线性化的基础.

3. 矩阵序列的极限

(1) 矩阵序列的极限定义

设$\{\boldsymbol{A}_k\}$是n阶矩阵序列，其中$\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})$.又设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$n$阶矩阵. 如果$\lim\limits_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$的极限. 如果一个矩阵序列有极限，则称这个矩阵序列是收敛的.

(2) 收敛矩阵的定义

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，若矩阵序列$\{\boldsymbol{A}^k\}$收敛到零矩阵，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是收敛的.

(3) 相关的结论

定理 1.4 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，则$\boldsymbol{A}$收敛的充要条件是$\boldsymbol{A}$的谱半径$\rho(\boldsymbol{A})<1$.

定理 1.5（逆算子定理） 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\|\cdot\|$是一矩阵范数. 若

$\|A\|<1$，则矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}A^k$和矩阵 A 是收敛的，且$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$.

三、方程组的性态与条件数

1. n 阶非奇异矩阵的状态数（或条件数）

设 A 是 n 阶非奇异矩阵，称$\|A\|_\alpha\|A^{-1}\|_\alpha$为矩阵 A 关于范数$\|\cdot\|_\alpha$的状态数或条件数，记为$\mathrm{cond}_\alpha(A)$.

2. 解向量扰动与右端向量扰动的相对误差之间的关系

当右端向量 b 有扰动δb时，则解的扰动δx与δb有下列关系：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|}\le \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

3. 解向量扰动与系数矩阵扰动的相对误差之间的关系

当系数矩阵 A 有扰动δA时，若$\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$，则解的扰动δx与δA有下列关系：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|}\le \frac{\mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

4. 方程组的性态

非奇异方程组系数矩阵的条件数越大，称该方程组的求解问题越病态，反之越良态.

1.3 典型例题详解

1.3.1 误差的基本概念

例 1.1 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，问计算$f(30)$的值时绝对误差有多大？若改用另一等价公式$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，问计算$f(30)$的值时绝对误差有多大？（计算过程取 6 位有效数字）

分析 本题属于基本的计算题，考查绝对误差的定义以及与有效数字的关系. 本题有两种解法：一种是直接按照绝对误差的定义来解；另一种是利

用有效数字与绝对误差的关系及函数的相关性质来估计出绝对误差.

解法 1　(1) 用公式 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$. 令 $y(x)=x-\sqrt{x^2-1}$，$f(x)=\ln y(x)$. 若计算过程取 6 位有效数字，则 $\sqrt{30^2-1}$ 的近似值为 29.983 3，从而得到 $y(30)$ 的近似值 $y_0=0.016\ 7$.

再计算 $\ln y_0$ 的近似值 $f_0=-4.092\ 35$，因此得到 $f(30)$ 的近似值为 $-4.092\ 35$. 而 $f(30)$ 的精确值为 $-4.094\ 066\ 668\ 632\ 06$，因此计算 $f(30)$ 的值时绝对误差为

$$|f(30)-f_0|=|-4.094\ 066\ 668\ 632\ 06+4.092\ 35|$$
$$=1.720\ 17\times10^{-3}.$$

(2) 若改用公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. 令

$$u(x)=x+\sqrt{x^2-1}, \quad f(x)=-\ln u(x),$$

则当 $x=30$ 时，得到 $u(30)$ 的近似值 $u_0=59.983\ 3$.

再计算 $\ln u_0$ 的近似值 $z_0=-4.094\ 07$，从而得到 $f(30)$ 的近似值为 $-4.094\ 07$. 因此计算 $f(30)$ 的值时绝对误差为

$$|f(30)-z_0|=|-4.094\ 066\ 668\ 632\ 06+4.094\ 07|$$
$$=3.331\ 368\times10^{-6}.$$

解法 2　(1) 令 $y(x)=x-\sqrt{x^2-1}$，$f(x)=\ln y(x)$.

当 $x=30$ 时，若计算过程取 6 位有效数字，则得到 $y(30)$ 的近似值 $y_0=0.016\ 7$. 因此根据有效数字与绝对误差的关系知，计算 $y(30)$ 的绝对误差为

$$|y(30)-y_0|\le\frac{1}{2}\times10^{-4}.$$

计算 $\ln y_0$ 的绝对误差为

$$|\ln y_0-f_0|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}.$$

用 Lagrange 中值定理，$f(30)-\ln y_0=\dfrac{1}{\xi}(y(30)-y_0)$，其中 ξ 介于 $y(30)$ 与 y_0 之间. 计算 $f(30)$ 的绝对误差为

$$|f(30)-f_0|\le|f(30)-\ln y_0|+|\ln y_0-f_0|$$
$$\le\frac{|y(30)-y_0|}{|\xi|}+|\ln y_0-f_0|$$

$$\le \frac{|y(30)-y_0|}{|y_0|} + |\ln y_0 - f_0|$$
$$\le 0.299\ 451 \times 10^{-2}.$$

(2) 若改用公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，令

$$u(x) = x+\sqrt{x^2-1}, \quad f(x) = -\ln u(x),$$

则当 $x=30$ 时，得到 $u(30)$ 的近似值 $u_0 = 59.983\ 3$. 因此计算 $u(30)$ 的绝对误差为

$$|u(30)-u_0| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}.$$

计算 $\ln u_0$ 的绝对误差为

$$|\ln u_0 - z_0| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5},$$

从而

$$\begin{aligned} |f(30)-z_0| &\le |f(30)-\ln u_0| + |\ln u_0 - z_0| \\ &\le \frac{|u(30)-u_0|}{|u_0|} + |\ln u_0 - z_0| \\ &\le 5.833\ 57\times 10^{-6}. \end{aligned}$$

注 (1) 从两种方法的计算结果来看，改写后的公式比原公式的计算结果误差小得多，此例说明两个相近的数 x 与 $\sqrt{x^2-1}$ 相减时由于有效数字的损失会产生较大的误差. 为了避免这种情形，将公式改写成另外一种形式，就能得到误差较小的结果.

(2) 计算过程中的误差由开平方和取对数两部分构成，因此在用第二种解法来估计总的绝对误差时应考虑这两部分，否则就得不到与解法 1 一致的结果.

例 1.2 计算用反正切函数 $\arctan x$ 的 Maclaurin 级数的前三项和 $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$ 近似代替 $\pi = 4\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$ 时的绝对误差和相对误差(计算过程取 7 位有效数字).

分析 这是一个基本的计算题，按照绝对误差和相对误差的定义计算即可.

解 令 $L(x) = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$，则

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = 0.464\ 583\ 3, \quad L\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321\ 810\ 7.$$

因此

$$\pi=4\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)\approx 3.145\ 576.$$

绝对误差为

$$|\pi-3.145\ 576|\approx 3.983\ 346\times 10^{-3}.$$

相对误差为

$$\frac{|\pi-3.145\ 576|}{|\pi|}\approx 1.267\ 939\times 10^{-3}.$$

例 1.3 已知方程

$$f(x)=1.01\ \mathrm{e}^{4x}-4.62\ \mathrm{e}^{3x}-3.11\ \mathrm{e}^{2x}+12.2\ \mathrm{e}^{x}-1.99. \tag{1.1}$$

可将此方程改写成

$$f(x)=(((1.01\ \mathrm{e}^{x}-4.62)\ \mathrm{e}^{x}-3.11)\ \mathrm{e}^{x}+12.2)\ \mathrm{e}^{x}-1.99. \tag{1.2}$$

若计算过程中保留三位有效数字，且假定$\mathrm{e}^{1.53}=4.62$，分别利用(1.1)和(1.2)式计算$f(1.53)$的近似值，并与精确值的三位数结果$f(1.53)=-7.61$进行比较.

解 利用$\mathrm{e}^{1.53}=4.62$，得到

$$\mathrm{e}^{2(1.53)}=21.3,\quad \mathrm{e}^{3(1.53)}=98.4,\quad \mathrm{e}^{4(1.53)}=455.$$

利用(1.1)式计算，则

$$\begin{aligned}f(1.53)&=1.01\times 455-4.62\times 98.4-3.11\times 21.3+12.2\times 4.62-1.99\\&=-61.2+56.4-1.99=-6.79.\end{aligned}$$

利用(1.2)式计算，则

$$\begin{aligned}f(1.53)&=(((1.01\times 4.62-4.62)4.62-3.11)4.62+12.2)4.62-1.99\\&=(-13.3+12.2)4.62-1.99=-7.07.\end{aligned}$$

利用(1.1)式计算的绝对误差为$|-7.61+6.79|=0.82$，而利用(1.2)式计算的绝对误差为$|-7.61+7.07|=0.54$. 相对误差分别是 0.108 和 0.071 0.

注 (1) 将(1.1)式改写成(1.2)式这种方法在多项式中被称为“嵌套技术”，它可以减少运算次数.

(2) 从计算结果来看，利用(1.2)式计算的绝对误差和相对误差都要小一些，从而说明运算次数的减少可以减少误差的积累.

例 1.4 设$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$

(1) 证明：$I_n = \mathrm{e} - nI_{n-1}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(2) 给出一个数值稳定的递推算法，并证明算法的稳定性.

解 (1) $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \mathrm{e}^x \big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x n x^{n-1} \,\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e} - n\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - nI_{n-1},\quad n=1,2,\cdots.$$

(2) 若直接使用递推公式 $I_n = \mathrm{e} - nI_{n-1}$，从 $I_0 = \mathrm{e}-1$ 出发，若 I_0 的近似值为 $\widetilde{I_0}$，则计算得到 I_n 的近似值 $\widetilde{I_n}$ 的误差为

$$\begin{aligned} I_n - \widetilde{I_n} &= -n(I_{n-1} - \widetilde{I_{n-1}}) = n^2(I_{n-2} - \widetilde{I_{n-2}}) = \cdots \\ &= (-1)^n n^n (I_0 - \widetilde{I_0}), \end{aligned}$$

因此递推过程导致算法误差迅速增长，因而是一种不稳定的算法，我们必须将递推公式变形为 $nI_{n-1} = \mathrm{e} - I_n$，若已知 I_N，可得如下递推算法：

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(\mathrm{e} - I_n),\quad n = N, N-1, \cdots, 1. \tag{1.3}$$

若已知 I_n 的一个近似值 $\widetilde{I_n}$，则实际算得的 I_{n-1} 的近似值为

$$\widetilde{I_{n-1}} = \frac{1}{n}(\mathrm{e} - \widetilde{I_n}). \tag{1.4}$$

将(1.3)与(1.4)相减得

$$|I_{n-1} - \widetilde{I_{n-1}}| = \frac{1}{n}|I_n - \widetilde{I_n}|,\quad n = N, N-1, \cdots, 1.$$

每迭代一次绝对误差均以 $\frac{1}{n}$ 倍在减少，因此递推算法(1.3)是稳定的.

注 例 1.4 主要说明在数值计算中要选用数值稳定性好的算法.

1.3.2 向量范数和矩阵范数

例 1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$，证明：$\|\boldsymbol{x}\|_A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数.

分析 验证 $\|\boldsymbol{x}\|_A$ 满足向量范数定义中的三个条件即可，在具体的验证过程中要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

证 注意到 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(1) 因 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，故对任意 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} > 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = 0$.

(2) 对任意常数 $\lambda \in \mathbf{R}$，