高职高专数学系列教材

高等数学(上)

总主编　肖果能

主　编　周泰文　邓国栋

中南大学出版社

高职高专数学系列教材

高等数学

（上册）

总主编　肖果能
主　编　周泰文　邓国栋
副主编　粟　芷　陈先觉
刘建文　王烂曼

中南大学出版社

内容简介

本书根据国家教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》编写，是这类高校学生(包括函授生)《高等数学》课程的教材，分上、下两册．

上册有函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程四章；

下册有向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，无穷级数四章．

本书融会了编者多年的从教经验，结构严谨，重点突出，通俗简明，例题典型，章末均有学习辅导，好教好学．可作为高职、高专、成教的高等数学教材，亦可供有关专业的自考生和教师参阅．

高 等 数 学

(上 册)

总主编　肖果能

主　编　周泰文　邓国栋

□责任编辑　谢贵良

□出版发行　中南大学出版社

社址：长沙市麓山南路　邮编：410083

发行科电话：0731-8876770　传真：0731-8710482

电子邮件：csucbs @ public. cs. hn. cn

□经　　销　新华书店总店北京发行所

□印　　装　中南大学印刷厂

□开　　本　787×960　1/16　□印张　16.75　□字数　306 千字

□版　　次　2003 年 6 月第 1 版　□2003 第 6 月第 1 次印刷

□书　　号　ISBN 7-81061-554-8/O・023

□定　　价　18.00 元

图书出现印装问题，请与经销商调换

总　　序

一年前,我开始接触高职、高专、成教的教学,深有感触！高职、高专、成教是现行高等教育中的另一方天地,这里培养的高级应用型人才,从一个方面顺应了人才市场的需要,正是这种需要激发了高职、高专、成教的蓬勃发展:属于这一类型的学校越来越多,生源越来越好,我觉得这里确是一个有作为的教育工作者的用武之地!

发展高职、高专和成教,教材建设是根本．中南大学出版社考虑到这类学校教材建设的需要,邀我做些教材开发的工作．我认为这是一件有意义的事情,欣然领命．经过一番策划,邀请了几位专业水平高、教学经验丰富的同仁做主编,结合几位在高职、高专及成教教学第一线的教师参加,同心协力,编写了这套适用高职、高专和成教的数学教材,计有《高等数学》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》四册．

百年大计,教育为本．教育的根本目的在于培养人才;教育要用人类的先进文化武装劳动者,教材就必须反映先进文化的渊源和发展;教育牵连千家万户,关系国计民生．在编写过程中,我们以教育部颁发的高职、高专和成教数学课程基本要求为依据,在编写时充分考虑到这类高校学生的具体情况,注重理论严谨,论述简明,重点突出,联系实际,使教材好教好学．

我和编者们以绵薄之力奉献教育,很高兴又为她做了一件有益的事．

肖果能　谨识

2003 年春于湖南涉外经济学院

前　言

为培养21世纪的高级应用型人才，根据教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》，汇集我们多年从事高等数学教学所积累的经验，吸收同类教材的优点，我们编写了本教材，力求做到理论严谨、重点突出、表述简明、深入浅出、好教好学．

本教材具有以下特色：

(1)教材内容体现大纲要求，难度适当且具有“弹性”，凡超出课程基本要求的内容(包括习题)，均用小号字排出或标记“*”号，供选用；

(2)从实例引入基本概念，注重概念的直观背景与理论意义，对重要概念，不吝笔墨，阐述详尽；

(3)结合图形讲解定理，便于学生理解记忆；

(4)突出重点选配例、习题，着重解题思路、方法、步骤，加强示范性；

(5)每章附学习辅导，抓住要点，化厚为薄，使知识脉络清晰，基本要求、重点、难点一目了然．归纳题型、分类举例，便于读者掌握解题规律和技巧．

本教材分上、下两册．参加上册编写的有(按章节先后次序)：湖南大众传媒学院粟芷(函数、极限、连续)、陈先觉(导数、微分及应用)，湖南交通职业技术学院刘建文(不定积分)，长沙通讯职业技术学院王烂曼(定积分及应用、微分方程)；参加下册编写的有：湖南生物与机电工程职业技术学院温芝元(向量代数与空间解析几何)，长沙大学李定武(多元函数微分学)，湖南涉外经济学院李金妹(二重积分)，湖南工业职业技术学院陈珊(无穷级数)．

中南大学周泰文、长沙大学邓国栋对全书初稿进行了统稿、定稿．

中南大学肖果能教授对本教材的编写进行了组织策划和审稿，并提出了许多宝贵的修改意见．

我们期望本教材能在高职、高专、成教及函授的教学中，发挥很好的作用并殷切希望广大师生批评、指正．

编　者

2003年3月

目　录

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学课程首要的基本概念和主要的研究对象，它是现实世界中变量之间的依存关系的数学抽象．极限是研究函数及高等数学其他重要概念与理论的基本工具，是整个高等数学的基石，因而也是学习高等数学的入门关．本章将系统地讨论函数的概念和性质，学习极限的理论与方法，建立连续的概念，为进一步学习高等数学的主要内容 —— 微积分学作好准备．

第一节　函　　数

本书将在实数范围内展开对变量的研究．

一　实数与数集

1. 实数

有理数与无理数统称为**实数**．实数与数轴上的点是一一对应的．有理数对应的点叫**有理点**，无理数对应的点叫**无理点**．如图 1 － 1 所示．

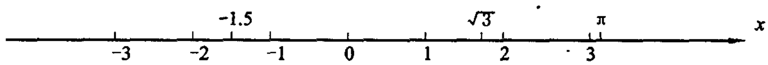

图 1 － 1

由全体实数组成的集合叫做**实数集**．实数集具有如下两个性质：

（1）有序性　任何两个互异的实数 a，b 都可比较其大小，或者 $a > b$，或者 $a < b$．实数按照由小到大的顺序从左至右排列在数轴上，排在左边的实数小于排在右边的实数．

（2）完备性　有理点在数轴上处处稠密，但有理点并未充满整个数轴，比如还有 $\sqrt{3}$，π 等这样的无理点存在．而由全体有理点与全体无理点构成的实数充满整个数轴，没有空隙，这就是实数的完备性．

实数与数轴上的全体点一一对应．为简单起见，我们常将实数与数轴上和它相对应的点不加区别，如点 a 和实数 a 意义相同．

2. 数集

以数为元素的集合叫做**数集**．通常把全体自然数的集合记作"**N**"，全体整数的集合记作"**Z**"，全体有理数的集合记作"**Q**"，全体实数的集合记作"**R**"，**N**，**Z**，**Q** 都

是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集.

(1) 区间

区间是用得较多的一类数集.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b) 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a,b 分别称为该区间的**左端点**和**右端点**.

类似地有

闭区间　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

开区间不包含端点,而闭区间包含两个端点,半开区间只包含其中一个端点.

以上各区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为**区间的长度**. 在数轴上,有限区间是长度有限的线段,在图 1－2 中表示了闭区间 $[a,b]$ 和开区间 (a,b).

图 1－2

除有限区间外,还有五种**无限区间**:

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}, \qquad ①$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}, \qquad ②$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}, \qquad ③$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}, \qquad ④$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}. \qquad ⑤$$

上述无限区间的 ①,④ 如图 1－3 所示. ②、③、⑤ 的图形,请读者自作.

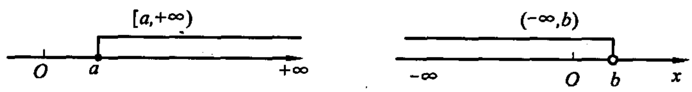

图 1－3

以后当不必考虑区间的端点以及区间是否有限时,我们将有限区间和无限区间都简称为"区间".

(2) 邻域

设 $x_0\in\mathbf{R},\delta>0$,则称开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

为**点 x_0 的 δ 邻域**,分别称 x_0 和 δ 为此邻域的**中心**和**半径**. 如图 1－4 所示.

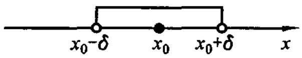

图 1-4

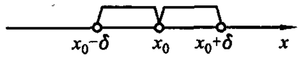

图 1-5

例如 $|x-2|<0.1$ 即为以点 2 为中心，以 0.1 为半径的邻域（或称为点 2 的 0.1 邻域），它就是开区间 $(1.9,2.1)$.

如果在点 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0，则称

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

为**点 x_0 的去心的 δ 邻域**，如图 1-5 所示.

例如 $0<|x-2|<0.1$ 即点 2 的去心的 0.1 邻域，还可表示为 $(1.9,2)\cup(2,2.1)$.

另外，还可用含绝对值的不等式表示数集，如

$$|x|<a \text{ 即 } (-a,a);\qquad |x|>b \text{ 即 } (-\infty,-b)\cup(b,+\infty).$$

其中 $a>0,b\geqslant 0$.

二　函数概念

1. 常量与变量

在某个变化过程中保持数值不变的量叫做**常量**，通常用英文的前几个字母 a，b，c 等等表示常量；在某个变化过程中可以取不同数值的量叫做**变量**，通常用英文的后几个字母 x，y，z 等等表示变量. 变量的变化不是孤立的，它与同一过程中的其他变量之间有一定的对应关系. 研究变量就应该掌握变量之间的这种对应关系.

2. 函数的定义

我们先来看两个例子：

例 1　在自由落体运动中，物体下落时间 t 与下落距离 s 是两个相互联系的变量，由自由落体实验知道，变量 s，t 之间有如下的对应关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中，g 为重力加速度，是一个常量，T 为物体落地的时间. 当 t 在 $[0,T]$ 上任取一值时，下落距离 s 都有惟一确定的值与之对应.

例 2　某工厂每天生产 x 件产品，每天的固定成本为 2000 元，生产每件产品所需的原材料费及人工费等单位变动成本为 8 元，那么，日产量 x（件）与生产总成本 c（元）之间就有如下对应关系：

$$c=2000+8x.$$

假定该厂日产量最多为400件,当产量 x 在集合 $\{0,1,2,\cdots,400\}$ 上任取一个数值时,总成本 c 就有惟一确定的数值与之对应.

上述例1、例2中各有两个变量,且每对变量间都有确定的对应关系,这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于 D 中每一个数 x,按照某种对应法则 f,变量 y 总有惟一确定的值与之对应,则称 **y 是 x 的函数**,记作 $y=f(x)$. 这里,数集 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,函数 y 也叫**因变量**.

当 x 取定数值 x_0 时,与 x_0 相对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$;函数值的全体构成的集合称为**函数的值域**,记作 W,即

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

特别要指出的是:对于定义域 D 中自变量的每个值 x,函数 y 都只有惟一确定的值 $f(x)$ 与之对应,这个性质称为函数的单值性. 这是函数概念的本质属性.

在函数 $y=f(x)$ 中,表示对应法则的记号 f 也可以改用其他字母,例如"φ","F"等. 随之,函数可记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$ 等等,有时为了简化符号,也可以用 $y=y(x)$,$u=u(x)$ 等表示,不过,此时等式左边的 y,u 表示函数值,等式右边的 y,u 表示对应法则. 但同一函数在讨论中应取定一种记号;同一问题涉及多个函数时,应取不同的记号来表示它们各自的对应法则.

3. 函数的两要素

由函数的定义可知,确定一个函数有两个要素:定义域与对应法则.

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不相同的. 至于用什么字母来表示变量则无关紧要.

(1) 如何确定函数的定义域?

函数的定义域是自变量的取值范围. 确定函数的定义域,就是要确定自变量的取值范围. 为此,要考虑两个方面:

1° 从表示函数的解析式考虑,确定使此解析式有意义的实数集(通常被称为函数的**自然定义域**). 必须注意:

(1°) 分母不为零;

(2°) 偶次根式中被开方数不能为负数;

(3°) 对数式中的真数不能为零或负数;

(4°) 对一些特殊函数[如奇(或偶)函数、反函数等等]的特殊要求.

2° 从函数的实际意义考虑,确定使此实际问题有意义的实数集.

如例1中,s 是 t 的函数,$s=\dfrac{1}{2}gt^2$. 如果仅从使解析式有意义考虑,t 的取值范围可以是$(-\infty,+\infty)$. 但此函数表示的是自由落体运动中,物体由静止到下落至

地面时位移与时间的关系，因此 t 不能取负数，t 的最大值为落到地面所需的时间 T，所以此函数的定义域应为 $[0,T]$，而不是 $(-\infty,+\infty)$.

在例2中，根据问题的实际意义，定义域不应是自然定义域 $(-\infty,+\infty)$，而应是从0到400的整数集：$\{0,1,2,\cdots,400\}$.

当函数不联系实际问题时，则仅从解析式来确定其定义域.

例3　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}+\ln(2-x)$；　(2) $y=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{\ln(x-2)}$；

(3) $y=\sqrt{(x-a)(x-b)}$　$(0<a<b)$.

解(1)　由分母不能为零得

$$4-x^2\neq 0,\text{即 } x\neq\pm 2; \quad ①$$

由偶次根式中被开方数不能为负数得　$x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -2$；　②

由对数式中的真数不能为零和负数得　$2-x>0$，即 $x<2$.　③

将①,②,③画在数轴上（见图1-6），取交集得此函数的定义域 $D=(-2,2)$.

注意　在图1-6中，表示①时，在整个数轴上挖去 $-2,2$ 两点（用空心圆圈表示），剩余部分即是①的图形表示.

(2)　定义域 D 应满足

$$\begin{cases}3x-1\geqslant 0,\\ x-2>0,\\ x-2\neq 1,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x\geqslant\dfrac{1}{3}, & ①\\ x>2, & ②\\ x\neq 3. & ③\end{cases}$$

将①、②、③画在数轴上（见图1-7所示）取交集，即得此函数的定义域 $D=(2,3)\cup(3,+\infty)$.

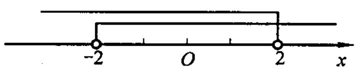

图1-6

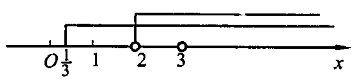

图1-7

(3) 定义域 D 应取不等式组

$$①\begin{cases}x-a\geqslant 0\\ x-b\geqslant 0\end{cases}\quad\text{与 } ②\begin{cases}x-a\leqslant 0\\ x-b\leqslant 0\end{cases}$$

的解集的并. 解①得 $x\geqslant b$；解②得 $x\leqslant a$（见图1-8），故此函数的定义域

$$D=(-\infty,a]\cup[b,+\infty).$$

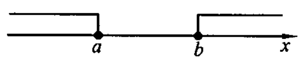

图1-8

例 4 下列各组中的两个函数是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\ln x$; (2) $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = e^{\ln x}, g(x) = x$; (4) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}, g(x) = \sin x$.

解 (1) 不相同. 因为定义域不同.

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$;

(2) 相同. 因为定义域与对应法则都相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域亦为 $(-\infty, +\infty)$; 对同一个 x, $|x| = \sqrt{x^2}$, 故 $f(x) = g(x)$;

(3) 不相同. 因为定义域不同. $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(4) 不相同. 因为对应法则不同, 对同一个 x, $f(x)$ 不能取负值, 而 $g(x)$ 却可以取负值.

(2) 如何表示对应法则?

函数的对应法则可以用以下几种方式表示:

1° 公式法(或解析法)

对自变量 x 依次施行一些数学运算, 而得出 y 的对应值, 这样来表示函数的方法, 称为**公式法或解析法**. 例如, $y = \sqrt{1-x^3}$, $y = \sin x$ 等等.

2° 图像法

把自变量 x 与因变量 y 看成平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标, 用所有这些点组成的图形来表示 x 与 y 之间的函数关系的方法, 叫做**图像法**. 例如图 1-9 就是某地某日气象台自动记录仪记录的气温 T 与时间 t 之间的对应关系曲线.

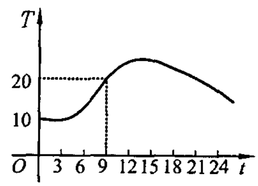

图 1-9

3° 表格法

把一系列自变量 x 与因变量 y 的对应值用表格列出, 以此来表示两个变量之间的函数关系的方法, 称为**表格法**. 如我们常用的平方根表、对数表、三角函数表等等. 下表就是某商店上半年销售情况统计表.

表 1-1 单位:万元

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售额 s	472	581	361	395	589	488

4° 描述法

用语言描述来给定两个变量之间函数关系的方法, 称为**描述法**.

例如：π 为无穷不循环小数，$\pi = 3.141592\cdots$ 在正的自然数集上定义"$f(n)$ 等于 π 的小数点后的第 n 位数值"，则变量 n 与 $f(n)$ 之间确定了一个函数关系，即 $f(1) = 1, f(2) = 4, \cdots, f(5) = 9, \cdots$

表示函数关系的上述方法各有特点. 公式法给出的函数关系解析式便于进行理论分析和计算；图像法给出的函数图像形象直观，富有启发性，便于记忆；表格法给出的对应值一目了然，但它常常是不完全的. 今后我们以公式法（解析法）为主，配合使用图像法、表格法和描述法.

下面是一个建立函数关系的实例.

例 5　水池中有 $400\mathrm{m}^3$ 的水，从出水口放水，流速为 $2\mathrm{m}^3$/分，用函数关系表示水池中所剩的水 $y(\mathrm{m}^3)$ 与放水所用时间 t（分钟）之间的关系.

解　根据题意，可列出函数关系式 $y = 400 - 2t$. 其定义域为 $0 \leqslant t \leqslant 200$.

4. 函数的图像

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x \in D$，对应的函数值为 y，把自变量的值 x 和对应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，就可以在直角坐标系中确定一点 (x,y)，所有这些点在直角坐标系中形成的图形称为**函数 $y = f(x)$ 的图像（或图形）**.

如图 1－10 中函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，其图像为点集

$$C = \{(x,y) \mid x \in D, y = f(x) \in W\}.$$

它是一段曲线.

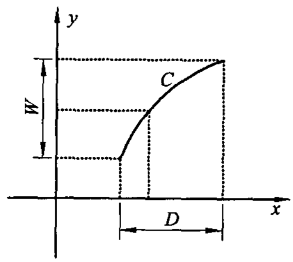

图 1－10

5. 分段函数

如果在定义域的不同部分，有不同的对应法则，这样的函数称为**分段函数**. 应当注意，分段函数作为一个整体是一个函数而不是几个函数.

例 6　根据国家税收规定，个人月收入不超过 880 元，则不交纳个人所得税，超过 880 元而少于 1380 元的部分按 5% 纳税；超过 1380 元而少于 2000 元的部分按 10% 纳税. 求个人月收入 x 与应纳税额 y 之间的函数关系.

解
$$y = \begin{cases} 0, & x \leqslant 880, \\ (x - 880) \times 5\%, & 880 < x \leqslant 1380, \\ (1380 - 880) \times 5\% + (x - 1380) \times 10\%, & 1380 < x \leqslant 2000. \end{cases}$$

例 7　取整函数. 设 x 为任一实数，称不超过 x 的最大整数为 x 的**整数部分**，记为 $[x]$，称函数 $y = [x]$ 为**取整函数**. 它的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{Z}$，例如 $[0.5] = 0$，$[1] = 1$，$[1.99] = 1$，$[\pi] = 3$，$[-2] = -2$，$[-3.2] = -4$ 等等，其图形如图

1 - 11 所示.

取整函数是分段函数,它还可表示为

$y = [x] = n, n \leqslant x < n+1, \quad n \in \mathbf{Z}.$

例 8 设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geqslant 0, \\ x^2+4, & x < 0. \end{cases}$$

求 $f(-1), f(0), f(1)$.

解 分段函数在某点处的值应根据该点所在区间对应的解析式来确定,于是有

$f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5; f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1;$

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3.$

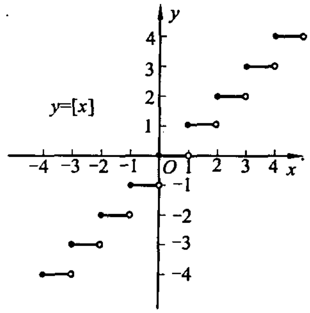

图 1 - 11

三 几种特殊的函数

在研究函数时,经常遇到几种特殊的函数.

1. 有界函数

例如,正弦函数 $y = \sin x$,其函数值总介于 -1 与 1 之间,即 $|\sin x| \leqslant 1$. 这时,我们说在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上,正弦函数 $y = \sin x$ 是有界的.

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 M,对于 D 的某子集上的任一 x,均有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在该子集上为**有界函数**,或称 $f(x)$ 在此子集上**有界**,否则称 $f(x)$ 在此子集上**无界**.

例如,函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,因为取 $M = 1$(也可取 M 为大于 1 的任何实数)总有 $|\cos x| \leqslant M, x \in \mathbf{R}$.

而函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,因为对任意取定的一个正数 M,不能使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 在 $(0,1)$ 内都成立. 因为在 $(0,1)$ 内, $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x}$,要使 $\dfrac{1}{x} > M$,只要 $0 < x < \dfrac{1}{M}$,如果取 $x_0 = \dfrac{1}{M+1} \in (0,1)$,则有 $x_0 < \dfrac{1}{M}$, $\left|\dfrac{1}{x_0}\right| = \dfrac{1}{x_0} = M + 1 > M$,故 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界. 但是 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内却有界,因为取 $M = 1$,当 $x \in (1,2)$ 时,均有 $|y| = \dfrac{1}{x} \leqslant M$.

2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 在其有定义的某区间上,当自变量增大时,函数值总是增大(或减小),则称 $f(x)$ 在此区间上**单调增加(或减小)**,并称此区间为函数的**单调区间**. 单