

高 职 高 专 数 学 系 列 教 材

高等数学

上

总主编 肖果能

主 编 周泰文 邓国栋



中 南 大 学 出 版 社

高职高专数学系列教材

高等数学

(上册)

总主编	肖果能	
主 编	周泰文	邓国栋
副主编	粟 芷	陈先觉
	刘建文	王烂曼

中南大学出版社

内容简介

本书根据国家教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》编写,是这类高校学生(包括函授生)《高等数学》课程的教材,分上、下两册.

上册有函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程四章;

下册有向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,二重积分,无穷级数四章.

本书融会了编者多年的从教经验,结构严谨,重点突出,通俗简明,例题典型,章末均有学习辅导,好教好学.可作为高职、高专、成教的高等数学教材,亦可供有关专业的自考生和教师参阅.

高等数学 (上册)

总主编 肖果能

主 编 周泰文 邓国栋

☐责任编辑 谢贵良

☐出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路 邮编:410083

发行科电话:0731-8876770 传真:0731-8710482

电子邮件:csucbs @ public. cs. hn. cn

☐经 销 新华书店总店北京发行所

☐印 装 中南大学印刷厂

☐开 本 787×960. 1/16 ☐印张 16. 75 ☐字数 306 千字

☐版 次 2003 年 6 月第 1 版 ☐2003 第 6 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 7-81061-554-8/O · 023

☐定 价 18. 00 元

总 序

一年前,我开始接触高职、高专、成教的教学,深有感触! 高职、高专、成教是现行高等教育中的另一方天地,这里培养的高级应用型人才,从一个方面顺应了人才市场的需要,正是这种需要激发了高职、高专、成教的蓬勃发展;属于这一类型的学校越来越多,生源越来越好,我觉得这里确是一个有作为的教育工作者的用武之地!

发展高职、高专和成教,教材建设是根本. 中南大学出版社考虑到这类学校教材建设的需要,邀我做些教材开发的工作. 我认为这是一件有意义的事情,欣然领命. 经过一番策划,邀请了几位专业水平高、教学经验丰富的同仁做主编,结合几位在高职、高专及成教教学第一线的教师参加,同心协力,编写了这套适用高职、高专和成教的数学教材,计有《高等数学》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》四册.

百年大计,教育为本. 教育的根本目的在于培养人才;教育要用人类的先进文化武装劳动者,教材就必须反映先进文化的渊源和发展;教育牵连千家万户,关系国计民生. 在编写过程中,我们以教育部颁发的高职、高专和成教数学课程基本要求为依据,在编写时充分考虑到这类高校学生的具体情况,注重理论严谨,论述简明,重点突出,联系实际,使教材好教好学.

我和编者们的绵薄之力奉献教育,很高兴又为她做了一件有益的事.

肖果能 谨识

2003 年春于湖南涉外经济学院

前 言

为培养 21 世纪的高级应用型人才,根据教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》,汇集我们多年从事高等数学教学所积累的经验,吸收同类教材的优点,我们编写了本教材,力求做到理论严谨、重点突出、表述简明、深入浅出、好教好学。

本教材具有以下特色:

(1)教材内容体现大纲要求,难度适当且具有“弹性”,凡超出课程基本要求的内容(包括习题),均用小号字排出或标记“*”号,供选用;

(2)从实例引入基本概念,注重概念的直观背景与理论意义,对重要概念,不吝笔墨,阐述详尽;

(3)结合图形讲解定理,便于学生理解记忆;

(4)突出重点选配例、习题,着重解题思路、方法、步骤,加强示范性;

(5)每章附学习辅导,抓住要点,化厚为薄,使知识脉络清晰,基本要求、重点、难点一目了然。归纳题型、分类举例,便于读者掌握解题规律和技巧。

本教材分上、下两册。参加上册编写的有(按章节先后次序):湖南大众传媒学院粟芷(函数、极限、连续)、陈先觉(导数、微分及应用),湖南交通职业技术学院刘建文(不定积分),长沙通讯职业技术学院王烂曼(定积分及应用、微分方程);参加下册编写的有:湖南生物与机电工程职业技术学院温芝元(向量代数与空间解析几何),长沙大学李定武(多元函数微分学),湖南涉外经济学院李金妹(二重积分),湖南工业职业技术学院陈珊(无穷级数)。

中南大学周泰文、长沙大学邓国栋对全书初稿进行了统稿、定稿。

中南大学肖果能教授对本教材的编写进行了组织策划和审稿,并提出了许多宝贵的修改意见。

我们期望本教材能在高职、高专、成教及函授的教学中,发挥很好的作用并殷切希望广大师生批评、指正。

编 者

2003 年 3 月

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)
第一节 函数	(1)
一 实数与数集(1) 二 函数概念(3) 三 几种特殊的函数(8)	
四 反函数(10) 五 基本初等函数(11) 六 复合函数与初等函数(15)	
习题 1-1(17)	
第二节 数列的极限	(18)
一 引例(18) 二 数列的极限(19) 习题 1-2(23)	
第三节 函数的极限	(23)
一 当自变量 x 的绝对值无限增大时函数的极限(24) 二 当自变量 x 趋于某有限值时函数的极限(26)	
习题 1-3(30)	
第四节 无穷小与无穷大	(31)
一 无穷小(31) 二 无穷大(32) 三 无穷小的比较(33)	
习题 1-4(34)	
第五节 极限的运算法则	(34)
习题 1-5(39)	
第六节 极限存在准则 两个重要极限(39)	
一 极限存在准则(39) 二 两个重要极限(41)	
习题 1-6(45)	
第七节 函数的连续性	(46)
一 函数的连续性(46) 二 函数的间断点(48) 三 初等函数的连续性(50)	
四 闭区间上连续函数的性质(52)	
习题 1-7(54)	
第一章学习辅导	(56)
一 内容提要(56) 二 基本要求(57) 三 基本题型(57)	
复习题一(64)	
第一章习题答案	(65)
第二章 一元函数微分学	(67)
第一节 导数的概念	(67)
一 引例(67) 二 导数的定义(68) 三 导数的几何意义	

	(71) 四 可导与连续的关系(71) 习题 2-1(72)	
第二节	求导法则与基本公式 (73)	
	一 常数与基本初等函数的导数(73) 二 函数的和、差、积、商的求导法则(75) 三 复合函数的求导法则(78) 四 隐函数的求导法则(79) 五 参数方程确定的函数的求导法则(82)	
第三节	高阶导数 (83)	
	习题 2-2(86)	
第四节	微分 (87)	
	一 微分的概念(87) 二 微分的几何意义(90) 三、微分基本公式与法则(90) 四 微分形式的不变性(92) 五 微分在近似计算中的应用(92) 习题 2-3(94)	
第五节	微分中值定理 (94)	
	一 罗尔定理(95) 二 拉格朗日中值定理(96) 三 柯西中值定理(98) 四 泰勒定理(99)	
第六节	未定式的确定法——洛必达法则 (101)	
	一 洛必达法则(一)(101) 二 洛必达法则(二)(103) 习题 2-4(105)	
第七节	函数单调性的判别法 (106)	
	习题 2-5(108)	
第八节	函数的极值和最值 (109)	
	一 函数的极值(109) 二 最大值和最小值的求法(112) 习题 2-6(116)	
第九节	曲线的凹向、拐点及渐近线 (117)	
	一 曲线的凹向和拐点(117) 二 曲线的渐近线(119) 习题 2-7(121)	
第十节	函数图形的描绘 (122)	
	习题 2-8(125)	
第二章学习辅导	 (126)	
	一 内容提要(126) 二 基本要求(127) 三 基本题型(127) 复习题二(133)	
第二章习题答案	 (134)	

第三章 一元函数积分学	(140)
第一节 不定积分的概念与性质	(140)
一 原函数与不定积分(140)	
二 不定积分的几何意义(141)	
三 基本积分公式(142)	
四 不定积分的性质(143)	
习题 3-1(145)	
第二节 换元积分法	(146)
一 第一类换元法(凑微分法)(146)	
二 第二类换元积分法(150)	
习题 3-2(154)	
第三节 分部积分法	(155)
习题 3-3(158)	
第四节 积分表的使用	(158)
习题 3-4(161)	
第五节 定积分的概念及其性质	(161)
一 定积分的概念(161)	
二 定积分的性质(165)	
习题 3-5(170)	
第六节 计算定积分的基本公式	(170)
一 积分上限函数(170)	
二 上限函数的导数(171)	
三 牛顿-莱布尼兹公式(172)	
习题 3-6(174)	
第七节 定积分的换元积分法与分部积分法	(175)
一 定积分的换元积分法(175)	
二 定积分的分部积分法(180)	
习题 3-7(183)	
第八节 广义积分	(184)
一 无穷区间上的广义积分(185)	
二 无界函数的广义积分——瑕积分(186)	
习题 3-8(188)	
第九节 定积分的应用	(189)
一 定积分元素法(189)	
二 平面图形的面积(190)	
三 平行截面面积为已知的立体体积(194)	
四 旋转体的体积(195)	
五 曲线的弧长(196)	
六 定积分在物理上的应用(198)	
习题 3-9(201)	
第三章学习辅导	(203)
一 内容提要(203)	
二 基本要求(205)	
三 基本题型(205)	
复习题三(215)	
第三章习题答案	(217)

第四章 常微分方程	(222)
第一节 基本概念	(222)
一 引例(222) 二 基本概念(223) 习题 4-1(226)	
第二节 一阶微分方程	(227)
一 可分离变量的微分方程(227) 二 一阶线性微分方程(230)	
习题 4-2(233)	
第三节 二阶微分方程	(234)
一 线性微分方程的解的结构(234) 二 二阶常系数齐次线性微分方程的解法(237)	
三 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法(241) 习题 4-3(245)	
第四章学习辅导	(247)
一 内容提要(247) 二 基本要求(248) 三 基本题型(248)	
复习题四(249)	
第四章习题答案	(250)
附 简单积分表	(253)

第一章 函数 极限 连续

函数是高等数学课程首要的基本概念和主要的研究对象,它是现实世界中变量之间的依存关系的数学抽象.极限是研究函数及高等数学其他重要概念与理论的基本工具,是整个高等数学的基石,因而也是学习高等数学的入门关.本章将系统地讨论函数的概念和性质,学习极限的理论与方法,建立连续的概念,为进一步学习高等数学的主要内容——微积分学作好准备.

第一节 函 数

本书将在实数范围内展开对变量的研究.

一 实数与数集

1. 实数

有理数与无理数统称为实数.实数与数轴上的点是一一对应的.有理数对应的点叫有理点,无理数对应的点叫无理点.如图 1-1 所示.

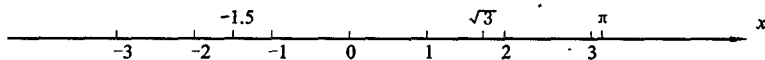


图 1-1

由全体实数组成的集合叫做实数集.实数集具有如下两个性质:

(1) 有序性 任何两个互异的实数 a, b 都可比较其大小,或者 $a > b$,或者 $a < b$.实数按照由小到大的顺序从左至右排列在数轴上,排在左边的实数小于排在右边的实数.

(2) 完备性 有理点在数轴上处处稠密,但有理点并未充满整个数轴,比如还有 $\sqrt{3}, \pi$ 等这样的无理点存在.而由全体有理点与全体无理点构成的实数充满整个数轴,没有空隙,这就是实数的完备性.

实数与数轴上的全体点一一对应.为简单起见,我们常将实数与数轴上和它相对应的点不加区别,如点 a 和实数 a 意义相同.

2. 数集

以数为元素的集合叫做数集.通常把全体自然数的集合记作“ N ”,全体整数的集合记作“ Z ”,全体有理数的集合记作“ Q ”,全体实数的集合记作“ R ”, N, Z, Q 都

是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集.

(1) 区间

区间是用得较多的一类数集.

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

a, b 分别称为该区间的左端点和右端点.

类似地有

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$

半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}; [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$

开区间不包含端点, 而闭区间包含两个端点, 半开区间只包含其中一个端点.

以上各区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为区间的长度. 在数轴上, 有限区间是长度有限的线段, 在图 1-2 中表示了闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) .



图 1-2

除有限区间外, 还有五种无限区间:

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, \quad \text{①}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \quad \text{②}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, \quad \text{③}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, \quad \text{④}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}. \quad \text{⑤}$$

上述无限区间的 ①、④ 如图 1-3 所示. ②、③、⑤ 的图形, 请读者自作.

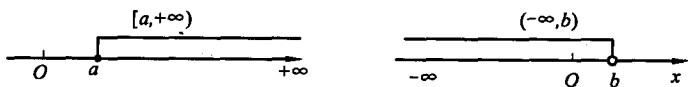


图 1-3

以后当不必考虑区间的端点以及区间是否有限时, 我们将有限区间和无限区间都简称为“区间”.

(2) 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 则称开区间

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域, 分别称 x_0 和 δ 为此邻域的中心和半径. 如图 1-4 所示.

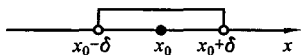


图 1-4

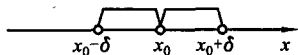


图 1-5

例如 $|x - 2| < 0.1$ 即为以点 2 为中心, 以 0.1 为半径的邻域(或称为点 2 的 0.1 邻域), 它就是开区间 $(1.9, 2.1)$.

如果在点 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0 , 则称

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的去心的 δ 邻域, 如图 1-5 所示.

例如 $0 < |x - 2| < 0.1$ 即点 2 的去心的 0.1 邻域, 还可表示为 $(1.9, 2) \cup (2, 2.1)$.

另外, 还可含绝对值的不等式表示数集, 如

$$|x| < a \text{ 即 } (-a, a); \quad |x| > b \text{ 即 } (-\infty, -b) \cup (b, +\infty).$$

其中 $a > 0, b \geq 0$.

二 函数概念

1. 常量与变量

在某个变化过程中保持数值不变的量叫做常量, 通常用英文的前几个字母 a, b, c 等等表示常量; 在某个变化过程中可以取不同数值的量叫做变量, 通常用英文的后几个字母 x, y, z 等等表示变量. 变量的变化不是孤立的, 它与同一过程中的其他变量之间有一定的对应关系. 研究变量就应该掌握变量之间的这种对应关系.

2. 函数的定义

我们先来看两个例子:

例 1 在自由落体运动中, 物体下落时间 t 与下落距离 s 是两个相互联系的变量, 由自由落体实验知道, 变量 s, t 之间有如下对应关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中, g 为重力加速度, 是一个常量, T 为物体落地的时间. 当 t 在 $[0, T]$ 上任取一值时, 下落距离 s 都有惟一确定的值与之对应.

例 2 某工厂每天生产 x 件产品, 每天的固定成本为 2000 元, 生产每件产品所需的原材料费及人工费等单位变动成本为 8 元, 那么, 日产量 x (件) 与生产总成本 c (元) 之间就有如下对应关系:

$$c = 2000 + 8x.$$

假定该厂日产量最多为 400 件,当产量 x 在集合 $\{0, 1, 2, \dots, 400\}$ 上任取一个数值时,总成本 c 就有惟一确定的数值与之对应.

上述例 1、例 2 中各有两个变量,且每对变量间都有确定的对应关系,这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集,如果对于 D 中每一个数 x ,按照某种对应法则 f ,变量 y 总有惟一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. 这里,数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量,函数 y 也叫因变量.

当 x 取定数值 x_0 时,与 x_0 相对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$;函数值的全体构成的集合称为函数的值域,记作 W ,即

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

特别要指出的是:对于定义域 D 中自变量的每个值 x ,函数 y 都只有惟一确定的值 $f(x)$ 与之对应,这个性质称为函数的单值性. 这是函数概念的本质属性.

在函数 $y = f(x)$ 中,表示对应法则的记号 f 也可以改用其他字母,例如“ φ ”,“ F ”等. 随之,函数可记作 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ 等等,有时为了简化符号,也可以用 $y = y(x)$, $u = u(x)$ 等表示,不过,此时等式左边的 y, u 表示函数值,等式右边的 y, u 表示对应法则. 但同一函数在讨论中应取定一种记号;同一问题涉及多个函数时,应取不同的记号来表示它们各自的对应法则.

3. 函数的两要素

由函数的定义可知,确定一个函数有两个要素:定义域与对应法则.

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不相同的. 至于用什么字母来表示变量则无关紧要.

(1) 如何确定函数的定义域?

函数的定义域是自变量的取值范围. 确定函数的定义域,就是要确定自变量的取值范围. 为此,要考虑两个方面:

1° 从表示函数的解析式考虑,确定使此解析式有意义的实数集(通常被称为函数的自然定义域). 必须注意:

- (1°) 分母不为零;
- (2°) 偶次根式中被开方数不能为负数;
- (3°) 对数式中的真数不能为零或负数;
- (4°) 对一些特殊函数[如奇(或偶)函数、反函数等等]的特殊要求.

2° 从函数的实际意义考虑,确定使此实际问题有意义的实数集.

如例 1 中, s 是 t 的函数, $s = \frac{1}{2}gt^2$. 如果仅从使解析式有意义考虑, t 的取值范围可以是 $(-\infty, +\infty)$. 但此函数表示的是自由落体运动中,物体由静止到下落至

地面时位移与时间的关系,因此 t 不能取负数, t 的最大值为落到地面所需的时间 T , 所以此函数的定义域应为 $[0, T]$, 而不是 $(-\infty, +\infty)$.

在例2中,根据问题的实际意义,定义域不应是自然定义域 $(-\infty, +\infty)$, 而应是从0到400的整数集: $\{0, 1, 2, \dots, 400\}$.

当函数不联系实际问题时,则仅从解析式来确定其定义域.

例3 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2} + \ln(2-x); \quad (2) y = \frac{\sqrt{3x-1}}{\ln(x-2)};$$

$$(3) y = \sqrt{(x-a)(x-b)} \quad (0 < a < b).$$

解(1) 由分母不能为零得

$$4-x^2 \neq 0, \text{ 即 } x \neq \pm 2; \quad \text{①}$$

$$\text{由偶次根式中被开方数不能为负数得 } x+2 \geq 0, \text{ 即 } x \geq -2; \quad \text{②}$$

$$\text{由对数式中的真数不能为零和负数得 } 2-x > 0, \text{ 即 } x < 2. \quad \text{③}$$

将①、②、③画在数轴上(见图1-6),取交集得此函数的定义域 $D = (-2, 2)$.

注意 在图1-6中,表示①时,在整个数轴上挖去 $-2, 2$ 两点(用空心圆圈表示),剩余部分即是①的图形表示.

(2) 定义域 D 应满足

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0, \\ x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x > 2, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix}$$

将①、②、③画在数轴上(见图1-7所示)取交集,即得此函数的定义域 $D = (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

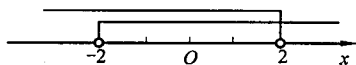


图 1-6

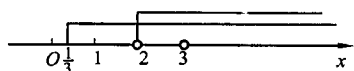


图 1-7

(3) 定义域 D 应取不等式组

$$\text{①} \begin{cases} x-a \geq 0 \\ x-b \geq 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \text{②} \begin{cases} x-a \leq 0 \\ x-b \leq 0 \end{cases}$$

的解集的并. 解①得 $x \geq b$; 解②得 $x \leq a$

(见图1-8), 故此函数的定义域

$$D = (-\infty, a] \cup [b, +\infty).$$

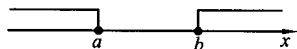


图 1-8

例 4 下列各组中的两个函数是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$; (2) $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = e^{\ln x}, g(x) = x$; (4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}, g(x) = \sin x$.

解 (1) 不相同. 因为定义域不同.

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$;

(2) 相同. 因为定义域与对应法则都相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域亦为 $(-\infty, +\infty)$; 对同一个 $x, |x| = \sqrt{x^2}$, 故 $f(x) = g(x)$;

(3) 不相同. 因为定义域不同. $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(4) 不相同. 因为对应法则不同, 对同一个 $x, f(x)$ 不能取负值, 而 $g(x)$ 却可以取负值.

(2) 如何表示对应法则?

函数的对应法则可以用以下几种方式表示:

1° 公式法 (或解析法)

对自变量 x 依次施行一些数学运算, 而得出 y 的对应值, 这样来表示函数的方法, 称为公式法或解析法. 例如, $y = \sqrt{1 - x^2}, y = \sin x$ 等等.

2° 图像法

把自变量 x 与因变量 y 看成平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标, 用所有这些点组成的图形来表示 x 与 y 之间的函数关系的方法, 叫做图像法. 例如图 1-9 就是某地某日气象台自动记录仪记录的气温 T 与时间 t 之间的对应关系曲线.

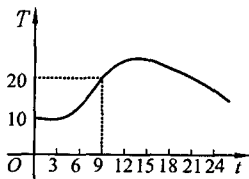


图 1-9

3° 表格法

把一系列自变量 x 与因变量 y 的对应值用表格列出, 以此来表示两个变量之间的函数关系的方法, 称为表格法. 如我们常用的平方根表、对数表、三角函数表等等. 下表就是某商店上半年销售情况统计表.

表 1-1

单位: 万元

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售额 s	472	581	361	395	589	488

4° 描述法

用语言描述来给定两个变量之间函数关系的方法, 称为描述法.

例如： π 为无穷不循环小数， $\pi = 3.141592\cdots$ 在正的自然数集上定义“ $f(n)$ 等于 π 的小数点后的第 n 位数值”，则变量 n 与 $f(n)$ 之间确定了一个函数关系，即 $f(1) = 1, f(2) = 4, \cdots, f(5) = 9, \cdots$

表示函数关系的上述方法各有特点. 公式法给出的函数关系解析式便于进行理论分析和计算；图像法给出的函数图像形象直观，富有启发性，便于记忆；表格法给出的对应值一目了然，但它常常是不完全的. 今后我们以公式法（解析法）为主，配合使用图像法、表格法和描述法.

下面是一个建立函数关系的实例.

例 5 水池中有 400m^3 的水，从出水口放水，流速为 $2\text{m}^3/\text{分}$ ，用函数关系表示水池中所剩的水 $y(\text{m}^3)$ 与放水所用时间 $t(\text{分钟})$ 之间的关系.

解 根据题意，可列出函数关系式 $y = 400 - 2t$. 其定义域为 $0 \leq t \leq 200$.

4. 函数的图像

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，对于任意取定的 $x \in D$ ，对应的函数值为 y ，把自变量的值 x 和对应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，就可以在直角坐标系中确定一点 (x, y) ，所有这些点在直角坐标系中形成的图形称为函数 $y = f(x)$ 的图像（或图形）.

如图 1-10 中函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，值域为 W ，其图像为点集

$$C = \{(x, y) \mid x \in D, y = f(x) \in W\}.$$

它是一段曲线.

5. 分段函数

如果在定义域的不同部分，有不同的对应法则，这样的函数称为分段函数. 应当注意，分段函数作为一个整体是一个函数而不是几个函数.

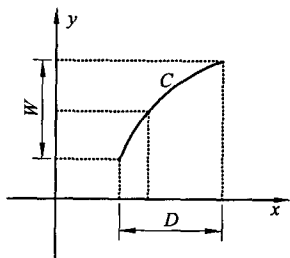


图 1-10

例 6 根据国家税收规定，个人月收入不超过 880 元，则不交纳个人所得税，超过 880 元而少于 1380 元的部分按 5% 纳税；超过 1380 元而少于 2000 元的部分按 10% 纳税. 求个人月收入 x 与应纳税额 y 之间的函数关系.

$$\text{解 } y = \begin{cases} 0, & x \leq 880, \\ (x - 880) \times 5\%, & 880 < x \leq 1380, \\ (1380 - 880) \times 5\% + (x - 1380) \times 10\%, & 1380 < x \leq 2000. \end{cases}$$

例 7 取整函数. 设 x 为任一实数，称不超过 x 的最大整数为 x 的整数部分，记为 $[x]$ ，称函数 $y = [x]$ 为取整函数. 它的定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $\mathbf{Z}$ ，例如 $[0.5] = 0$ ， $[1] = 1$ ， $[1.99] = 1$ ， $[\pi] = 3$ ， $[-2] = -2$ ， $[-3.2] = -4$ 等等，其图形如图

1-11 所示.

取整函数是分段函数,它还可表示为

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

例 8 设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 4, & x < 0. \end{cases}$$

求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

解 分段函数在某点处的值应根据该点所在区间对应的解析式来确定,于是有

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 4 = 5; \quad f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1; \\ f(1) &= 2 \times 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

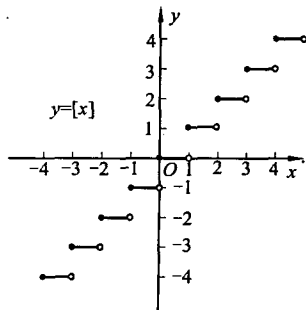


图 1-11

三 几种特殊的函数

在研究函数时,经常遇到几种特殊的函数.

1. 有界函数

例如,正弦函数 $y = \sin x$,其函数值总介于 -1 与 1 之间,即 $|\sin x| \leq 1$. 这时,我们说在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上,正弦函数 $y = \sin x$ 是有界的.

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,如果存在正数 M ,对于 D 的某子集上的任一 x ,均有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在该子集上为有界函数,或称 $f(x)$ 在此子集上有界,否则称 $f(x)$ 在此子集上无界.

例如,函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,因为取 $M = 1$ (也可取 M 为大于 1 的任何实数) 总有 $|\cos x| \leq M, x \in \mathbf{R}$.

而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界,因为对任意取定的一个正数 M ,不能使 $|\frac{1}{x}| \leq M$ 在 $(0, 1)$ 内都成立. 因为在 $(0, 1)$ 内, $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{x}$, 要使 $\frac{1}{x} > M$, 只要 $0 < x < \frac{1}{M}$, 如果取 $x_0 = \frac{1}{M+1} \in (0, 1)$, 则有 $x_0 < \frac{1}{M}$, $|\frac{1}{x_0}| = \frac{1}{x_0} = M+1 > M$, 故 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界. 但是 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内却有界,因为取 $M = 1$, 当 $x \in (1, 2)$ 时, 均有 $|y| = \frac{1}{x} \leq M$.

2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 在其有定义的某区间上,当自变量增大时,函数值总是增大(或减小),则称 $f(x)$ 在此区间上单调增加(或减小),并称此区间为函数的单调区间. 单