师范学校課本

几何

人民教育出版社

出版者的話

本書是根据中華人民共和國教育部編訂的师范学校数学教学大綱編寫的，供师范学校一年級和二年級上学期几何教学之用.

本書取材於苏联阿·普·吉西略夫所編的十年制中学几何課本第一册，阿·普·吉西略夫所編的师范学校几何課本，恩·雷布金所編的十年制中学几何習題彙編第一册，並且参考了恩·阿·格拉哥列夫所編的初等几何学（平面部分）.

初稿編出之后，曾經征求了北京师范学校、通縣师范学校、通縣女子师范学校、北京函授师范学校数学教师們的一些意見，但是由於时間倉促，來不及廣泛地征求全國各地师范学校数学教师和專家們的意見，書中一定会有不少的缺点和問題．希望教师和同学們在使用中，發現了什么缺点和問題，随时告訴我們，以便再版时修正.

对於給本書提出意見的各位先生，在这里致以衷心的感謝.

~~几何：86节~~

人民教育出版社

一九五六年四月

几何：86节

平：60（平：60节；立：26节）

三角：50节

合計：136节

目　　錄

平面几何

立体几何

平面几何

第一章 相似形

I 綫段的度量

1. 引言 我們已經知道怎样判定兩条綫段是不是相等,和怎样比較它們的大小. 現在我們來研究怎样度量綫段,也就是怎样用数目來表示綫段的長度的問題.

度量綫段所根据的是下面的公理:

亞几默得公理* **在長短不同的兩条綫段中,無論較長的綫段怎样長,較短的綫段怎样短,我們总可以在較長的綫段上連續截取較短的綫段,並且截取到某一次以后,就得出下面兩种情形中的一种:或者沒有剩余,或者得到一条短於較短綫段的剩余綫段.**

換一句話說,这个公理就是:如果 a 和 b 是兩条已知的綫段,並且 $a>b$,那末我們总可以求出一个整数 m,使 $mb \leqq a$,並且 $(m+1)b>a$,就是使 $mb \leqq a<(m+1)b$.

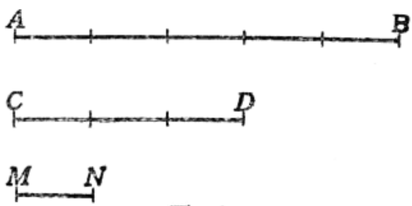

圖 1

2. 兩条綫段的公度 兩条綫段如果各含有第三条綫段的整数倍数而沒有剩余,

---

* 亞几默得(紀元前 287 年——紀元前 212 年)是希臘的数学家. 他是一个热烈的爱國者. 当罗馬人圍攻希臘的叙拉库薩城的时候,他貢献出自己所有的科学知識來領導防御这个城市. 当这座城市陷落以后,罗馬兵士闖進他的家里的时候,他正在沙子上画几何圖形,他恐怕兵士破坏他的圖形,叫喊道"不要动我的圖". 不幸他終於被罗馬兵士殺死了.

第三条綫段就叫做这兩条綫段的公度．例如，綫段 AB（圖1）含有綫段 MN 的5倍，綫段 CD 含有綫段 MN 的3倍，綫段 MN 就是綫段 AB 和綫段 CD 的公度．

如果綫段 MN 是綫段 AB 和綫段 CD 的公度，把 MN 分成2、3、4或者更多的等分的时候，这綫段的每一等分顯然也是 AB 和 CD 的公度．因此，兩条綫段如果有某一个公度，它們就有無数个公度．很容易看出來，在这無数个公度中，沒有最小的一个，但必定有最大的一个．

如果兩条綫段有公度，那末最大的一个公度叫做这兩条綫段的最大公度．

3. 求兩条綫段最大公度所根据的定理

定理1　在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫段的整数倍数而沒有剩余，那末較短的綫段就是这兩条綫段的最大公度．

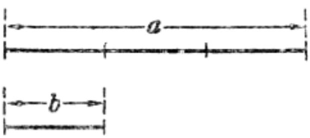

圖 2

例如，綫段 a（圖2）含有綫段 b 的3倍，因为綫段 b 就是它本身的1倍，所以綫段 b 是綫段 a 和綫段 b 的公度．其次，綫段 b 不可能含有任何比它自己更長的綫段的整数倍数，所以綫段 b 就是綫段 a 和綫段 b 的最大公度．

定理2　在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫段的整数倍数而有剩余，那末这兩条綫段的最大公度（如果存在的話），就是較短的綫段和剩余綫段的最大公度．

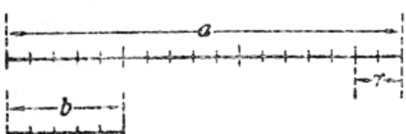

圖 3

例如，綫段 a 含有綫段 b 的3倍和剩余綫段 r（圖3），

那末

$$a=b+b+b+r.$$

从这个等式我們可以得出:

(1) 如果綫段 b 和綫段 r 各含有某一条綫段的整数倍数而沒有剩余,那末綫段 a 也必定含有这一条綫段的整数倍数而沒有剩余. 例如,綫段 b 含有某一条綫段的 5 倍,綫段 r 含有这条綫段的 2 倍,綫段 a 就含有这条綫段的(5+5+5+2)倍,卽 17 倍.

(2) 反过來,如果綫段 a 和綫段 b 各含有某一条綫段的整数倍数而沒有剩余,綫段 r 也就含有这条綫段的整数倍数而沒有剩余. 例如,綫段 a 含有某一条綫段的 17 倍,綫段 b 含有这条綫段的 5 倍,那末綫段 a 中等於 $3b$ 的那一部分一共含有这条綫段的 15 倍,因此綫段 r 就含有这条綫段的(17—15)倍,卽 2 倍.

因此在兩組綫段

$$\overbrace{a \text{ 和 } b} \qquad \overbrace{b \text{ 和 } r}$$

中,如果有公度存在,那末所有的公度必定都是相同的,所以它們的最大公度也必定是相同的.

4. 兩条綫段的最大公度的求法 例如要求兩条已知綫段 AB 和 CD (圖 4)的最大公度. 我們在較長的綫段 AB 上用圓規从它的一端 A 起,尽可能地連續截取等於 CD 的綫段. 根据亞儿默得公理,結果可能是下面兩种情形中的一种:

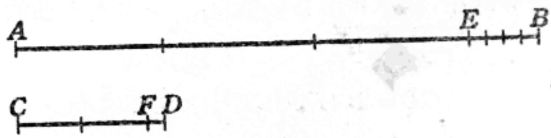

圖 4

(1) 截取到某一次,正好截完而沒有剩余,这时根据 § 3 的定

理1，綫段 CD 就是所求的最大公度.

(2) 截取到某一次，得到比 CD 短的剩余綫段 EB (圖 4). 这时根据 §3 的定理 2，問題就可以变成求兩条較短的綫段 CD 和 EB 的最大公度. 依照上面的方法，在綫段 CD 上尽可能地連續截取等於 EB 的綫段. 結果可能是兩种情形中的一种：或者(1)正好截完而沒有剩余，那末 EB 就是所求的最大公度. 或者(2)得到比 EB 短的剩余綫段 FD，那末問題又变成求另外兩条較短的綫段 EB 和 FD 的最大公度.

这样繼續輾轉相截，我們总会得到下面兩种情形中的一种：

(1) 在輾轉相截若干回以后，正好截完而沒有剩余；

(2) 輾轉相截的过程一直進行下去，永远有剩余(当然这只有在理論上是可能的，在实际作圖的时候，因为受到画圖儀器的限制，我們不可能截取任意小的綫段).

在第一种情形，最后一回的剩余綫段就是已知的兩条綫段 AB 和 CD 的最大公度. 为了便於計算出已知綫段所含最大公度的倍数，我們可以順次寫出由每回相截所得到的等式，例如由圖 4 我們得到下列等式：

第一回相截…………$AB=3CD+EB$;

第二回相截…………$CD=2EB+FD$;

第三回相截…………$EB=4FD$.

在这些等式中，依次把下面一个的等量代入上面的等式，就得到

$$CD=2(4FD)+FD=9FD;$$

$$AB=3(9FD)+4FD=31FD.$$

在第二种情形，已知的兩条綫段 AB 和 CD 就不可能有公度.

这一点我們可以用反証法來証明．假定这兩条綫段有某一个公度，那末不但綫段 AB 和綫段 CD 含有这个公度的整数倍数，剩余綫段 EB 也含有这个公度的整数倍数，因而第二回的剩余綫段 FD 以及以后各回的剩余綫段也含有这个公度的整数倍数．但是这些剩余綫段是逐次減小的，所以每一回的剩余綫段中所含这个公度的倍数，都比它前面一回的剩余綫段所含这个公度的倍数小．因此如果把輾轉相截的过程繼續進行下去，一定有不再得到任何剩余的时候．但这和已知的条件相矛盾．由此可知，已知的兩条綫段不能有公度．

5. 关於綫段的度量的概念　量一条綫段，我們是取定一条綫段做标准，在所量的綫段上尽可能地來截取和它相等的綫段．这条取定做标准的綫段叫做**長度單位**．从上面可以知道，所量的綫段和長度單位可能有公度，也可能沒有公度．現在我們分別加以討論．

（1）假設所量的綫段 a 和長度單位 l 有公度．我們就先求出它們的最大公度，並且判明綫段 l 和綫段 a 各含有这个最大公度的多少倍．如果最大公度就是綫段 l，度量的結果就是整数．例如，綫段 a 含有綫段 l 的 3 倍，綫段 a 的長度就等於 3 个長度單位．如果最大公度是綫段 l 的若干分之一，度量的結果就是分数．例如，最大公度是綫段 l 的 $\frac{1}{4}$，而綫段 a 是这个最大公度的 9 倍（圖 5），綫段 a 的長度就等於 $\frac{9}{4}$ 个長度單位．

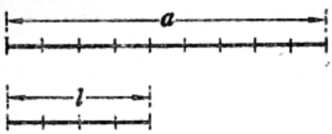

圖 5

量一条綫段所得的数，叫做这条綫段的量数．从上面的說明可以知道，如果一条綫段和長度單位有公度，用这个長度單位來量

这条綫段所得的量数必定是一个整数或者一个分数，换句話說，就是一个有理数.

(2) 假設所量的綫段 a 和長度單位 l 沒有公度. 我們可以求出和長度單位 l 有公度的另外兩条綫段，其中的一条略短於 a，而另一条略長於 a，並且它們和 a 的差都可以小於任何指定的綫段. 为了求出这样的兩条綫段，我們可以用下面的方法來進行：例如，要求出和長度單位 l 有公度並且和綫段 a 的差小於 $\frac{1}{10}$ 長度單位的綫段，就把長度單位 l 分成 10 个等分(圖 6)，並且用一个等分，即 $\frac{1}{10}l$ 作标准，在綫段 a 上尽可能地連續截取. 假設截到 13 次

圖 6

就得到一个小於 $\frac{1}{10}l$ 的剩余綫段，这时我們就得出一条和長度單位有公度並且略小於 a 的綫段 a'. 再用 $\frac{1}{10}l$ 截取一次，就可以得出另一条和長度單位有公度並且略大於 a 的綫段 a''. 这兩条綫段和綫段 a 的差都小於 $\frac{1}{10}l$，它們的長度分别等於 $\frac{13}{10}$ 長度單位和 $\frac{14}{10}$ 長度單位. $\frac{13}{10}$ 和 $\frac{14}{10}$ 都可以作为綫段 a 的長度的量数的近似值：$\frac{13}{10}$ 是不足近似值，$\frac{14}{10}$ 是过剩近似值. 因为綫段 a 与綫段 a' 或 a'' 的差都小於長度單位的 $\frac{1}{10}$，所以这兩个近似值都表示綫段 a 的長度的量数精确到 $\frac{1}{10}$.

一般地說，为了求出綫段 a 的長度的量数精确到長度單位的

$\frac{1}{10^n}$的近似值，可以把長度單位 l 分成10^n 个等分，並且求出綫段 a 含有$\frac{1}{10^n}l$ 的整数倍数，如果 a 含有$\frac{1}{10^n}l$ 的 m 倍和一个小於 $\frac{1}{10^n}l$ 的剩余綫段，那末 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$ 就是綫段 a 的長度的量数的近似值，並且精确到$\frac{1}{10^n}$，第一个是不足近似值，第二个是过剩近似值.

用上面的方法，我們总可以求出一个有理数來表示綫段 a 的長度的量数的不足近似值或者过剩近似值.

在綫段 a 和長度單位 l 沒有公度的时候，要求出一个数來表示綫段 a 的長度的量数的正确值，可以用下面的方法:

順次求出綫段 a 的長度的量数的不足近似值，首先精确到0.1，然后精确到 0.01，再精确到 0.001，並且無限地繼續下去，每次都把精确度提高 10 倍. 由这种过程就順次得出一列小数，首先是一位小数，然后是兩位小数、三位小数等等，越到后面小数的位数越多. 这样無限地繼續下去，就得到一个無限不循环小数(这个小数不可能是循环小数，因为如果是循环小数，就可以化成分数，綫段 a 和長度單位 l 就要有公度了).

从代数上可以知道，無限不循环小数叫做無理数. 从上面的說明可以知道，如果一条綫段和長度單位沒有公度，用这个長度單位來量这条綫段所得的量数是一个無理数.

注意 順次求得綫段 a 的長度的量数精确到 0.1、0.01、0.001、……的过剩近似值，也可以得到同一个無理数. 事实上，精确度相同的不足近似值和过剩近似值，它們的差别只在最后的某些小数位上. 把精确度順次提高的时候，这些最后的小数位离小数点向右方越來越远，兩个小数中数字相同的位数就越來越多. 如果無限地繼續这种过程，由兩种情形所得出來的，必定是同一个無限不循环小数，也就是同一个無理数.

6. 兩条綫段的比　以后我們說到綫段的長度，指的就是用某个長度單位來量这条綫段所得的量数.

兩条綫段的比就是用同一个長度單位來量它們所得的量数的比.

兩条綫段的比和所取的長度單位無关. 例如，取原來長度單位的$\frac{1}{3}$为新的長度單位，那末每条綫段所含新單位的数目都是所含原單位的数目的 3 倍，所以，在表示兩条綫段的比的分数中，分子和分母都擴大了 3 倍，而分数的值並不改变.

从上面所說的可以知道：

一条綫段的量数就是这条綫段和長度單位的比.

兩条綫段 a 和 b 的比也就是用 b 做長度單位去量 a 所得的量数.

如果兩条綫段有公度，那末它們的比是一个有理数；如果兩条綫段沒有公度，那末它們的比是一个無理数.

7. 比例綫段　如果綫段 a 和 b 的比等於綫段 c 和 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我們就說这**四条綫段 a、b、c、d 成比例.** 这时，綫段 a 和 d 叫做比例的**外項**，綫段 b 和 c 叫做比例的**內項**，綫段 d 叫做綫段 a、b、c 的**第四比例項**.

如果三条綫段 a、b、c 之間有$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$的关系，那末綫段 b 叫做綫段 a 和 c 的**比例中項**.

因为綫段的長度指的是它的量数，所以綫段的比和由綫段組成的比例分別具有数的比和由数組成的比例的性質. 下面一些性質是我們以后常常要应用到的.

（1）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $ad=bc$.

(2) 如果 $ad=bc$，那末$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(3) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$(反比定理). 7节

(4) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$(更比定理).

(5) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(合比定理).

(6) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，並且 $a>b$，那末$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$(分比定理).

(7) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，並且 $a>b$，那末$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$(合分比定理).

(8) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$，那末

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots(\text{等比定理}).$$

習　題　一

1. 如果 l 是一条已知的綫段，在下列各种情况下，求綫段 a 和 b 的最大公度各是綫段 l 的多少倍：

(1) a 含有 l 的 6 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(2) a 含有 l 的 7 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(3) a 含有 l 的 8 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(4) l 含有 a 的 2 倍，l 含有 b 的 3 倍.

2. 如果綫段 a 含有綫段 l 的 54 倍，綫段 b 含有綫段 l 的 15 倍；並且在 a 上連續截取等於 b 的綫段后所得的比 b 短的剩余綫段是 r，r 含有 l 的几倍？

3. 在上題中，綫段 a 和 b 的最大公度是綫段 l 的多少倍？綫段 b 和 r 的最大公度是綫段 l 的多少倍？

4. 如果綫段 a 和 b 分別含有綫段 l 的 207 倍和 93 倍，在 a 上連續截取 b 后所得的比 b 短的剩余綫段是 r_1，在 b 上連續截取 r_1 后所得的比 r_1 短的

剩余綫段是 r_2,…….

(1) 求 r_1、r_2、……各含有 l 的多少倍;

(2) 求綫段 a 和 b 的最大公度含有 l 的多少倍.

5. 綫段 a 和 b 輾轉相截,各回的剩余綫段依次为 r_1、r_2、r_3,並且

$$a=3b+r_1,$$
$$b=2r_1+r_2,$$
$$r_1=4r_2+r_3,$$
$$r_2=5r_3.$$

(1) 求 a 和 b 的最大公度;

(2) a 和 b 各含有这个最大公度的多少倍?

6. 用 §5 的方法求:

(1) 以一个正方形的一边为長度單位,量它的对角綫所得的量数(精确到 0.1).

(2) 以一个等边三角形的一边为長度單位,量它的高所得的量数(精确到 0.1).

7. 已知綫段 DE 和 $\triangle ABC$ 的兩边 AB 和 AC 分别相交於 D 和 E,並且 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$;求証:

(1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$;

(2) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

8. 已知綫段 DE 和 $\triangle ABC$ 的兩边 AB 和 AC 分别相交於 D 和 E,並且 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$;求証:

(1) $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$;

(2) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

9. 在第 8 題中,如果 $AB>AC$,求証 $\frac{AB+AC}{AB-AC}=\frac{AD+AE}{AD-AE}$.

10. 在第 8 題中,如果 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{3}{2}$,並且 $\triangle ABC$ 的周長为 6cm,求 $\triangle ADE$ 的周長.

11. 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$和$\frac{a}{b}=\frac{c}{e}$;那末$d=e$.

12. 城市建設計划平面圖有三种不同的比例尺: $\frac{1}{50,000}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{1,000}$; 在1:50,000的圖紙上,一条街的長是$3\,cm$,在另外兩种圖紙上这条街的長是多少?

II 关於比例綫段的定理

8. 定理 平行於三角形的一边而和其他兩边相交的直綫,把这兩边分为成比例的綫段.

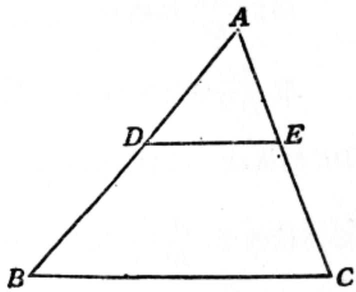

圖 7

已知: 在$\triangle ABC$中,直綫DE平行於一边BC,和其他兩边AB、AC交於D、E(圖7).

求証: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

証明: 可能有下列兩种情形:

(1) 綫段AD和DB是有公度的綫段. 就是說,它們的比是有理数,例如$\frac{AD}{DB}=0.7$. 这时用DB的$\frac{1}{10}$在AD上可以截取7次,如果把綫段AB分成17等分,过各分点分别引直綫平行於DE,这些直綫也平行於BC. 所以AC也被分成了17等分,並且AE含有7个等分,而EC含有10个等分;这就是說,用EC的$\frac{1}{10}$在綫段AE上可以截取7次,所以

$$\frac{AE}{EC}=0.7,$$

因此
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

(2) 綫段 AD 和 DB 是無公度的綫段. 就是說, 它們的比是無理数, 即用無限不循环小数來表示的, 例如 $\frac{AD}{DB}=0.6372\cdots\cdots$, 这个比精确到 0.1 的时候等於 0.6, 用綫段 DB 的 $\frac{1}{10}$ 在綫段 AD 上截取 6 次以后, 还有一段小於 $\frac{1}{10}DB$ 的剩余. 过各分点分别引直綫平行於 DE, 綫段 EC 即被分成 10 等分, 而 AE 含有 6 个这样的等分和一段小於 $\frac{1}{10}EC$ 的剩余.

所以 $\frac{AE}{EC}$ 精确到 0.1 的比也等於 0.6.

取 $\frac{AD}{DB}$ 的比精确到 0.01, 得 $\frac{AD}{DB}=0.63$, 並且同样作出平行於 DE 的直綫, 我們可以得 $\frac{AE}{EC}$ 精确到 0.01 的比也等於 0.63. 繼續提高精确度, $\frac{AE}{EC}$ 的比和 $\frac{AD}{DB}$ 的比的精确值都同样是無限不循环小数 0.6372……, 即

$$\frac{AD}{DB}=0.6372\cdots\cdots;\quad \frac{AE}{EC}=0.6372\cdots\cdots.$$

所以 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

推論 **截一个角的兩边的平行綫, 把这角的兩边分为成比例的綫段***.

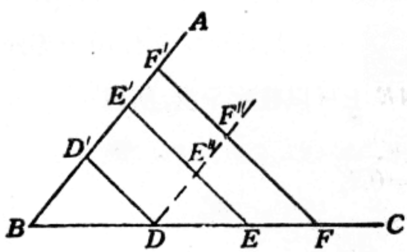

圖 8

平行綫 DD'、EE'、FF' (圖 8) 截 $\angle ABC$ 的兩边 BA 和 BC 於 D、E、F 和 D'、E'、F', 根据上面的定理得: