

回旋加速器理论与设计

Theory and Design of Cyclotrons



唐靖宇 魏宝文 编著

中国科学技术大学出版社

“十一五”国家重点图书

定价：58.00 元

ISBN 978-7-312-02223-4



9 787312 022234 >

当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书

中国科学技术大学
校友文库

回旋加速器理论与设计

Theory and Design of Cyclotrons

唐靖宇 魏宝文 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书比较系统地介绍了回旋加速器的理论,并以兰州重离子加速器系统的注入器 SFC 和主加速器 SSC 两台等时性回旋加速器为例介绍该类型加速器的设计特点 and 设计方法。全书分为九章,分别介绍回旋加速器的发展历史和应用方向,加速器物理的研究方法和带电粒子束运动的相空间理论,经典回旋加速器理论,等时性回旋加速器的理论基础,等时性磁场的建立,束流注入和中心区,束流引出,多级加速器的匹配考虑,以及回旋加速器的近期发展。本书可作为粒子加速器专业方向的研究生学习加速器物理的参考书,也可供从事相关专业的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

回旋加速器理论与设计/唐靖宇,魏宝文编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2008. 10

(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书;中国科学技术大学校友文库)

“十一五”国家重点图书

ISBN 978-7-312-02223-4

I. 回… II. ①唐…②魏… III. ①回旋加速器—理论②回旋加速器—设计 IV. TL54

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 088378 号

出版发行 中国科学技术大学出版社

地址 安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026

网址 <http://press.ustc.edu.cn>

电话 编辑部 0551-3606196 发行部 0551-3602909

印 刷 合肥晓星印刷有限责任公司

经 销 全国新华书店

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 16

字 数 270 千

版 次 2008 年 10 月第 1 版

印 次 2008 年 10 月第 1 次印刷

印 数 1—2000 册

定 价 58.00 元

序

本书是在唐靖宇研究员的博士论文基础上扩充编著的,曾作为中国科学院近代物理研究所的研究生学习加速器理论课程的教学参考书。它比较系统地介绍了回旋加速器特别是等时性回旋加速器的理论,并以兰州重离子加速器系统的注入器 SFC 和主加速器 SSC 两台等时性回旋加速器为例,全面地介绍该类型加速器的理论、设计特点和设计方法。

首先,一般性地介绍了粒子加速器尤其是回旋加速器在原子核物理及粒子物理研究中的作用,以及其他应用学科中的作用,加速器尤其是回旋加速器的发展历史和发展趋势。在第 2 章中一般性地介绍了加速器物理的研究方法和带电粒子束运动的相空间理论,以及采用相空间理论在理解加速器的物理图像以及在设计初期对某些重要参数的评价和估计方面的必要性,也介绍了进行实际加速器设计中常用的束流轨道数值计算方法。

第 3 章和第 4 章给出了经典回旋加速器和等时性回旋加速器的理论基础,包括轴向聚焦和径向聚焦的稳定加速条件、等时性加速原理、由扇形磁铁产生的方位角调变磁场提供的轴向聚焦力、径向运动稳定区、共振理论和加速平衡轨道理论等。在介绍等时性回旋加速器的理论和设计方法的同时还一般性地介绍了兰州重离子加速器的设计思想、基本参数和运行及改造情况等。在后续的各章中,以其注入器 SFC 和主加速器 SSC 两台回旋加速器和它们的分系统的具体设计为例子,作了比较详细的实际应用对照。

第 5 章到第 7 章,从等时场的建立、注入系统及引出系统等比较具体的方面来阐述该类型加速器的理论和各种实现方法。第 5 章介绍了 GORDON 理

论和 k_b-k_r 方法这两种比较常见的建立理论等时场的方法、磁铁及垫补线圈的设计,以及磁场的测量等。介绍了几种常见的等时性磁场的垫补方法,对实际等时性磁场的评价以及通过对束流相位的测量来对等时场进行优化等。

在第 6 章中,系统地介绍了利用外离子源或利用其他加速器作为注入器时,通常采用的轴向或者径向注入方法。注入引出系统尤其是注入系统通常是影响一台加速器传输效率的关键性部分,因而在如何提高注入系统的效率方面人们做了大量的工作,特别是轴向注入方法。回旋加速器的中心区是注入的结束和正常加速过程的开始,其设计的好坏对注入效率和后面的束流轨道也是很重要的。本章最后较详细地介绍了 SFC 的轴向注入系统设计。

第 7 章在介绍了束流从回旋加速器中的引出方法时,重点强调了束流用户或后级加速器对引出束流品质的要求,以及较高的内束流质量和单圈引出的重要性。具体介绍了提高引出点的圈间距的方法包括提高加速圈距、共振进动和非共振进动方法等。引出路径上的束流聚焦也是引出系统设计应考虑的一个方面。另外还介绍了再生引出方法和剥离膜引出方法。

第 8 章介绍了多级加速器的各种匹配考虑,如频率匹配、能量匹配、高频相位匹配、横向相空间匹配等等。因而提出了各种参数的稳定性要求以及能量测量、相位测量等,同时也介绍了聚束器对提高两台加速器的匹配效率的作用。同样也介绍了 HIRFL 两台回旋加速器的束团结构和纵向匹配,包括 BL0 和 BL1 输运线上不同类型聚束器的设计。

第 9 章介绍了回旋加速器近来的发展,如超导磁铁技术的应用、强流加速器相关的设计和技术发展、直接应用于国民生活的小型回旋加速器的商业化等。另外,还重点介绍了一种在 20 世纪 50 年代提出的、介于回旋加速器与同步加速器之间的加速器——FFAG 加速器的基本原理和应用,它在新的技术条件和需求下也得到了新生和发展。

本书大量引用了近代物理所重离子加速器建设者、运行维护及改进者的工作,王义芳研究员审阅了本书的第 6 章和第 7 章,作者在此一并致谢。

作者

2008 年 5 月

目次

序	(I)
第 1 章 绪论	(1)
第 2 章 带电粒子束的相空间理论介绍	(5)
2.1 粒子运动的分析力学表示	(5)
2.1.1 为什么加速器物理经常采用哈密顿力学的方法	(5)
2.1.2 拉格朗日方程	(6)
2.1.3 哈密顿正则方程	(7)
2.1.4 正则变换	(8)
2.2 相空间描述	(9)
2.2.1 相空间和正则相空间	(9)
2.2.2 刘维定理	(9)
2.2.3 作用量积分的绝热不变性	(13)
2.2.4 束流发射度	(13)
2.3 相空间运动的矩阵表示	(14)
2.3.1 描迹法	(15)
2.3.2 矩阵方法	(16)
第 3 章 回旋加速器的一般理论	(20)
3.1 经典回旋加速器	(20)
3.1.1 谐振加速原理	(20)
3.1.2 回旋加速器的基本原理	(21)

3.2 径向聚焦和轴向聚焦	(23)
3.2.1 带电粒子在电磁场中的运动方程	(23)
3.2.2 径向聚焦和轴向聚焦	(24)
3.2.3 运动方程的哈密顿描述	(26)
3.3 谐波加速和多 Dee 加速结构	(28)
3.3.1 单 Dee 加速结构	(28)
3.3.2 多 Dee 加速结构	(29)
3.4 自由振荡幅度的绝热变化	(30)
3.5 共振理论	(31)
3.5.1 一维共振	(32)
3.5.2 耦合共振	(34)
3.5.3 共振的强弱	(35)
第 4 章 等时性回旋加速器理论	(37)
4.1 等时性加速器	(37)
4.1.1 等时性加速条件	(38)
4.1.2 边缘场聚焦	(39)
4.1.3 周期性聚焦系统的稳定性	(45)
4.1.4 最高能量限制和参数选择	(48)
4.2 等时性回旋加速器的静态轨道性质	(49)
4.2.1 磁场结构和运动方程	(49)
4.2.2 静态平衡轨道	(51)
4.2.3 等时性磁场	(51)
4.2.4 自由振荡频率	(52)
4.2.5 径向运动的非线性效应	(53)
4.2.6 静态平衡轨道以及 ν_r 和 ν_z 的数值求解方法	(55)
4.3 等时性回旋加速器的加速轨道性质	(57)
4.3.1 加速平衡轨道	(57)
4.3.2 聚相现象	(62)
4.4 SFC 和 SSC 回旋加速器介绍	(65)
4.4.1 HIRFL 加速器系统	(65)
4.4.2 注入器 SFC	(67)
4.4.3 主加速器 SSC	(70)

第 5 章 等时性磁场的建立	(75)
5.1 概述	(75)
5.2 理论等时场	(77)
5.2.1 Gordon 方法	(77)
5.2.2 $k_B - k_r$ 方法	(83)
5.3 等时场的垫补和优化	(85)
5.3.1 等时场的垫补方法	(85)
5.3.2 计算程序 OPTCC 的具体优化步骤	(88)
5.3.3 等时场的评价	(90)
5.3.4 等时场的再优化	(91)
5.4 SFC 和 SSC 等时性磁场的建立	(94)
5.4.1 SFC 等时性磁场的建立	(94)
5.4.2 SSC 等时性磁场的建立	(98)
第 6 章 注入系统和中心区	(104)
6.1 内离子源和中心区	(104)
6.1.1 轨道中心化要求	(105)
6.1.2 轴向稳定性	(105)
6.1.3 常轨道加速	(107)
6.1.4 中心区参数的稳定性	(108)
6.2 外离子源轴向注入方法	(108)
6.2.1 轴向注入方法的一般描述	(109)
6.2.2 轴向孔中束流聚焦和注入相空间匹配	(109)
6.2.3 静电偏转镜	(111)
6.2.4 聚束器	(118)
6.2.5 空间电荷效应	(119)
6.2.6 中心区和轨道中心化	(121)
6.3 径向注入方法	(122)
6.3.1 轨道中心化	(123)
6.3.2 相空间匹配	(125)
6.3.3 谐波磁场的干扰	(127)
6.4 SFC 和 SSC 的注入系统设计	(128)
6.4.1 ECR 源轴向注入系统的设计	(129)

6.4.2	SFC 新注入束运线设计	(131)
6.4.3	SFC 中心区的设计	(139)
6.4.4	SSC 的径向注入系统	(152)
第 7 章	引出系统	(157)
7.1	概述	(157)
7.2	单圈引出	(158)
7.2.1	直接引出方法	(158)
7.2.2	径向聚焦效应	(159)
7.3	进动引出方法	(162)
7.3.1	共振进动增加圈距	(163)
7.3.2	非共振进动增加圈距	(164)
7.3.3	通过 $\nu_r = 2\nu_z$ 共振区	(165)
7.4	再生引出	(166)
7.5	剥离膜引出方法和其他引出方法	(168)
7.6	SFC 和 SSC 的引出方法	(170)
7.6.1	SFC 的引出系统	(170)
7.6.2	SSC 的引出系统	(175)
第 8 章	多级加速器间的纵向匹配	(179)
8.1	一般匹配要求	(179)
8.2	聚束器与束流纵向匹配	(180)
8.2.1	回旋加速器和束运线上的束流纵向运动	(180)
8.2.2	聚束器的纵向聚焦作用	(181)
8.3	HIRFL 束流纵向匹配设计	(185)
8.3.1	SFC 轴向注入线上聚束器的设计	(185)
8.3.2	BL1 束运线上聚束器的物理设计	(195)
8.3.3	SFC 与 SSC 的能量匹配	(200)
8.3.4	HIRFL 中的束团结构	(202)
第 9 章	回旋加速器的近期发展和 FFAG 加速器	(206)
9.1	概述	(206)
9.2	超导回旋加速器	(206)
9.3	强流回旋加速器	(209)
9.3.1	强流质子回旋加速器	(211)

9.3.2 强流重离子回旋加速器	(213)
9.4 回旋加速器的商业化	(215)
9.5 FFAG 加速器	(217)
9.5.1 FFAG 加速器的基本原理	(219)
9.5.2 等比 FFAG 加速器	(222)
9.5.3 非等比 FFAG 加速器	(225)
参考文献	(231)
数学符号索引	(244)

第 1 章 绪 论

1919 年, E. Rutherford 用 α 粒子轰击氮核首次实现了人工核蜕变, 于是利用放射性射线轰击原子核来研究核现象的方法受到广泛重视和使用。同时人们也提出了建造加速粒子装置的要求, 因为天然射线源提供的粒子种类少、强度不大、能量低且不可调。随着研究工作的深入, 人们希望有种类多、强度大、能量高的粒子源, 可以说近一个世纪以来, 粒子加速器的发展主要是围绕这个需求而展开的。人们想了很多办法, 如采用高压静电的 Van Der Graff 装置、采用串联变压器的高压倍加装置以及 E. O. Lawrence 发明的回旋加速装置。Lawrence 在 1930 年建成的第一台回旋加速装置只有几英寸(1 英寸 = 2.54 厘米)大, 1932 年实现核蜕变实验的回旋加速器的磁铁极面直径也只有 11 英寸。随着这种加速方法获得重视, 回旋加速器的规模越来越大, 获得的粒子能量越来越高, 粒子种类也越来越多。但随之也出现了许多理论上和技术上的困难, 如相对论效应、束流聚焦、共振效应等等。随着这些问题的解决, 回旋加速器也就获得了不断的发展。在回旋加速器发展的同时, 其他类型的圆形加速器也获得了发展, 并不断有新型结构的加速器出现, 如稳相加速器、同步加速器、等时性回旋加速器、对撞机和冷却储存环等。

到了 20 世纪 50 年代, 人们成功地加速了重离子, 并进行了重离子核反应和用重离子合成了新的超铀元素。从此, 重离子束流获得了广泛的重视, 它不仅用于研究原子核物理, 而且还利用它轰击原子、分子、晶体甚至生物细胞等物质来研究原子物理、分子物理、固体物理和生物物理。与此同时, 重离子束的应用研究也发展起来, 像离子注入技术用于半导体器件如材料的生产、表面

改性,以及用重离子束进行辐照损伤、培育种子和治疗癌症方面的研究。这些研究的开展同时在很大程度上又促进了重离子加速器和重离子源技术的发展。由于研究工作的需要,各国不断改进或新建新型重离子加速器;反过来,这些加速器的建成和使用又开拓了一些新的研究方向。由于到目前为止重离子源的高电荷态产额还比较低,而所有重离子加速器单位核子的最终能量都与被加速粒子的 $\frac{Z}{A}$ 值(荷质比)正相关,如回旋加速器与 $\left(\frac{Z}{A}\right)^2$ 成正比、直线加速器和静电加速器与 $\frac{Z}{A}$ 成正比。所以,现行的高能量重离子加速装置都采用两台或几台加速器串联起来使用,中间加剥离器以增加 $\frac{Z}{A}$ 值从而获得较高的最终能量。

目前,国际上作为重离子加速器装置主加速器的,要么是回旋加速器(常温等时性回旋加速器和超导等时性回旋加速器),要么是同步加速器。而作为初步加速的注入器通常用串联式静电加速器、紧凑型式回旋加速器和直线加速器。对于紧凑型式回旋加速器,20 世纪 70 年代末发展起来的 ECR (Electron Cyclotron Resonance) 离子源技术具有很大的吸引力^[1],它比过去普遍采用的 Penning 离子源产生更高的电荷态和更高的流强,因而可以提高加速系统的最终能量和平均流强。但是这种离子源技术复杂且体积较大,不能放在加速器的真空室中,而必须放在加速器主体的外面,这就有一个从 ECR 离子源到回旋加速器中心的注入问题。通常都是采用轴向注入技术。其实这种外离子源的轴向注入技术在 20 世纪 60 年代初就开始发展了,只是对 Penning 源来说,它比放在加速器内部没有多大优越性,但对那些采用具有较大体积的极化离子源的回旋加速器则是主要技术。对于采用外离子源注入方法,因为在加速器的外面空间受到较小的限制,这对发展离子源技术是很大的有利条件,除了 ECR 离子源以外,其他类型的高剥离态离子源也在发展之中。到目前为止,ECR 离子源已趋成熟,性能非常稳定,它可以提供从轻核到 U 的各种元素(包括气体和金属元素)的各种剥离态的重离子束,其中较轻的元素可以做全剥离,因而被国际上广泛采用。较早发展起来的轴向注入技术由于 ECR 离子源的出现更加受到重视,因而也获得了进一步的发展。

尽管回旋加速器是一种发展历史相对较长的加速器类型,理论上已发展得很成熟,其设计方法和主要技术也都是比较成熟的,但随着科学研究和各方面实际应用的需要,新的设计方法和主要技术也还在不断出现。当前,回旋加

速器的几个主要发展趋势:一是强流回旋加速器,二是中型或大型回旋加速器采用超导磁铁,三是可以批量生产的实用型回旋加速器,四是某些情况下采用介于回旋加速器与同步加速器之间的 FFAG 型加速器。

为适应基于强流质子束或重离子束的放射束物理、散裂中子源、加速器驱动的核能系统(ADS)等研究的需要,加速流强很高的束流是当前加速器的重要发展方向之一,回旋加速器因为具有平均流强高的特点,是重要的选择之一,但在强流回旋加速器中,会出现一些普通回旋加速器没有的问题,包括很强的空间电荷效应问题、束流损失率问题和束流负载问题等,这些问题在以 GANIL 为代表的重离子加速器中^[2]和 PSI 为代表的质子回旋加速器^[3]中是很重要的,通过不断的努力,最高加速流强被不断地突破。超导磁铁技术的成熟为回旋加速器带来的新的发展方向,采用超导磁铁可以明显地减小回旋加速器的尺寸和重量,并能显著地减少运行时的电力消耗。世界上已建成了十几台超导回旋加速器。为了适应回旋加速器的普及化应用,如质子治疗、医用同位素的生产、正电子断层扫描(PET)等,需要简化加速器的结构并提高其可靠性和易操作性。为适应诸如 μ 介子工厂所需要的快加速要求,以及 ADS 和质子/重离子治疗等应用所需要的高重复频率的要求,20 世纪 50 年代提出的介于回旋加速器和同步加速器之间的固定场交变梯度(FFAG)加速器重新得到重视和发展。

作为回旋加速器从一开始就服务的研究领域,原子核物理的研究一直在伴随加速器本身的发展而发展。自 20 世纪 60 年代后期以来,核物理研究主要是利用重离子束来开展的,而从 20 世纪 80 年代后期以来,重离子核物理研究开辟了用放射束作为炮弹来进行各种研究的新领域。因为放射束(或次级束)是稳定核束与靶进行核反应后的产物,其强度要比初级束低几个量级,这就对加速器提出了更高的要求。一方面要大幅度提高初级束流强从而保证要求的次级束流强度,另一方面要求加速或传输流强很低的次级束流。前者要求提高整个加速器的传输效率和解决高流强下的空间电荷效应和辐射损伤等问题,后者要求解决很低流强下的束流诊断问题以及对非常丰富的次级束流产物的鉴别问题。这是对加速器物理和加速器技术的一次有力挑战。

中国科学院近代物理所大型重离子加速装置(HIRFL)于 1988 年建成,在此后的运行过程中进行了不断的改进和提高,1997 年在 HIRFL 上又建成了放射性次级束流线(RIBLL)。本书以 HIRFL 为例,较系统地介绍等时性回旋加速器的理论和设计方法,以及一些较为具体的设计方案和结果。

束流动力学和束流传输理论是进行加速器理论研究和物理设计的基础,它研究包括束流从离子源的引出、注入到加速器中、在加速器中的很多圈的加速、从加速器的引出、从一台加速器到另一台加速器或实验站之间的传输等过程,研究在加速器中特殊的电磁场形式作用力下带电粒子束的集体行为。对束流动力学的研究又反过来对电磁场的形式提出要求,然后和电磁设备的具体设计以及实际得到的电场和磁场形式联系起来,这就是加速器的理论设计过程。在加速器的运行和调束过程中,利用束流诊断元件测量得到的关于束流状态的信息,以及束流动力学的知识,可以判断在加速器实际发生的过程,从而对加速器的参数进行调整,以使加速器处在最佳的工作状态。因为涉及到大量粒子组成的粒子束的运动,在很多情况下,对束流动力学的描述采用分析力学和相空间的方法是较为方便的,即对于具体的电磁场形式提出运动的哈密顿函数,然后进行坐标系的变换,并忽略某些高阶项,以得到较为简明的哈密顿函数,或直接得到粒子束运动的图像,或通过对该哈密顿函数描述的运动进行分析求解或数值求解。这种方法对得到束流集体运动的物理图像方法比较有效,但在考虑束流在实际的加速器中的行为时,经常要忽略很多非线性项和高次项,而这些项的累积作用有时是重要的,并会造成与实际过程的偏差。因此,在进行加速器的具体设计时,更常采用的是利用测量得到的电场和磁场直接进行数值积分的方法,对处在不同初始条件的粒子进行跟踪,从而得到更为精确的关于粒子束的运动的情况。

本书对束流动力学的一般理论,以及在回旋加速器特别是等时性回旋加速器中的各种物理图像和研究方法等进行了较为系统的介绍,并以 HIRFL 加速器系统中的两台等时性回旋加速器的具体设计为例,对各分系统的研究和设计特点进行了探讨。除了介绍束流动力学的分析方法外,也介绍了采用数值计算研究束流运动的方法。

关于回旋加速器方面的专著^[4]和作系统介绍的参考材料较少,有兴趣的读者可参考历届国际回旋加速器的会议文集^[5~22]、CERN 加速器学校讲义^[23]以及一般性加速器原理和加速器物理的著作^[24~26]。

第2章 带电粒子束的相空间理论介绍

2.1 粒子运动的分析力学表示

2.1.1 为什么加速器物理经常采用哈密顿力学的方法

对于求解某个粒子的运动轨道,采用更传统的牛顿力学的方法显然更直观。可是,加速器物理研究的是由大量粒子组成的粒子束的运动规律,有时并不对具体粒子的运动轨迹感兴趣,而是对它们作为一个整体的表现感兴趣,如某些物理量是否为运动常数,运动是否稳定等;这时,分析力学或更具体一些——哈密顿力学方法就提供了更有力的工具。可以粗略地认为,哈密顿理论作为一个数学工具,可以更方便地了解现象的本质,对产生有效的描述粒子轨道的模型提供帮助。

加速器中,粒子束在电磁场中的运动已被证明很适合采用哈密顿理论进行描述。我们在几乎所有的加速器物理教科书中都会发现采用相空间描述的必要性,一些基本的原理如刘维定理等,都需要采用哈密顿力学的方法来表述。哈密顿理论不能替代粒子轨道的数值计算方法,但是可以帮助发现数值计算程序中的错误、求解方程的方法以及结果的表示方式等等。某些研究加速器物理的人可能不喜欢利用哈密顿方法来直接研究相关的问题,但如果对哈密顿力学有基本的了解,还是可以帮助他们理解一些基本的原理和他人得

到的研究进展。

本书中也经常借助哈密顿方法对一些基本的加速器物理问题和现象进行介绍。因此,我们先简单地介绍一些哈密顿力学的基础。读者可以进一步参考相关文献^[27~29]。

2.1.2 拉格朗日方程

对一个带电粒子在电磁场中的运动,我们可以采用牛顿力学方程来描述,也可以采用分析力学的方法来描述,它们是完全等价的。而分析力学的方法,特别是其中的哈密顿方法,常常可以把较为复杂的问题简化,从而得到较为清晰的物理图像,这对于粒子运动的平衡轨道求解、运动的稳定性问题和共振问题等的研究很有效,因而在粒子加速器的束流动力学和束流传输研究中有广泛的应用。直接从 D'Alembert 原理出发,很容易推导出非相对论情况下的粒子系的运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.1)$$

其中 T 是动能, q_j 是广义坐标, Q_j 是广义力, $\dot{q}_j$ 是对 q_j 的时间微分, n 为独立的广义坐标数。该方程一般称为拉格朗日方程。如果将动能的表示形式 $T = \frac{1}{2} m v^2$ 代入,就可以得到牛顿第二定律。

如果粒子运动体系中的作用力可以用作用势 V 来表示:

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.1.2)$$

或用与速度相关的势 U 来表示:

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (2.1.3)$$

引入拉格朗日函数 L :

$$L = T - V \quad \text{或} \quad L = T - U \quad (2.1.4)$$

则得到新的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.5)$$

而电磁场力如果用速度相关势 U 表示:

$$U = e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.1.6)$$