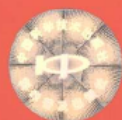


帮你学数学

北京市高一年级
数学竞赛试题解析
(1998~2007)

周春荔 李延林 编



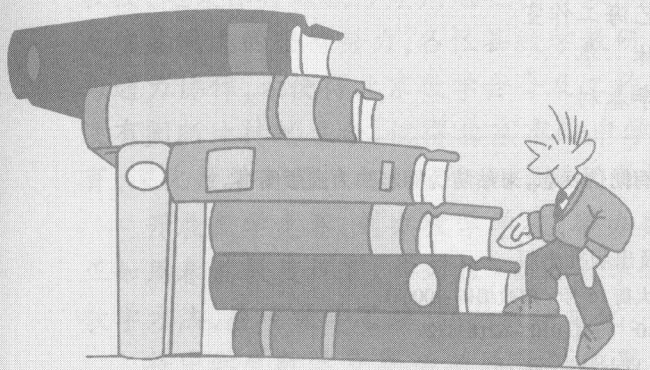
科学普及出版社

帮你学数学

北京市高一年级

数学竞赛试题解析

周春荔 李延林 编



科学普及出版社
· 北 京 ·

1998~2007

帮你学数学
北京市高一年级数学竞赛试题解析(1998~2007)

周春荔 李延林 编

策划编辑:徐扬科

责任编辑:谭建新 周江霞

封面设计:耕者设计工作室

正文设计:马 宁

插图:艺海工作室

责任校对:林 华

责任印制:李春利

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志,未贴防伪标志的为盗版图书。

科学普及出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081

电话:010-62103210 传真:010-62183872

<http://www.kjpbooks.com.cn>

科学普及出版社发行部发行

北京正道印刷厂印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:6.75 字数:100 千字

2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-110-06882-3/G·2987

印数:1—5000 册 定价:10.00 元

(凡购买本社的图书,如有缺页、倒页、
脱页者,本社发行部负责调换)

朋友！快来欣赏数学美的旋律

——“铺路石子”的心声

1998~2007年,北京市中学生数学竞赛一直坚持进行。我们将竞赛控制在数学爱好者范围,高一年级参赛人数不超过600人。

在这十年期间,北京市的中学数学教学经历了由部颁数学教学大纲到新课标的转变,教材经历了由“人教版”教材到“三省一市”教材再到“新课标实验教材”的更换。因此,我们每年的竞赛试题,只能适应当年北京市高一选用的数学教材与进度。比如在2005年以前,自然数集合 N 等价于正整数集 Z^+ ,还没有采用0是自然数的规定;直到2005年试题中才出现了新的补集的记号,如用 $\complement_S M$ 表示集合 M 在全集 S 中的补集。由于试题及解答是历史资料,我们仍保留原样供大家研究。这一点请读者使用本书时要加以注意。

这一阶段参加命题工作的主要成员除本书的两位编者周春荔、李延林老师外,还有唐大昌、郭志江、韩乐琴、尹克新等老师。此外王尚志教授、邱维声教授、赵大悌特级教师等同志也指导或参加过1997~1999年的命题工作。正是这些同志的坚持努力,各区县数学教研员及广大学校领导、数学教师的支持与通力协作,才使得北京数学会普及工作委员会的中学生数学竞赛活动,一直没有间断地持续至今,使得北京市的中学生数学竞赛活动对推进数学素质教育、深化数学新课改起到了积极有益的作用。

开展数学竞赛、创办数学学校、举办数学夏令营等数学普及工作的意义,正如周春荔教授祝贺《学习报》创办数学版的题词所说的:普及数学知识,解析数学方法,展现数学思维,弘扬数学文化。

将中学生数学竞赛活动的资料积累整理面世,是我们义不容辞的责任。在青少年数学爱好者成长的道路上,我们既是大家的朋友,也是一颗铺路的小石子。

让我们与数学爱好者一起欣赏数学美的旋律,一起来谱写数学素质教育的新篇章!

周春荔 李延林
2008年元月谨识

目 录

第一部分 北京市中学生数学竞赛试题(1998~2007)

1998 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题 (3)

高中一年级复赛试题 (4)

1999 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题 (6)

2000 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题 (8)

2001 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题 (10)

高中一年级复赛试题 (11)

2002 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题 (13)

高中一年级复赛试题 (14)

2003 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题 (16)

高中一年级复赛试题 (17)

2004 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题 (19)

高中一年级复赛试题 (20)

2005 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题 (22)

2006 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题 (24)

2007 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题 (26)

第二部分 北京市中学生数学竞赛试题解答(1998~2007)

1998 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题及解答 (31)

高中一年级复赛试题及解答 (35)

1999 年北京市中学生数学竞赛

(1) 高中一年级试题及解答 (41)

2000 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题及解答 (46)

2001 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题及解答 (51)

(8) 高中一年级复赛试题及解答 (55)

2002 年北京市中学生数学竞赛

(01) 高中一年级初赛试题及解答 (60)

(11) 高中一年级复赛试题及解答 (64)

2003 年北京市中学生数学竞赛

(81) 高中一年级初赛试题及解答 (69)

(41) 高中一年级复赛试题及解答 (73)

2004 年北京市中学生数学竞赛

(01) 高中一年级初赛试题及解答 (78)

(71) 高中一年级复赛试题及解答 (81)

2005 年北京市中学生数学竞赛

(01) 高中一年级试题及解答 (85)

2006 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题及解答 (91)

2007 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题及解答 (96)

(45) (96)

(05) (96)

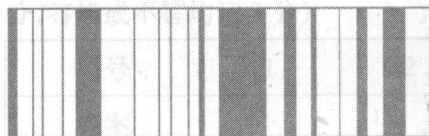
(05) (96)

1998年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题

1998年4月5日 8:30~10:30

一、选择题(满分36分,每小题只有一个正确答案,请将你的答案填在表格里,答对得6



第一部分

北京市中学生数学竞赛试题 (1998~2007)

2. 设 $A = \{x | x = 2m + 5n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 2m + 4n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, 那么 A 与 B 的关系是

A. $A \subset B$

B. $B \subset A$

C. $A = B$

D. $A \cap B = \emptyset$

3. 在 $\triangle ABC$ 的内切圆中, 切边 AB 于点 P , $AP = 7$, $BP = 5$, 则内切圆的半径等于

A. 6

B. $\sqrt{35}$

C. $-6 + \sqrt{71}$

D. 2

4. 函数 $f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$ 的值域是集合 M , 则 $\{2, -2, -1, -3\}$ 中不属于 M 的元素是

A. 2

B. -2

C. -1

D. -3

5. 已知函数 $y = f(x+1)$ 的图像过点 $P(2, 4)$, 那么函数 $y = f'(x+5)$ 的图像过点

A. $(-1, 3)$

B. $(9, 3)$

C. $(-1, 2)$

D. $(-1, 1)$

6. 三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 $SA \perp$ 底面 ABC , 且 $SA = AB = BC = CA$, 设二面角 $B-SC-A$ 的度数为 α , 则 $\cos \alpha$ 的值为

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{6}{7}$

D. $\frac{5}{7}$

第二部分 北京市中学生数学竞赛试题解答(1998~2007)

1998年北京市中学生数学竞赛	(41)
高中一年级试题及解答	(41)
高中二年级试题及解答	(42)
高中三年级试题及解答	(43)
1999年北京市中学生数学竞赛	(44)

高中一年级试题及解答	(45)
2001年北京市中学生数学竞赛	(46)
代陪一聚	(47)
高中一年级复赛试题及解答	(50)

2002年北京市中学生数学竞赛	(60)
题知赛竞学数中市中京北	(61)

2003年北京市中学生数学竞赛	(62)
高中一年级初赛试题及解答	(69)
高中一年级复赛试题及解答	(73)

2004年北京市中学生数学竞赛	(74)
高中一年级初赛试题及解答	(78)
高中一年级复赛试题及解答	(81)

2005年北京市中学生数学竞赛	(82)
高中一年级试题及解答	(85)

2006年北京市中学生数学竞赛	(86)
高中一年级试题及解答	(91)

2007年北京市中学生数学竞赛	(92)
高中一年级试题及解答	(95)

1998 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题

(1998 年 4 月 5 日 8:30 ~ 10:30)

一、选择题 (满分 36 分, 每小题只有一个正确答案, 请将你的答案填在表格里, 答对得 6 分, 答错或不答均记 0 分)

题号	1	2	3	4	5	6
答案						

1. 化简 $\sqrt{1 - \sin^2 19} - \sqrt{1 - \cos^2 98}$ 的结果是

- A. $\cos 19 - \sin 98$ B. $-\cos 19 - \sin 98$
C. $-\cos 19 + \sin 98$ D. $\cos 19 + \sin 98$

2. $A = \{x | x = 3m + 5n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 2m + 4n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, 那么, A 与 B 的关系是

- A. $A \subset B$ B. $B \subset A$ C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

3. $\text{Rt} \triangle ABC$ 的内切圆切斜边 AB 于点 P , $AP = 7$, $BP = 5$, 则内切圆的半径等于

- A. 6 B. $\sqrt{35}$ C. $-6 + \sqrt{71}$ D. 2

4. 函数 $f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$ 的值域是集合 M , 则 $\{2, -2, -1, -3\}$ 中不属于 M 的元素是

- A. 2 B. -2 C. -1 D. -3

5. 已知函数 $y = f(x+1)$ 的图像过点 $P(2, 4)$, 那么函数 $y = f^{-1}(x+5)$ 的图像过点

- A. $(-1, 3)$ B. $(9, 3)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-1, 1)$

6. 三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp \text{面 } ABC$, 且 $SA = AB = BC = CA$, 设二面角 $B-SC-A$ 的度数为 α , 则 $\cos \alpha$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

二、填空题(满分 64 分,每小题答对得 8 分,答错或不答均记 0 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 我们规定真命题赋值为 1,假命题赋值为 0,“1”或“0”均称作命题的“真值”.

命题 A:“在同一个直角坐标系中,曲线 $y = a^x (a > 0)$ 的图像与 $y = x$ 的图像至多有一个交点.”

试确定命题 A 的真值.

2. 在正方体 $ABCD - EFGH$ 中,过 D, C, E 三点的平面记为 (DCE) ,过 A, F, G 三点的平面记为 (AFG) ,请确定 $(DCE) \cap (AFG)$.

3. 已知 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$.

求 $1998x + 4y + 5z$ 的值.

4. 已知存在整数 a, b, c 使等式 $(x - a)(x - 1998) + 1 = (x + b)(x + c)$ 对任意实数 x 都成立. 求 $|2a + b + c|$ 的值.

5. 实数 a, b, x, y 满足 $(a + b)^2 + |b - 6| - b + 6 = 0$ 及 $|y - 1| + |y - 11| = 18 - |x + 4| - |x - 4|$. 试确定 $a^2 + y^2$ 的最小值.

6. 试确定方程 $3\sqrt{x^2 - 9} + 4\sqrt{x^2 - 16} + 5\sqrt{x^2 - 25} = \frac{120}{x}$ 的解集.

7. 若 $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ 且 $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{7}{12}$, 求 $1998 \cos \alpha$ 的值.

8. 三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA \perp PB, PB \perp PC, PC \perp PA$, M 为底面三角形 ABC 内一点, 若 $\sin \angle APM = \frac{4}{5}, \cos \angle BPM = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 求 $\cos \angle CPM$ 的值.

高中一年级复赛试题

(1998 年 5 月 3 日 8:30 ~ 10:30)

一、填空题(满分 40 分)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 设函数 $f(x) = (x + a)^3$ 对任意实数 x 都有 $f(2 + x) = -f(2 - x)$, 则 $f(-3) + f(3) =$ _____.

2. $\triangle ABC$ 的内切圆分别切 AB, BC, CA 三边于 D, E, F . $\triangle DEF$ 的内切圆分别切三边

DE, EF, FD 于 P, Q, R . 已知 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, $\triangle PQR$ 的周长等于 3, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于

3. 已知 $f_1(x) = 4x + 1, f_2(x) = x + 2, f_3(x) = -2x + 4$, 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数. 我们定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的最小值, 则 $f(x)$ 的最大值等于

4. 已知 $4\sin\theta\cos\theta - 5\sin\theta - 5\cos\theta - 1 = 0$. 则 $\sin^3\theta + \cos^3\theta =$

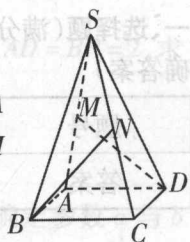
5. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 5, BC = 4, BB_1 = 3$, 过 B_1D 作长方体的截面, 则所得截面多边形面积的最小值是

二、(满分 15 分)

$f(n)$ 是定义在 $\mathbf{N}$ 上且取值为整数的严格增函数(如果任意 $x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 A 上的严格增函数), 当 m, n 互质时, 有 $f(mn) = f(m)f(n)$. 若 $f(19) = 19$, 试求 $f(f(19)f(98))$ 的值.

三、(满分 15 分)

如右图, 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 侧棱 $SA = SB = SC = SD = 2a$, M 为棱 SA 的中点, N 为棱 SC 的中点. 求异面直线 DM 与 BN 所成角的余弦值.



四、(满分 15 分)

若 $a < b < c < d$, 求证: 对任意的实数 $t \neq -1$, 关于 x 的方程 $(x-a)(x-c) + t(x-b)(x-d) = 0$ 都有两个不等的实数根.

五、(满分 15 分)

有 1998 名运动员号码为 $1 \sim 1998$ 这 1998 个自然数, 从中选出若干名运动员参加仪仗队, 但要使剩下的运动员中没有一个人的号码数等于另外两人的号码数的乘积. 问: 选为仪仗队的运动员至少能有多少人? 给出你的选取方案, 并简述理由.

1999 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题

(1999 年 4 月 18 日 8:30 ~ 10:30)

一、选择题(满分 25 分,每小题 5 分,每小题的四个结论中,只有一个是正确的,请选择正确答案)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 角 α 的顶点为坐标原点 O , 始边为 Ox 轴. $P(\sqrt{5}, 2)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\cos(\pi \sin \alpha)$ 的值是

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

2. 用平面去截一个正方体, 所得截面恰是一个正 n 边形, 则 n 不等于

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

3. 已知函数 $y = 3x^2 - (2m+6)x + m+3$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 m 的取值集合是

A. $[-3, 0]$

B. $(-3, 0)$

C. $\{-3, 0\}$

D. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

4. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 在 $[0, 2]$ 上是增函数, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, 则 $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{5})$, $f(\pi)$ 的大小关系是

A. $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{5}) < f(\pi)$

B. $f(\pi) < f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{5})$

C. $f(\pi) < f(\sqrt{5}) < f(\sqrt{2})$

D. $f(\sqrt{5}) < f(\pi) < f(\sqrt{2})$

5. m, n 都是正整数, $k = (m^2 - 1)(n^2 - 1) + 4mn$, 命题 (I): k 是合数. 命题 (II): k 能表为两个整数的平方差. 则

A. (I) 真 (II) 真

B. (I) 真 (II) 假

C. (I) 假 (II) 真

D. (I) 假 (II) 假

二、填空题(满分 35 分,每小题 7 分)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 已知函数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. 如果 $f(1) = 9, f(-1) = -5$, 求 $\frac{b+d}{a+c+e}$ 的值.

2. P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 D_1C_1 的中点, 求异面直线 A_1B 与 AP 所成角的余弦值.

3. 函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像顶点坐标为 $(m, -2)$, 图像与 x 轴从左到右依次交于 A, B 两点, 与直线 $y = 2$ 从左到右依次交于 D, C 两点, 求梯形 $ABCD$ 的面积.

4. 若 $\log_2(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 9) \leq 2$, 求 $x + y$ 的值.

5. 四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = 60^\circ$, P 为 AB 上一点, $DP \perp CP$, $AP = 3, AD = BP = 2$, 求 BC 的值.

三、(满分 15 分)

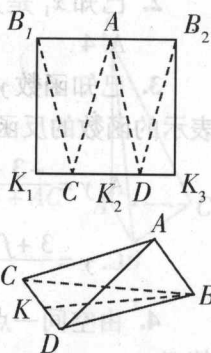
设 $f(x) = x^2 + ax + b \cos x$, 如果 $f(x) = 0$ 和 $f(f(x)) = 0$ 的解集相同, 试确定参数 a 与 b 的取值范围.

四、(满分 15 分)

如图所示, $K_1K_3B_2B_1$ 是正方形纸片, A 是 B_1B_2 的中点, C, K_2, D 依次为 K_1K_3 的三个四等分点. 沿虚线折叠使 B_1K_1 与 B_2K_3 粘合, AB_1 与 AB_2 粘合, CK_1, DK_3 分别与 CK_2 及 DK_2 粘合 (K_1, K_2, K_3 重合于点 K ; B_1, B_2 重合于点 B), 形成一个四面体 $ABCD$.

(1) 求证 $BA \perp DC$.

(2) 求 AD 与面 BCD 所成角的正弦值.



五、(满分 10 分)

北京市中学生数学邀请赛, 将 1~1999 号准考证随意发放给 31 所中学的 1999 名参赛选手. 请你证明: 其中至少有一所学校要么可以找到 3 名选手, 一人准考证号数的两倍等于另二人准考证号数之和; 要么可以找到 4 名选手, 其中两人准考证号数之和等于另外两人准考证号数之和.

2000 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级试题

(2000 年 5 月 28 日 8:30 ~ 10:30)

一、选择题(满分 25 分,每小题 5 分)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 一个角的弧度数是 2000, 那么这个角是

- A. 第 I 象限角 B. 第 II 象限角 C. 第 III 象限角 D. 第 IV 象限角

2. 已知 x_1 是方程 $x + \lg x = 3$ 的根, x_2 是方程 $x + 10^x = 3$ 的根, 则 $x_1 + x_2$ 的值是

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3. 已知函数 $y = f(x)$ 有反函数, 现将 $y = f(2x - 1)$ 的图像向左平移 2 个单位, 所得图形表示的函数的反函数是

A. $y = \frac{-3 + f^{-1}(x)}{2}$

B. $y = \frac{-3 - f^{-1}(x)}{2}$

C. $y = \frac{3 + f^{-1}(x)}{2}$

D. $y = \frac{3 - f^{-1}(x)}{2}$

4. 由空间一点 O 引出四条射线, 使得任两条射线间所夹的角都等于 θ , 则 $\cos \theta$ 的值等于

- A.
- $\frac{1}{2}$
- B.
- $-\frac{1}{2}$
- C.
- $-\frac{1}{3}$
- D. 0

5. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是 x 的多项式, 其中 a, b, c, d 是常数, 已知 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, 则 $\frac{1}{7}[f(4) + f(0)]$ 的值是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题(满分 35 分,每小题 7 分)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 方程 $|x| - 7 = 6 - \frac{x^2}{4}$ 的所有实根之和等于_____.

2. 满足不等式 $7^{3x^2} - \frac{1}{7^{30x+27}} \leq 0$ 的 x 的最大实数值与最小实数值的平方和等于_____.

3. 已知 $\begin{cases} 19\cos x + 14\cos y = 18 \\ 19\sin x + 14\sin y = 21 \end{cases}$, 则 $\cos(y-x)$ 的值是_____.

4. D 为 $\triangle ABC$ 内一点, $AB=2, BC=3, CD=2$, 并且 $\angle ADC + \angle B = 180^\circ$, 令 $S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADC}$, 则 S 的最大值等于_____.

5. 函数 $f(x)$ 对于任意的非负实数 x, y 都满足 $f(x+y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$, 且 $f(x) \geq 0, f(1) \neq 0$, 则 $f(2+\sqrt{3}) =$ _____.

三、(满分 15 分)

$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) \leq f(x) + 3$ 和 $f(x+2) \geq f(x) + 2$. 设 $g(x) = f(x) - x$.

(1) 求证: $g(x)$ 是周期函数;

(2) 如果 $f(998) = 1002$, 求 $f(2000)$ 的值.

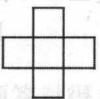
四、(满分 15 分)

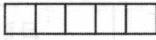
如右图, 在四面体 $S-ABC$ 中, $\angle SAB = \angle SAC = \angle CAB = 90^\circ$, 且 $AB+AC=SA$, 试计算 $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA$ 的值.

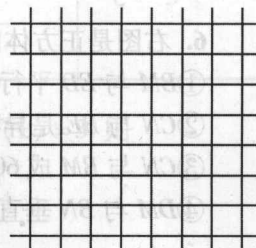


五、(满分 10 分)

如下图所示, 将平面分割成小正方形网格, 并对每个小方格都涂上一种颜色, 共有五

种颜色. 如果任一个“十字形”  中的五个小方格颜色都不同, 请你证明: 图中任意

“条形”  的五个小方格颜色也必定都不相同.



2001 年北京市中学生数学竞赛

高中一年级初赛试题

(2001 年 4 月 1 日 8:30 ~ 10:30)

一、选择题(满分 36 分每小题只有一个正确答案,请将正确答案的英文字母代号填入卷首指定的地方,答对得 6 分,答错或不答均记 0 分)

题号	1	2	3	4	5	6
答案						

1. 集合 $M = \{0, 1, 2, 2001\}$ 的子集的个数是

- A. 16 B. 15 C. 8 D. 7

2. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 C_1D_1 上一点, N 为棱 AB 上一点, 且 $\angle MAB = \angle B_1NB = 60^\circ$. 则不正确的结论是

- A. AM 与 CC_1 是异面直线 B. AM 与 NB_1 是异面直线
C. AN 与 MB_1 是异面直线 D. AN 与 MC_1 是异面直线

3. 函数 $y = \sqrt{1-x} (x \leq 1)$ 的反函数是

- A. $y = x^2 - 1 (-1 \leq x \leq 0)$ B. $y = 1 - x^2 (x \leq 0)$
C. $y = x^2 - 1 (0 \leq x \leq 1)$ D. $y = 1 - x^2 (0 \leq x \leq 1)$

4. 一条直线与不等边 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 分别交于 D, E . 若直线 DE 既平分 $\triangle ABC$ 的周长, 又平分 $\triangle ABC$ 的面积. 则直线 DE 必过 $\triangle ABC$ 的

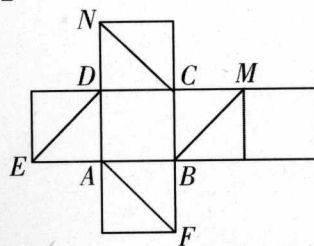
- A. 重心 B. 外心 C. 内心 D. 垂心

5. 已知 $f(x^6) = \log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于

- A. $\frac{4}{3}$ B. 8 C. 18 D. $\frac{1}{2}$

6. 右图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中,

- ① BM 与 ED 平行;
② CN 与 BE 是异面直线;
③ CN 与 BM 成 60° 角;
④ DM 与 BN 垂直.



以上四个命题中正确命题的序号是

- A. ①②③ B. ②③④ C. ③④ D. ②④

二、填空题(满分 64 分,每小题 8 分,请将答案填在指定的地方)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

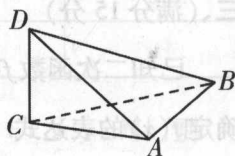
1. 正四面体 $ABCD$ 中, M 为棱 BD 的中点, N 为棱 AD 的中点. 异面直线 MN 与 CD 所成的角为 α , AC 与 MN 所成的角为 β . 求 $\alpha + \beta$ 的度数.

2. 若实数 x, y, z 满足 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$. 求 $\log_2(x+y)$ 的值.

3. 设对任意实数 x 都有 $f(x) = x^2 + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 且 $f(a) = m$. 求 $f(-a)$, 用 a, m 表示.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$. 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$. 确定 $f(5.5)$ 的值.

5. 四面体 $ABCD$ 中, 棱 CD 垂直于平面 ABC . $AB = BC = CA = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. 设二面角 $D-AC-B$ 记为 α , 二面角 $D-AB-C$ 记为 β , 二面角 $B-DC-A$ 记为 γ . 求 $\sin\alpha + \tan\beta + \cos\gamma$ 的值.



6. 分别用 $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $\min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的最大值与最小值. 若 $a+b+c=1$, $(a, b, c \in \mathbf{R})$. 确定 $\min\{\max\{a+b, b+c, c+a\}\}$ 的值.

7. 设 $3^x = 0.03^y = 10^{-2}$, 求 $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{2001}$ 的值.

8. 若关于 x 的方程 $\sin^2 x + \sin x + a = 0$ 有实数解, 求实数 a 的最大值与最小值的和.

高中一年级复赛试题

(2001 年 4 月 15 日 8:30 ~ 10:30)

一、填空题(满分 40 分,每小题答对得 8 分)

题号	1	2	3	4	5
答案					

1. 已知 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 对任意的非负实数 x, y 都成立, 且 $f(1) = 3$. 则

$$\frac{f(1)}{f(0)} + \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \dots + \frac{f(2000)}{f(1999)} + \frac{f(2001)}{f(2000)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$