高等数学解题汇编

高等数学解题方法

汇编

（第三版）

韩什元　岳中亮　由　雷　主编

华南理工大学出版社

高等数学
解题方法汇编

（第三版）

韩什元　岳中亮　由　雷　主编

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书参照高等工科院校高等数学大纲的要求编写，是湛江海洋大学数学与信息科学系教师多年从事高等数学教学的结晶。

全书共十二章，包括一元、多元函数的极限与连续性，一元、多元函数的微分学与积分学，无穷级数与常微分方程。书末附有各章的自测题与模拟试题。本书的特点是例题多样，覆盖面广，具有启发性，也有一定的深度与难度。

本书可作为本(专)科高等数学课的复习辅导材料，也可作为报考硕士研究生复习的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题方法汇编/韩什元，岳中亮，由雷主编．—3版．—广州：华南理工大学出版社，2008.8（2008.9重印）

ISBN 978-7-5623-2958-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①韩…　②岳…　③由…　Ⅲ．高等学校-解题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第124282号

总 发 行：华南理工大学出版社

（广州五山华南理工大学17号楼，邮编 510640）

营销部电话：020-87113487　87111075　87111048（传真）

E-mail: z2cb@scut.edu.cn

http://www.scutpress.com.cn

责任编辑：吴兆强

印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂

开　　本：850mm×1168mm　1/32　印张：8.5　字数：213千

版　　次：2008年8月第3版　2008年9月第8次印刷

定　　价：16.00元

《高等数学解题方法汇编》编委

主　编	韩什元	岳中亮	由　雷
副主编	李晓培	张　建	周展宏
	陈奋光	刘宇红	
参　编	苏明成	刘昌东	柴华金
	林　岛	邝雪松	刘建文
	龚源海	叶国栋	

前　言

高等数学是一门重要的基础课。做一定数量的习题是学好高等数学不可缺少的环节。本书尝试以“分析问题、解决问题”的方法，精选与编制了典型的例题，选编了各章的自测题以及模拟题，希望读者在阅读本书时，能对高等数学概念的理解以及解题方法与技巧的提高有所启发与收获，对高等数学的学习有较好的辅导。

借此机会衷心感谢湛江海洋大学教务处及数学与信息科学系教师对本书的编写给予的支持和付出的艰辛劳动；同时感谢在教学中对本书提出宝贵意见的教师与同学。由于水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2008 年 8 月

目　录

内 容 概 要

一、极限和一元函数微分学

- **连续**
  - 连续函数性质
    - 有界(闭区间)
    - 取到最大、最小值(闭区间)
    - 中间值取到(闭区间)
  - 间断点分类(左右极限)
    - 第一类间断点
      - 可去间断点
      - 跳跃间断点
    - 第二类间断点
- 极限及求极限的常用方法
  - 序列极限：ε-N 语言
    - 极限存在准则
      - 单调有界
      - 夹逼定理
    - 积分和表示求极限
  - 函数极限：ε-δ 语言
    - 两个重要极限
    - 洛必达法则：$\frac{\infty}{\infty}$、$\frac{0}{0}$型(求导)
    - 等阶无穷小求极限(Taylor 展开)
- **导数**
  - 几何意义：切平面和法线方程
  - 求导法则
    - 四则运算法则
    - 反函数求导
    - 隐函数求导
    - 复合函数求导(链锁法则)
    - 参数方程求导
  - 高阶导数
  - 导数和函数性质
    - 几何性质
    - 罗尔定理
      - 单调性 $f'(x)\neq 0$
      - 驻点 $f'(x)=0$
      - 极值[最大(小)值]
      - 渐近线
      - 曲率
    - 中值定理
    - Taylor 展开
- **微分**
  - 一阶微分形式不变性 $df(u)=f'(u)du$
  - 弧微分 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

二、一元函数积分学

不定积分

- 原函数 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
- 有理函数积分法
- 三角有理函数积分法
- 简单无理函数的积分
- 换元法
- 分部积分法

牛顿-莱布尼茨公式

定积分

- 换元法
- 分部积分法
- 定义：分割、近似、求和、极限
- 积分中值定理 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad \xi\in[a,b]$
- 变限积分求导 $\longrightarrow$ 洛必达法则
- 定积分应用
  - 几何应用：面积和体积、弧长
  - 微元法
  - 物理应用：功、引力、均值

变限定积分的极限

广义积分

- 无穷积分
- 变量替换
  - 收敛判别法
    - 比较判别法
    - 积分判别法
  - $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$
    - $p>1$ 收敛
    - $p\leqslant 1$ 发散
- 瑕积分

三、向量代数与空间解析几何

- **向量**
  - 向量表示
    - 直角坐标表示：(a, b, c)
    - 方向余弦：$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
  - 向量运算
    - 数量积、向量积
    - 点乘：垂直⇔点乘积为 0
    - 叉乘：平行⇔叉乘积为 0
    - 混和积：共面⇔混合积为 0

- **平面**
  - 点法式 ← 切平面（导数）
  - 截距式
  - 平面束
- 相互关系
  - 平面与平面
    - 平行：距离
    - 相交
  - 直线与平面
    - 平行
    - 相交
  - 直线与直线
    - 平行
    - 相交
    - 异面 → 公垂线
- **直线**
  - 标准方程 ← 曲面法线
  - 平面交线
- **曲面**
  - 标准方程（球面、柱面、锥面、双曲面、马鞍面）
  - 切平面和法线
- **曲线** → 参数方程和标准方程 →
  - 曲线长度
  - 曲线积分

四、多元微分学

极限　极限存在与不存在的判定

↓

连续

- 性质
  - 有界性(有界闭区域)
  - 最大最小值取到
  - 中间值取到

偏导数 → 方向导数 → 梯度

+ 连续性条件

$\mathrm{d}f(x,y)=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y$

可微

- 全微分
  - 一阶微分形式不变性
  - $\mathrm{d}f(x,y)=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$
- 微分法则
  - 复合函数微分法(链锁法则)
  - 隐函数存在与隐函数微分法 → 曲面的切平面和法线
  - 参数方程微分法则 → 空间曲线的切线和法平面
- 高阶导数和高阶微分 → Taylor 公式
- 多元极值
  - 驻点 $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$
  - 极大、极小值判定
  - 条件极值:拉格朗日乘子法
  - 应用:最大、最小值

五、多元积分学

- **二重积分和三重积分**
  - 概念 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_i f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；分割、近似、求和、极限
  - 性质：中值定理 $\iint\limits_D f(M)\mathrm{d}\sigma = f(M_0)\sigma$
  - 计算
    - 累次积分
    - 变量替换
      - 极坐标系
      - 球坐标系
      - 柱面坐标系
  - 应用
    - 物理应用：质心、引力、转动惯量和转动动能
    - 几何：体积
- **曲线积分**
  - 第一型曲线积分
    - 概念
    - 计算 $\int_L f(M)\mathrm{d}S = \int_\alpha^\beta f\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ {注：$f=f[x,y,z(x,y)]$}
  - $\Uparrow$ $\int_L (P,Q,R)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\alpha^\beta [Px'+Qy'+Rz']\mathrm{d}t$
  - 第二型曲线积分
    - 概念
    - 计算 $\int_L \boldsymbol{f}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ → 化为第一型曲线积分
- 格林公式、Stokes 公式：积分与路径无关 ⟶ 势函数
  - $\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- 高斯公式
- **曲面积分**
  - 第一型曲面积分
    - 概念
    - 计算 $\iint\limits_s f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ {注：$f=f[x,y,z(x,y)]$}
  - $\iint\limits_s \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_s [P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\mathrm{d}S$
  - 第二型曲面积分
    - 概念 $\iint\limits_s \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
    - 计算 $\iint\limits_s \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\iint\limits_{D_{xy}} [P(z_x)+Q(-z_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - $\oiint\limits_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

六、级数

- **常数项级数**
  - 正项级数
    - 比较判别法
    - 比值判别法
    - 根值判别法
  - 交错级数
    - 莱布尼茨判别法
    - 条件收敛和绝对收敛
  - 两个基本的级数
    - 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n}$ $|q|<1$
    - p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$ $p>1$ 收敛，$p\leqslant 1$ 发散

固定点

$x=x_0$

- **函数项级数**
  - 收敛域
  - 和函数
- **幂级数**
  - 收敛域$(-R,R)$
  - 性质:逐项微分,逐项积分
  - Taylor 展式:常数函数展开
    - $\frac{1}{1+x}$
    - e^{x}
    - $\ln(1+x)$
    - $\sin x$
    - $\cos x$
    - （$\frac{1}{1+x}$、e^{x}）和函数求法
- **富氏级数**
  - 富氏展开式:$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)$
  - 狄氏定理:$S(x)=\begin{cases} f(x) & \text{连续点} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{间断点} \end{cases}$
  - 奇开拓与偶开拓:正弦级数、余弦级数

七、微分方程

常微分方程求解

- 变量可分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)Q(y)$
- 齐次方程
- 全微分方程
  - $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$
  - 积分因子法
- 一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

  ⇑
- 伯努利方程
- 可降阶高阶微分方程
- 级数解法 ⟶ 代数问题

应　用 ⟶ 几何问题 / 物理问题 ⟶ 微分方程

二阶常系数线性微分方程

- 特征多项式
- $\lambda^2+p\lambda+q=0$
- 通解结构(非齐次、齐次)
- 特解(非齐次)
  - 待定系数法
  - 常数变易法

第一章　函数与极限

一、函数的概念

1-1. 下面每组函数是否为同一函数：

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

解　(1)不同，因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的为 $(0,+\infty)$；

(2)相同，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，对应法则也相同；

(3)不同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(2,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

1-2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$；

(2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}}$；

(3) $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

解　(1)要使函数的表达式有意义，x 须满足 $-1\leqslant 1-x\leqslant 1$，且 $\lg x>0$，即：$0\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x>1$；故函数的定义域为 $(1,2]$.

(2)要使函数的表达式有意义，x 须满足 $\dfrac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}\geqslant 0$，为此，应有：

$$\begin{cases} x^2(x-4)\geqslant 0 \\ (x^2-1)(9-x^2)>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2(x-4)\leqslant 0 \\ (x^2-1)(9-x^2)<0 \end{cases}$$

于是，x 满足 $\begin{cases} x\geqslant 4 \\ x^2>1 \\ x^2<9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\geqslant 4 \\ x^2<1 \\ x^2>9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\leqslant 4 \\ x^2>1 \\ x^2>9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\leqslant 4 \\ x^2<1; \\ x^2<9 \end{cases}$

故函数的定义域为：$(-\infty,-3)\cup(3,4]\cup(-1,1)$，即：$(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,4]$.

(3)要使函数表达式有意义，x 必须满足：$\cos(\lg x)>0$，于是

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<\lg x<2k\pi+\frac{\pi}{2}, 10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, \quad (k\in Z)$$

所以，函数的定义域为：$\{x\mid 10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.

1-3. 设 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域.

解法一 先求出 $f(x)$ 的定义域，再求 $f(x)+f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域.

要使 $\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ 有意义，x 须满足：$\dfrac{2+x}{2-x}>0$，即：

$\begin{cases} 2+x>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2+x<0 \\ 2-x<0 \end{cases}$，于是 $-2<x<2$，

故 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$；令 $-2<\dfrac{2}{x}<2$，得：$x<-1$ 或 $x>1$，

于是得 $f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域为：$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，所以 $f(x)+f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域为：$(-2,2)\cap[(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)]$

即为：$(-2,-1)\cup(1,2)$.

解法二 先求 $f(x)+f(\dfrac{2}{x})$ 的表达式，再求定义域.