

高

等

数

学

解

题

方

法

汇

编

高等数学 解题方法 汇 编

(第三版)

韩什元 岳中亮 由 雷 主编

华南理工大学出版社

高等数学

解题方法汇编

(第三版)

韩什元 岳中亮 由 雷 主编

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书参照高等工科院校高等数学大纲的要求编写,是湛江海洋大学数学与信息科学系教师多年从事高等数学教学的结晶。

全书共十二章,包括一元、多元函数的极限与连续性,一元、多元函数的微分学与积分学,无穷级数与常微分方程。书末附有各章的自测题与模拟试题。本书的特点是例题多样,覆盖面广,具有启发性,也有一定的深度与难度。

本书可作为本(专)科高等数学课的复习辅导材料,也可作为报考硕士研究生复习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法汇编/韩什元,岳中亮,由雷主编. —3版.
—广州:华南理工大学出版社,2008.8(2008.9重印)

ISBN 978-7-5623-2958-9

I. 高… II. ①韩… ②岳… ③由… III. 高等学校—解题
IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 124282 号

总 发 行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

营销部电话: 020-87113487 87111075 87111048 (传真)

E-mail: z2cb@scut.edu.cn

<http://www.scutpress.com.cn>

责任编辑: 吴兆强

印 刷 者: 广东省农垦总局印刷厂

开 本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 8.5 字数: 213 千

版 次: 2008 年 8 月第 3 版 2008 年 9 月第 8 次印刷

定 价: 16.00 元

版权所有 盗版必究

《高等数学解题方法汇编》编委

主 编	韩什元	岳中亮	由 雷
副主编	李晓培	张 建	周展宏
	陈奋光	刘宇红	
参 编	苏明成	刘昌东	柴华金
	林 岛	邝雪松	刘建文
	龚源海	叶国栋	

前 言

高等数学是一门重要的基础课。做一定数量的习题是学好高等数学不可缺少的环节。本书尝试以“分析问题、解决问题”的方法,精选与编制了典型的例题,选编了各章的自测题以及模拟题,希望读者在阅读本书时,能对高等数学概念的理解以及解题方法与技巧的提高有所启发与收获,对高等数学的学习有较好的辅导。

借此机会衷心感谢湛江海洋大学教务处及数学与信息科学系教师对本书的编写给予的支持和付出的艰辛劳动;同时感谢在教学中对本书提出宝贵意见的教师与同学。由于水平有限,书中难免有不妥甚至错误之处,恳请读者批评指正。

编 者

2008年8月

目 录

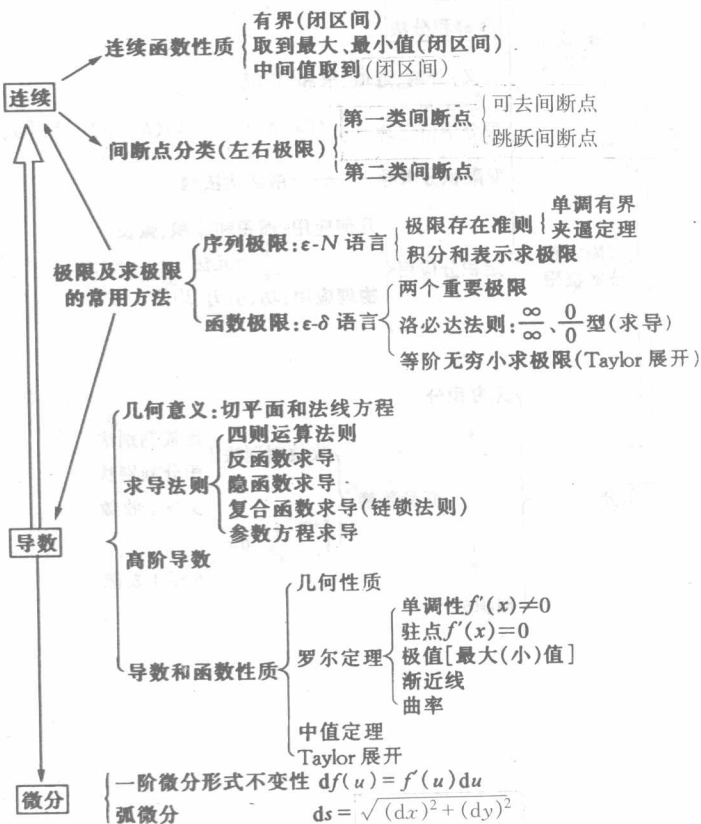
内容概要	(1)
第一章 函数与极限	(8)
一、函数的概念	(8)
二、用“ ϵ - δ ”定义证明函数的极限	(11)
三、求极限的方法	(12)
四、关于无穷小的比较	(23)
五、函数的连续性	(24)
第二章 导数与微分	(29)
一、导数的概念	(29)
二、求函数的导数	(33)
第三章 微分中值定理及导数的应用	(40)
一、微分中值定理的应用	(40)
二、导数的应用	(45)
第四章 不定积分	(53)
一、分项积分法	(53)
二、第一类换元积分法	(55)
三、第二类换元积分法	(57)
四、分部积分法	(60)
五、有理函数的积分	(64)
六、三角有理式积分	(67)
七、简单无理函数的积分	(69)
第五章 定积分	(72)

一、定积分的概念和性质	(72)
二、定积分的计算	(76)
三、广义积分	(81)
第六章 定积分的应用	(86)
一、平面图形的面积	(86)
二、体积	(88)
三、平面曲线的弧长	(90)
第七章 空间解析几何与向量代数	(92)
第八章 多元函数微分法及其应用	(99)
一、二元函数的概念、极限的运算	(99)
二、多元函数的微分法	(100)
三、多元函数的应用	(106)
第九章 重积分	(113)
一、二重积分计算	(113)
二、三重积分计算	(123)
三、重积分的应用	(130)
四、关于重积分的证明问题	(135)
第十章 曲线积分与曲面积分	(138)
一、曲线积分	(138)
二、曲面积分	(148)
第十一章 无穷级数	(169)
一、常数项级数的收敛性	(169)
二、幂级数的收敛域	(172)
三、函数展开为幂级数	(174)
四、级数求和	(178)
五、将周期为 2π 的函数展开为傅立叶级数	(181)
六、将 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦级数或余弦级数	(183)
七、关于 $2l$ 为周期的函数展开成傅立叶级数	(184)

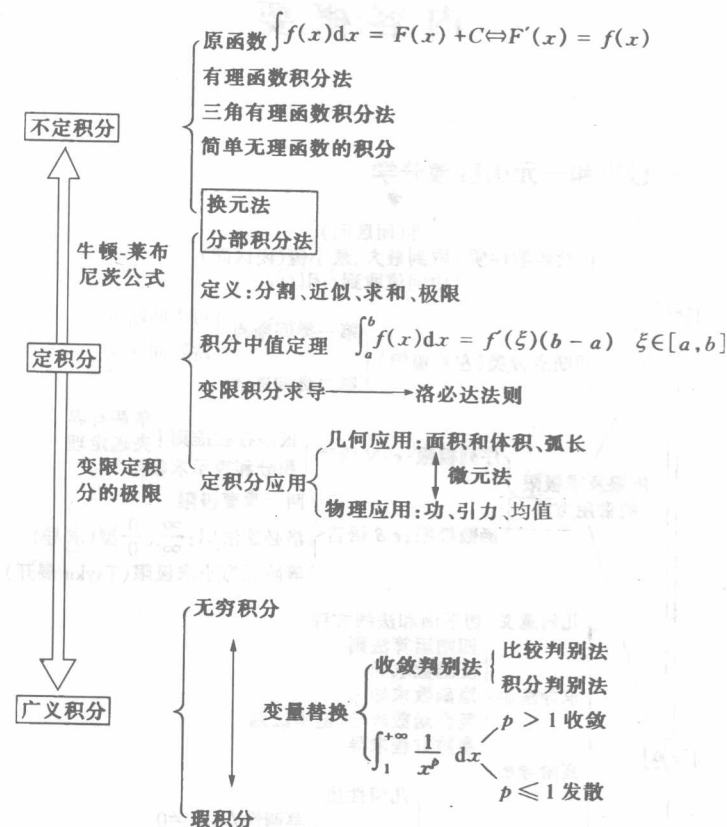
第十二章 常微分方程·····	(187)
一、一阶微分方程·····	(187)
二、可降阶的高阶方程·····	(193)
三、二阶线性微分方程·····	(195)
四、微分方程的应用·····	(199)
高等数学(上册)模拟试题·····	(204)
高等数学(下册)模拟试题·····	(212)
高等数学自测题·····	(220)
自测题提示与答案·····	(235)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题·····	(242)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题·····	(246)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题·····	(250)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题·····	(255)

内容概要

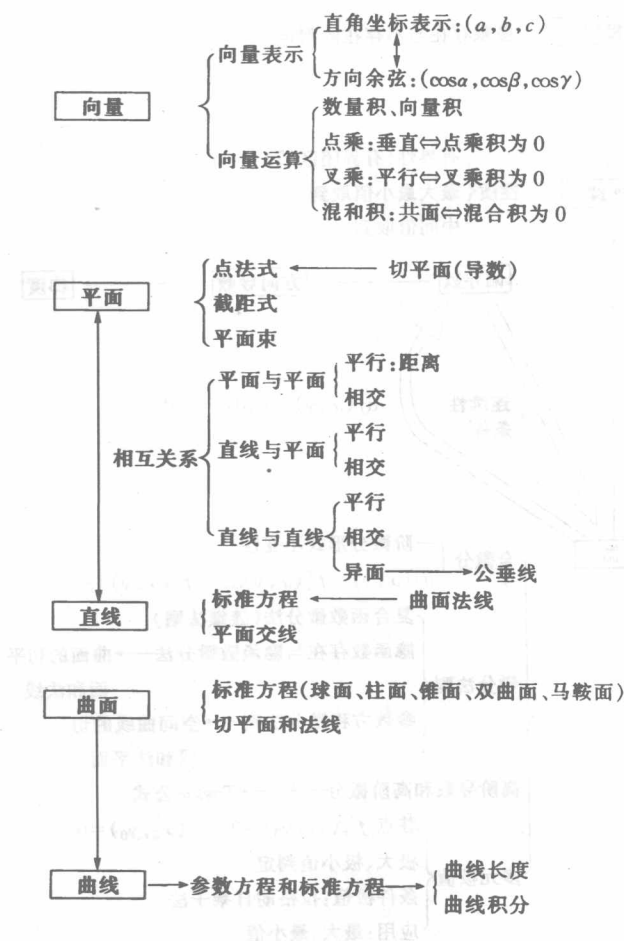
一、极限和一元函数微分学

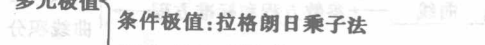


二、一元函数积分学



三、向量代数与空间解析几何





二重积分
和三重积分

性质:中值定理 $\iint_D f(M) d\sigma = f(M_0) \sigma$

物理应用:质心、引力、转动惯量和转动动能
应用 { 几何:体积

曲线积分

第一型曲线积分

计算 $\int_L f(M) dS = \int_a^b f \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$

$$\uparrow \int_C (P, Q, R) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b [Px' + Qy' + Rz'] dt$$

第二型曲线积分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{计算} \int_L f(M)dl \rightarrow \text{化为第一型曲线积分} \end{array} \right.$

格林公式 } 积分与路径无关 $\longrightarrow$ 势函数
Stokes 公式 }

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

第一型曲面积分 { 计算 $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dS$$

曲面积分

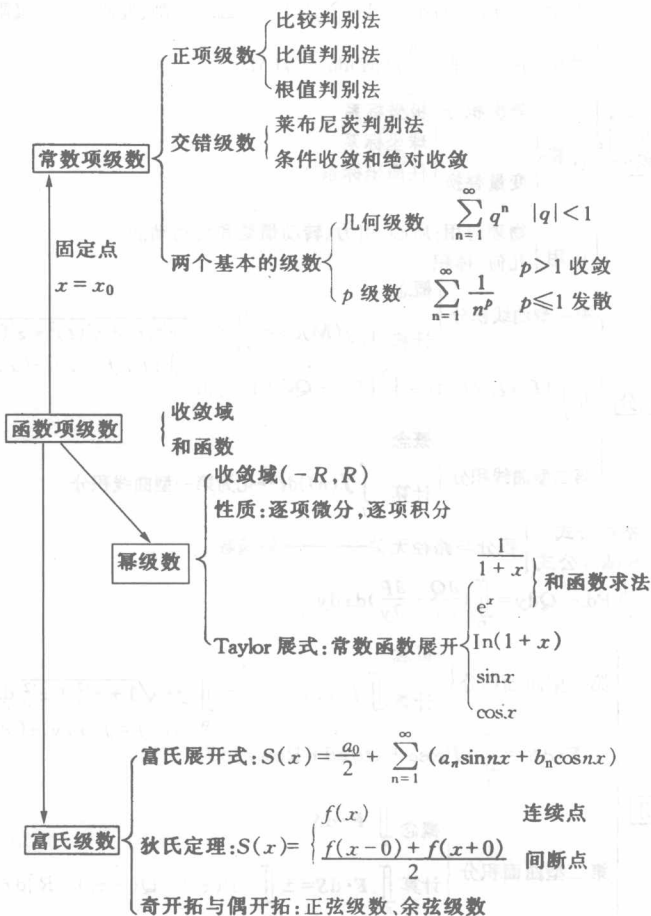
概念 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

第二型曲面积分

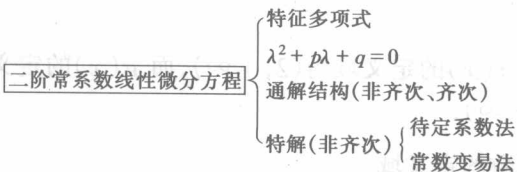
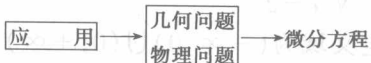
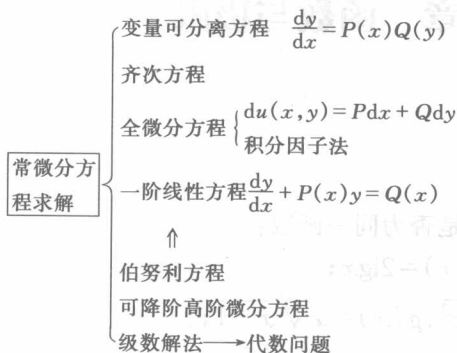
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{计算} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{xy}} [P(z_x) + Q(-z_y) + R] dx dy \end{array} \right.$$

$$\oint_{\Sigma_M} P dydz + Q dzdr + R dx dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

六、级数



七、微分方程



第一章 函数与极限

一、函数的概念

1-1. 下面每组函数是否为同一函数:

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x;$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1};$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$

解 (1)不同,因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的为 $(0, +\infty)$;

(2)相同,因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,对应法则也相同;

(3)不同,因为 $f(x)$ 的定义域为 $(2, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

1-2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x);$

(2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}};$

(3) $y = \lg[\cos(\lg x)].$

解 (1)要使函数的表达式有意义, x 须满足 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 且 $\lg x > 0$, 即: $0 \leq x \leq 2$ 且 $x > 1$; 故函数的定义域为 $(1, 2]$.

(2)要使函数的表达式有意义, x 须满足 $\frac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)} \geq 0$, 为此, 应有:

$$\begin{cases} x^2(x-4) \geq 0 \\ (x^2-1)(9-x^2) > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x^2(x-4) \leq 0 \\ (x^2-1)(9-x^2) < 0 \end{cases}$$

$$\text{于是, } x \text{ 满足} \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 > 1 \\ x^2 < 9 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 < 1 \\ x^2 > 9 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 > 1 \\ x^2 > 9 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 < 1 \\ x^2 < 9 \end{cases};$$

故函数的定义域为: $(-\infty, -3) \cup (3, 4] \cup (-1, 1)$, 即:
 $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, 4]$.

(3) 要使函数表达式有意义, x 必须满足: $\cos(\lg x) > 0$, 于是

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < \lg x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, 10^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

所以, 函数的定义域为: $\{x \mid 10^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

1-3. 设 $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$, 求 $f(x) + f(\frac{2}{x})$ 的定义域.

解法一 先求出 $f(x)$ 的定义域, 再求 $f(x) + f(\frac{2}{x})$ 的定义域.

要使 $\ln \frac{2+x}{2-x}$ 有意义, x 须满足: $\frac{2+x}{2-x} > 0$, 即:

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 2+x < 0 \\ 2-x < 0 \end{cases}, \text{于是 } -2 < x < 2,$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$; 令 $-2 < \frac{2}{x} < 2$, 得: $x < -1$ 或 $x > 1$,

于是得 $f(\frac{2}{x})$ 的定义域为: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 所以 $f(x) +$

$f(\frac{2}{x})$ 的定义域为: $(-2, 2) \cap [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$

即为: $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

解法二 先求 $f(x) + f(\frac{2}{x})$ 的表达式, 再求定义域.