

高等学校教材

数学模型引论

第二版

唐焕文 贺明峰 编



高等教育出版社

高等学校教材

数学模型引论

第二版

唐焕文 贺明峰 编

高等教育出版社

内容提要

本书共 21 章,分为三篇:第一篇讲运筹学模型,第二篇讲微分方程模型,第三篇讲概率统计模型.全书介绍了近百个实际问题的数学模型,内容丰富且具有启发性.书中各章后还安排有一定数量的习题,并附有答案,便于读者自学.

本书可供理工科各专业及经济管理有关专业的大学生作为教材或参考书使用,也可供其他科技工作者学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型引论/唐焕文,贺明峰编.—2 版.—北京:
高等教育出版社,2001,9(2002 重印)

ISBN 7-04-010164-5

I. 数... II. 唐... III. 数学模型—理论
IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050297 号

数学模型引论 第二版
唐焕文 贺明峰 编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 850×1168 1/32
印 张 10.375
字 数 250 000

版 次 1991 年 5 月第 1 版
2001 年 9 月第 2 版
印 次 2002 年 5 月第 2 次印刷
定 价 10.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

序 言

应用数学学科的一项重要任务是从自然科学、社会科学、工程技术以及现代化管理中提出问题和解决问题。这就要求我们学会如何将实际问题经过分析、简化，转化为一个数学问题，然后用适当的数学方法去解决。在这个过程中，如何将所考察的实际问题转化为一个相应的数学问题，即建立该实际问题的数学模型，是关键性的一步。传统的数学课程，一般偏重于介绍数学的概念、理论和方法，而对数学模型的建立则讨论较少，致使不少学生虽然学了不少数学知识，但是不会应用它解决实际问题。

最近几十年来，随着科学技术的发展，特别是计算机技术的发展，数学的应用领域已由传统的物理领域(包括力学、电学等学科以及土木、机电等工程技术)迅速扩展到非物理领域(人口、经济、金融、生物、医学等)。数学在发展高科技、提高生产力水平和实现现代化管理等方面的作用越来越明显。正是在这样的背景下，国内外的一些专家学者在近 20 年中倡导在高等学校开设数学模型课，开展大学生数学建模竞赛。目前不少高等学校已将数学模型列为一些专业的必修课或选修课，有 500 多所高校组队参加全国的数学建模竞赛。我校从 1983 年开始在大学生中开设数学模型课，以后又组队参加国内外的大学生数学建模竞赛，在教学和竞赛的实践中积累了一些资料和经验。并于 1991 年出版了《数学模型引论》一书。本书就是在这些实践的基础上，总结近十年的经验，并从原书中选用了部分材料编写而成的，希望对数学建模教学和竞赛起一点推动作用。

全书共 21 章，分为三篇：第一篇讲运筹学模型(第 2 章～第 13

章), 第二篇讲微分方程模型(第 14 章~第 17 章), 第三篇讲概率统计模型(第 18 章~第 21 章). 全书介绍了近百个实际问题的数学模型. 可供数学与应用数学、信息与计算科学和理工、经管各有关专业的大学生作为教材或教学参考书使用. 读者只要具有高等数学、线性代数和微分方程的基本知识, 就可以读懂全书的绝大部分内容. 预计每周 3~4 学时, 一学期即可讲完全书的主要内容. 根据不同的对象, 对各章内容可以适当增删和有所侧重, 部分章节可作为阅读材料. 为此, 在编写本书时, 我们有意使各部分内容具有相对的独立性, 以便主讲教师根据实际情况进行适当取舍或调整. 节前带 * 号的内容为选学内容, 可作为阅读材料. 为了帮助读者检验和训练自己建立数学模型的能力, 我们选配了一定数量的习题, 供读者练习. 个别较难的习题用 * 号标记, 可供读者选做.

在我们从事数学建模教学和教材建设以及组织大学生参加数学建模竞赛的活动中, 曾经得到国内不少兄弟院校的专家、学者和同行的热情支持和帮助, 并进行过一些有益的讨论. 这里要特别提到的同志有: 徐利治、萧树铁、叶其孝、俞文鱿、姜启源、谭永基、赖炎连、施光燕、施吉林、边馥萍、孙丽华等教授. 在此特向他们表示衷心地感谢.

本书的出版得到高等教育出版社数学编辑室许多同志的热情支持和帮助, 并得到大连理工大学出版基金的资助, 也在此表示衷心地感谢.

本书由唐焕文(第 1 章~第 12 章)和贺明峰(第 14 章~第 17 章)主持编写. 参加编写工作的还有: 冯恩民(第 10 章)、周东生(第 18 章, 第 20 章, 第 21 章)、冯敬海(第 19 章)、郭崇慧(第 12 章, 第 13 章)和廖貅武(第 11 章). 由于编者水平有限, 书中肯定会有这样、那样的不足和问题, 恳请专家和广大读者批评、指正.

唐焕文

2001 年 5 月 31 日

目 录

第 1 章	数学模型概论	1
§ 1.1	数学模型的概念和分类	1
§ 1.2	数学建模的方法与步骤	4
§ 1.3	数学建模举例	8
习题 1		12

第一篇 运筹学模型

第 2 章	线性规划模型	13
§ 2.1	拟订生产计划问题	13
§ 2.2	运输问题	16
§ 2.3	食谱问题	17
§ 2.4	作物布局问题	18
§ 2.5	配料问题	19
§ 2.6	LP 模型的一般形式与标准形式	20
§ 2.7	LP 模型的几何解释和图解法	23
§ 2.8	解线性规划的一种常用方法——单纯形法	25
习题 2		39
第 3 章	整数规划模型	43
§ 3.1	投资决策问题	43
§ 3.2	背包问题	44
§ 3.3	合理下料问题	45
§ 3.4	生产组织与计划问题	45
§ 3.5	工厂选址问题	46
§ 3.6	设备购置和安装问题	47
§ 3.7	旅行商问题	48

* § 3.8	系统可靠性问题	49
§ 3.9	整数线性规划解法概述	50
§ 3.10	分枝定界算法	53
习题 3		58
第 4 章	非线性规划模型	63
§ 4.1	防洪优化问题	63
§ 4.2	森林救火费用最小问题	64
§ 4.3	曲线拟合问题	65
§ 4.4	砂石运输问题	66
§ 4.5	抽水费用最小问题	68
§ 4.6	水电站群装机容量优化选择	69
§ 4.7	汽轮机叶片的优化设计	70
§ 4.8	两杆平面桁架的优化设计	71
§ 4.9	箱形剖面简支梁的优化设计	72
§ 4.10	非线性规划问题及其解法简介	74
习题 4		81
第 5 章	网络模型	84
§ 5.1	运输问题	84
§ 5.2	物资转运问题	87
§ 5.3	最短路问题	88
§ 5.4	网络最大流问题	92
§ 5.5	网络最小费用流问题	97
习题 5		98
第 6 章	多目标规划模型	101
§ 6.1	投资决策问题	101
§ 6.2	光学系统的自动设计	103
§ 6.3	生产计划问题	103
§ 6.4	橡胶配方问题	104
§ 6.5	种植方案的优选	105
§ 6.6	多目标规划的基本概念与解法简介	106
习题 6		111

第 7 章	目标规划模型	114
§ 7.1	引言 基本概念	114
§ 7.2	投资决策问题	118
§ 7.3	物资调运问题	119
§ 7.4	地区工业发展规划研究	120
§ 7.5	目标规划解法简介	123
	习题 7	127
第 8 章	库存模型	130
§ 8.1	引言 基本概念	130
§ 8.2	瞬时送货的确定型库存问题(I): 不允许缺货情况	132
§ 8.3	非瞬时送货的确定型库存问题	133
§ 8.4	瞬时送货的确定型库存问题(II): 允许缺货的情况	135
§ 8.5	变需求量的确定型库存问题	137
	习题 8	138
第 9 章	对策模型	140
§ 9.1	对策现象及基本概念	140
§ 9.2	矩阵对策模型	143
§ 9.3	最优纯策略	146
§ 9.4	混合策略对策	148
	习题 9	153
第 10 章	随机规划模型	155
§ 10.1	专用码头及有关概念简介	156
§ 10.2	专用码头的最大通过能力问题	159
§ 10.3	车、船在港停留时间最小问题	160
§ 10.4	专用码头造价最小问题	161
§ 10.5	求随机规划问题最优解的一个算法	162
	习题 10	165
第 11 章	决策模型	166
§ 11.1	决策的概念和分类	166
§ 11.2	风险型决策问题	167
§ 11.3	不确定型决策问题	173

	习题 11	177
第 12 章	投入产出模型	179
	§ 12.1 投入产出分析的概念	179
	§ 12.2 静态价值型投入产出模型	181
	§ 12.3 动态投入产出模型	184
	§ 12.4 多目标动态投入产出优化模型	187
	习题 12	190
第 13 章	评价模型	192
	§ 13.1 模糊综合评价模型	192
	§ 13.2 AHP 模型	195
	§ 13.3 DEA 模型	202
	习题 13	207

第二篇 微分方程模型

第 14 章	一阶常微分方程模型	208
	§ 14.1 人口模型	208
	§ 14.2 新技术推广模型	211
	§ 14.3 Horrod-Domer 经济增长模型	213
	§ 14.4 Van Meegeren 的艺术伪造品	215
	习题 14	220
第 15 章	高阶常微分方程和方程组模型	223
	§ 15.1 一个宏观经济模型	223
	§ 15.2 饿狼追兔问题	226
	§ 15.3 Lanchester 战争模型	228
	§ 15.4 传染病模型	232
	§ 15.5 药物动力学的房室模型	234
	习题 15	237
第 16 章	差分方程模型	239
	§ 16.1 价格变动模型	239
	§ 16.2 Samuelson-Hicks 宏观经济模型	242
	§ 16.3 Leslie 模型	245

	习题 16	247
第 17 章	偏微分方程模型	249
	§ 17.1 连续人口发展方程	249
	§ 17.2 香烟过滤嘴的作用	251
	习题 17	257

第三篇 概率统计模型

第 18 章	预测模型	258
	§ 18.1 时间序列预测模型	258
	§ 18.2 线性回归模型	266
	习题 18	275
第 19 章	正交试验设计模型	277
	§ 19.1 试验设计的基本概念	277
	§ 19.2 无交互作用的正交试验设计模型	278
	§ 19.3 常用的正交表	283
	§ 19.4 有交互作用的正交设计模型	284
	习题 19	287
第 20 章	经济计量模型	289
	§ 20.1 经济计量模型简介	289
	§ 20.2 单方程经济计量学模型	293
	§ 20.3 联立方程组模型	300
	习题 20	303
第 21 章	马尔可夫链模型	305
	§ 21.1 马尔可夫链模型简介	305
	§ 21.2 市场占有率预测	307
	§ 21.3 最佳服务地点选择	309
	习题 21	310
参考文献		313
部分习题答案		317

第 1 章 数学模型概论

本章是全书的一个导引，将对数学模型的概念和分类、建立数学模型的方法和步骤、学习和研究数学模型的方法等作简要说明。

§ 1.1 数学模型的概念和分类

近几十年来，随着科学技术的发展和社会的进步，数学在自然科学、社会科学、工程技术与现代化管理等方面获得了越来越广泛而深入的应用，使人们逐渐认识到建立数学模型的重要性。下面先对数学模型及其分类作简要的介绍。

1.1.1 模型的概念

在日常生活和工作中，人们经常会遇到或用到各种模型，如飞机模型、水坝模型、火箭模型、人造卫星模型、大型水电站模型等实物模型；也有用文字、符号、图表、公式、框图等描述客观事物的某些特征和内在联系的模型，如模拟模型、数学模型等抽象模型。

模型是客观事物的一种简化的表示和体现，它应具有如下的特点：

1. 它是客观事物的一种模仿或抽象；它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解，为了使模型成为帮助人们合理进行思考的一种工具，因此要用一种简化的方式来表现一个复杂的系统或现象。

2. 为了能协助人们解决问题，模型必须具备所研究系统的

基本特征或要素。此外，还应包括决定其原因和效果的各个要素之间的相互关系。有了这样的一个模型，人们就可以在模型内实际处理一个系统的所有要素，并观察它们的效果。

模型可以分为实物(形象)模型和抽象模型，抽象模型又可以分为模拟模型和数学模型。对我们来说，最感兴趣的是数学模型。

与上述的各种各样的模型相对应的是它们在现实世界中的原型(原始参照物)。所谓原型，是指人们研究或从事生产、管理的实际对象，也就是系统科学中所说的实际系统，如电力系统、生态系统、社会经济系统等。而模型则是指为了某个特定目的，将原型进行适当的简化、提炼而构造的一种原型替代物。它不是原型原封不动的复制品。原型有各个方面和各种层次的特征，模型只反映了与某种目的有关的那些方面和层次的特征。因此，对同一个原型，为了不同的目的，可以建立多种不同的模型。例如，作为玩具的飞机模型，在外形上与飞机相似，但不会飞；而参加航模竞赛的模型飞机就必须能够飞行，对外观则不必苛求；对于供飞机设计、研制用的飞机数学模型，则主要是在数量规律上要反映飞机的飞行动态特征，而不涉及飞机的实体。

1.1.2 数学模型的概念

在现实世界中，会遇到大量的数学问题，但是，它们往往并不是自然地以现成数学问题的形式出现的。首先，我们需要对要解决的实际问题进行分析研究，经过简化，提炼，归结为一个能够求解的数学问题，即建立该问题的数学模型。这是运用数学的理论与方法解决实际问题关键的第一步，然后，才能应用数学理论、方法进行分析和求解，进而为解决现实问题提供数量支持与指导。由此可见数学建模的重要性。

现实世界的问题往往比较复杂，在从实际中抽象出数学问题的过程中，我们必须抓住主要因素，忽略一些次要因素，作出必要的简化，使抽象所得的数学问题能用适当的方法进行求解。

以解决某个现实问题为目的，经过分析简化，从中抽象、归结出来的数学问题就是该问题的数学模型，这个过程称为数学建模。本书所讨论的数学模型主要是指用字母、数字和其它数学符号组成的关系式、图表、框图等描述现实对象的数量特征及其内在联系的一种模型。

一般地说，数学模型可以这样来描述：对于现实世界的一个特定的对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构^[1~4]。这里的特定对象，是指我们所要研究解决的某个具体问题，这里的特定的目的是指当研究一个特定对象时所要达到的特定目的，如分析、预测、控制、决策等。这里的数学工具指数学各分支的理论和方法及数学的某些软件系统。这里的数学结构包括各种数学方程、表格、图形等等。

1.1.3 数学模型的分类

数学模型的分类方法有多种，下面介绍常用的几种分类。

1. 按照建模所用的数学方法的不同，可分为：初等模型、运筹学模型、微分方程模型、概率统计模型、控制论模型等。本书主要介绍运筹学模型(第2~第13章)、微分方程模型(第14~第17章)和概率统计模型(第18~第21章)。对其他数学模型有兴趣的读者可参看参考文献1~6。

2. 按照数学模型应用领域的不同，可分为：人口模型、交通模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生态模型、企业管理模型、城镇规划模型等等。在本书中，上述的大部分模型我们都将涉及到。

3. 按照人们对建模机理的了解程度的不同可分为：

(1) 白箱模型

主要指物理、力学等一些机理比较清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这些方面的数学模型大多已经建立起

来，还需深入研究的主要是针对具体问题的特定目的进行修正与完善，或者是进行优化设计与控制等。

(2) 灰箱模型

主要指生态、经济等领域中遇到的模型，人们对其机理虽有所了解，但还不很清楚，故称为灰箱模型。在建立和改进模型方面还有不少工作要做。

(3) 黑箱模型

主要指生命科学、社会科学等领域中遇到的模型。人们对其机理知之甚少，甚至完全不清楚，故称为黑箱模型。

在工程技术和现代化管理中，有时会遇到这样一类问题：由于因素众多、关系复杂以及观测困难等原因，人们也常常将它作为灰箱或黑箱模型问题来处理。

应该指出的是，这三者之间并没有严格的界限，而且随着科学技术的发展，情况也是不断变化的。

4. 按照模型的表现特性可分为：

(1) 确定性模型与随机性模型。前者不考虑随机因素的影响，后者考虑了随机因素的影响。

(2) 静态模型与动态模型。两者的区分在于：是否考虑时间因素引起的变化。

(3) 离散模型与连续模型。两者的区分在于：描述系统状态的变量是离散的还是连续的。

§ 1.2 数学建模的方法与步骤

建立实际问题的数学模型，尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动。因此有人把数学建模看成是一种艺术，而不是一种技术。我们不能期望找到一种一成不变的方法来建立各种实际问题的数学模型。现实世界中的实际问题是多种多样的，而且大多比较复杂，所以数学建模的方法也是多种多样的。但

是，数学建模方法和过程也有一些共性的东西，掌握这些共同的规律，将有助于数学建模任务的完成。

1.2.1 对数学模型的一般要求

1. 要有足够的精确度，就是要把本质的性质和关系反映进去，把非本质的东西去掉，而又不影响反映现实的本质的真实程度。

2. 模型既要精确，又要尽可能的简单。因为太复杂的模型难以求解，而且如果一个简单的模型已经可以使某些实际问题得到满意的解决，那我们就没有必要再来建立一个复杂的模型。因为构造一个复杂的模型并求解它，往往要付出较高的代价。

3. 要尽量借鉴已有的标准形式的模型。

4. 构造模型的依据要充分，就是说要依据科学规律、经济规律来建立有关的公式和图表，并要注意使用这些规律的条件。

1.2.2 数学建模的方法

数学建模的方法按大类来分，大体上可分为三类：

1. 机理分析法

机理分析法就是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等，分析研究对象中各变量(因素)之间的因果关系，找出反映其内部机理的规律的一类方法。使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理应有一定的了解。

2. 测试分析法

当我们对研究对象的机理不清楚的时候，可以把研究对象视为一个“黑箱”系统，对系统的输入输出进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析来建立模型，这样的一类方法称为测试分析法。

3. 综合分析法

对于某些实际问题，人们常将上述两种建模方法结合起来使用，例如用机理分析法确定模型结构，再用测试分析法确定其中

的参数，这类方法称为综合分析法。

1.2.3 数学建模的一般步骤

1. 建模准备

要建立现实问题的数学模型，首先要对需要解决的问题有一个清晰的提法，即要明确研究解决的问题是什么？建模所要达到的主要目的是什么？通常，当我们遇到某个实际问题时，在开始阶段，对问题的理解往往不是很清楚，所以，需要深入实际进行调查研究，收集与研究问题有关的信息、资料，与熟悉情况的有关人员进行讨论，查阅有关的文献资料，明确问题的背景和特征，由此初步确定它可能属于哪一类模型等等。总之是做好建模前的准备工作，明确所要研究解决的问题和建模要达到的主要目的。

2. 分析与简化

对所研究的问题和收集的信息资料进行分析，弄清哪一些因素是主要的、起主导作用的，哪一些因素是次要的，并根据建模的目的抓住主要的因素，忽略次要的因素，即对实际问题作一些必要的简化，用精确的语言作出必要的简化假设。应该说这是一个十分困难的问题，也是建模过程中十分关键的一步，往往不可能一次完成，需要经过多次反复才能完成。

3. 模型构成

在前述工作的基础上，根据所作的假设，分析研究对象的因果关系，用数学语言加以刻画，就可得到所研究问题的数学描述，即构成所研究问题的数学模型，通常它是描述问题的主要因素的变量之间的一个关系式或其他数学结构，在初步构成数学模型之后，一般还要进行必要的分析和化简，使它达到便于求解的形式，并根据研究的目的，对它进行检查，主要是看它能否代表所研究的实际问题。

4. 模型求解

选择合适的数学方法求解经上述步骤得到的模型。在多数情

况下，我们很难获得数学模型的解析解，而只能得到它的数值解，这就需要应用各种数值方法、软件和计算机。包括各种数值优化方法，线性与非线性方程组的数值方法，微分方程(或方程组)的数值解法，各种预测、决策和概率统计方法等，以及各种应用软件系统。当现有的数学方法还不能很好解决所归结的数学问题时，就需要针对数学模型的特点，对现有的方法进行改进或提出新的方法以适应需要。

5. 模型的评价与改进

数学模型总是在不断地分析、检验、评价中，不断地进行改进和完善的。数学模型是否便于求解也是评价模型优劣的一个重要标准。当然，建模的目的是为了解决实际问题，所以评价模型优劣最重要的标准是：模型及其解能否反映现实问题，满足解决实际问题的需要。

6. 模型应用

模型应用就是把经过多次反复改进的模型及其解应用于实际系统，看能否达到预期的目的。若不够满意，则建模任务仍未完成，尚需继续努力。

上述数学建模过程和步骤可用如下流程图(图 1-1)表示。

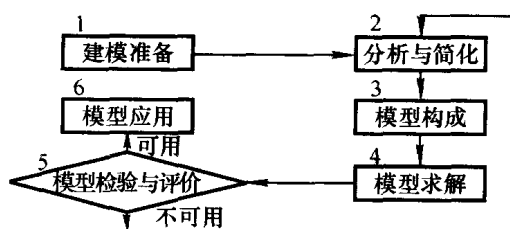


图 1-1

应当强调指出的是：并不是所有的数学建模过程都要按上述步骤进行。上述步骤只是数学建模过程的一个大致地描述，实际建模时可以灵活应用。