现代数学基础

7 可靠性统计

■ 茆诗松 汤银才 王玲玲 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

7 可靠性统计

■ 茆诗松 汤银才 王玲玲 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是一本关于可靠性的入门书，讲述可靠性的基本概念，并对常用的寿命分布下的各种可靠性特征的点估计、区间估计、假设检验和加速寿命试验作出较为详尽的叙述，对最近国际上兴起的退化数据处理和贝叶斯分布两个专题作了较多的介绍。读完本书可转入可靠性专业文献阅读。

本书适用于相关专业的研究生和教师，对于可靠性工作者也有着重要的参考价值，本书前五章部分内容可作为本科生选修课教材。

图书在版编目（CIP）数据

可靠性统计/茆诗松，汤银才，王玲玲编著. —北京：高等教育出版社，2008. 10

ISBN 978-7-04-024461-8

Ⅰ. 可… Ⅱ. ①茆… ②汤… ③王… Ⅲ. 可靠性理论-统计学 Ⅳ. C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 140399 号

策划编辑	王丽萍	责任编辑	李华英	封面设计	张　楠
责任绘图	尹文军	版式设计	陆瑞红	责任校对	姜国萍
责任印制	宋克学				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新华印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2008 年 10 月第 1 版
印　　张	30.25	印　　次	2008 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	550 000	定　　价	59.00 元

物料号　24461－00

前　言

产品的可靠性愈来愈受到企业和顾客的重视, 这是推动我国可靠性事业发展的原动力. 随着我国科学技术发展, 科学发展观深入人心, 新产品与新材料不断涌现, 这种原动力会愈来愈强大. 为适应此种发展, 我国一些企业、研究所和高校都在开展各种可靠性专题研究, 国家自然科学基金会每年都设项资助一些可靠性专题研究. 我国很多高校先后都开设可靠性课程, 使更多的年青人能很快适应这种发展, 尽快参与可靠性研究与实践, 逐步成长为可靠性专业人才. 这就需要一本入门教材, 正是这种需要促使我们动笔写这本书, 使大学生、研究生和工程师们能很快进入这个领域的应用与研究.

二十多年前我们曾写过一本《可靠性统计》, 作为大学生的教材, 由华东师范大学出版社出版. 二十多年过去了, 该书内容显得陈旧, 因为可靠性发展很快, 从 20 世纪 50 年代的起步阶段, 70 年代的成熟阶段, 到 90 年代进入综合化、智能化、自动化的发展阶段, 很多新的可靠性技术、数据处理方法不断出现, 美国还出版一本 Life Data 杂志. 贝叶斯方法进入可靠性领域, 退化数据处理方面的论文大量出现, 这些发展使产品可靠性得到迅速提高, 可靠性理论得以丰富和完善. 这次应高等教育出版社的要求, 写一本可靠性统计的研究生教材, 正合我们心意. 重新编写可靠性统计, 并请我系新秀汤银才教授参与, 在参编人员中增加新鲜血液, 也使本书在内容与编写方面增色不少.

本书分八章编写, 第一章为概率统计概要, 包含可靠性中常用的概率与统计基本结果, 罗列这些主要便于学生复习与查阅. 第二章至第六章是可靠性统计的基本内容, 其中部分内容, 如第二、三章和第四、五、六章部分内容可作为大学生教材使用, 第七章的退化数据统计分析和第八章的贝叶斯统计分析是完全崭新

的内容, 首次进入教材, 全书可作为研究生教材, 读完这些章节就可阅读可靠性统计方面的专题论文, 进入研究领域.

本书前三章由茆诗松编写, 第四、五章由王玲玲编写, 最后三章由汤银才编写, 全书由茆诗松统稿. 全书虽经几次修改, 不当之处在所难免, 还恳请读者和专家多多指正, 这是对我们最好的支持和鞭策. 此书能迅速问世与高等教育出版社研究生分社的领导与王丽萍女士的指导和帮助是分不开的, 特在此表示感谢. 还要感谢华东师大统计系的领导和广大教师的多方支持和热情帮助.

编　者

于华东师大统计系

2008 年 4 月 10 日

目　　录

第一章 概率统计概要

§1.1 事件与概率

1.1.1 随机现象与随机事件

1. 概率论与数理统计的研究对象是**随机现象**.

在一定条件下, 并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**. 抛硬币、掷骰子是两个最简单的随机现象. 随机现象有两个特点:

- 随机现象的基本结果 (又称样本点) 至少两个;
- 至于哪一个样本点出现, 事先并不知道.

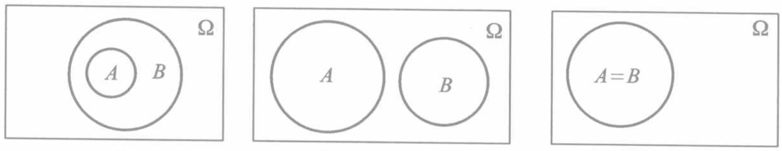
2. 随机现象一切可能的样本点的全体称为该随机现象的**样本空间**, 记为 $\Omega = \{\omega\}$. “掷一颗骰子所得点数” 的样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; “一铸件上的缺陷数” 的样本空间 $\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$; “一台电视机首次发生故障的时间” 的样本空间 $\Omega = \{t : t \geqslant 0\}$.

3. 随机现象的某些样本点组成的集合 (即 Ω 的子集) 称为**随机事件**, 简称**事件**, 常用大写字母 A, B, C 等表示. 样本空间的最大子集就是 Ω, 称为**必然事件**, 仍记为 Ω. 样本空间的最小子集就是空集, 称为**不可能事件**, 记为 $\varnothing$. 譬如, 掷一颗骰子, “出现偶数点” 是事件 $A = \{2,4,6\}$, “出现点数不超过 6” 是必然事件, “出现 7 点” 是不可能事件.

4. 事件间的关系有三种: **包含**; **互不相容**; **相等**. 可用图 1.1.1 表示它们.

5. 事件间的运算有四种: **对立** (又称**余**)、**并**、**交**、**差**, 可用图 1.1.2 表示它们.

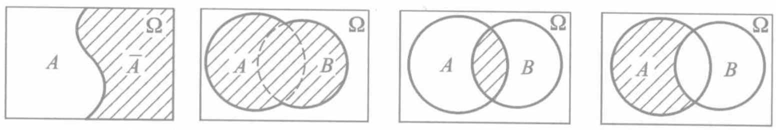
事件间的并与交可以推广至三个或更多个事件的并与交, 譬如, 有一列事件



$A \subset B$ 或 $B \supset A$　　A 与 B 互不相容　　$A = B$

图 1.1.1　事件间的三种关系

(其中矩形表示 Ω, 圆或其他几何图形表示事件)



A 的对立事件 $\overline{A}$　　$A \bigcup B$　　$A \bigcap B$ 或 AB　　$A - B$

图 1.1.2　事件间的运算

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 它们的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 它们的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

6. 事件间运算性质.

(1) $A - B = A - AB = A\overline{B}$;

(2) 交换律

- $A \bigcup B = B \bigcup A$,
- $AB = BA$;

(3) 结合律

- $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,
- $(AB)C = A(BC)$;

(4) 分配律

- $A(B \bigcup C) = AB \bigcup AC$,
- $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$,
- $A(B - C) = AB - AC$;

(5) 对偶律

- $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$,
- $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

1.1.2　事件的概率

1. **概率的公理化定义**. 1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (1903—1987) 提出如下概率的公理化定义.

定义 1.1.1 在一个随机现象中, 用来表示任一随机事件 A 发生可能性大小的实数称为该事件的概率, 记为 $P(A)$, 并规定

(1) **非负性公理** 对任一事件 A, 必有 $P(A) \geqslant 0$.

(2) **正则性公理** 必然事件的概率 $P(\Omega)=1$.

(3) **可列可加性公理** 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是可列个互不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

概率公理化定义为现代概率论发展打下了坚实基础. 关于概率的确定历史上有古典方法和频率方法可用, 其要点分述如下.

2. **确定概率的古典方法**, 其要点如下:

(1) 所考察事件 A 涉及的随机现象只有有限个 (譬如 n 个) 样本点;

(2) 每个样本点出现的可能性相同 (等可能性);

(3) 若事件 A 含有 k 个样本点, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中样本点的总数}}.$$

例 1.1.1 掷两颗骰子的样本空间 Ω 含有 36 个等可能的样本点, 事件 $A=$ “至少出现一个 6 点” 的概率 $P(A)=11/36$. 事件 $B=$ “点数之和为 7” 的概率 $P(B)=6/36=1/6$.

3. **确定概率的频率方法**, 其要点是:

(1) 所考察事件 A 涉及的随机现象可以大量重复, 可重复的随机现象又称为**随机试验**;

(2) 若在 n 次重复试验中, 事件 A 发生 k_n 次, 则事件 A 发生的频率为

$$\widehat{P}_n(A)=\frac{k_n}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数}}{\text{重复试验次数}}.$$

(3) 频率 $\widehat{P}_n(A)$ 将随着重复试验次数 n 不断增加而趋于稳定, 频率的稳定值就是概率. 实际中可用重复试验次数 n 较大时的频率去近似概率. 即 $P(A)\approx \widehat{P}_n(A)$.

例 1.1.2 用频率确定概率的例子.

• 瑞典 1935 年共出生 88 273 个婴儿, 其中女婴 42 591 个, 则女婴出生的频率为 42 591/88 273 = 0.482 5, 它可以作为瑞典女婴出生概率的近似值.

• 英语中 26 个字母在书刊上出现的可能性不同, 有人对各类典型英语书刊中字母出现的频率进行统计, 并用频率作为概率的近似值, 发现出现频率 (记为

$\widehat{P}$) 最高的三个字母分别是

$$\widehat{P}(\text{字母 E}) = 0.126\,8, \quad \widehat{P}(\text{字母 T}) = 0.097\,8, \quad \widehat{P}(\text{字母 A}) = 0.077\,6.$$

而出现频率最低的三个字母分别是

$$\widehat{P}(\text{字母 J}) = 0.001\,0, \quad \widehat{P}(\text{字母 Q}) = 0.000\,9, \quad \widehat{P}(\text{字母 Z}) = 0.000\,6.$$

• 1986 年以前世界级足球赛中共有 15 382 次点球, 其中命中次数 11 172 次, 则可认为点球命中概率近似为 11 172/15 382 = 0.726.

1.1.3 概率的性质

由概率的三条公理可以推出概率的如下一些性质:

(1) 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\varnothing)=0$;

(2) 对任一事件 A, 有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(3) 对 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

(4) 任一事件 A 的对立事件的概率 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(5) 对事件 A 与 B, 若 $A \supset B$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(A) \geqslant P(B)$;

(6) 对任意两个事件 A 与 B, 有 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$;

(7) 对任意两个事件 A 与 B, 有 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

这个性质可以推广到任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 场合, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

例 1.1.3 十把外形类似的钥匙中只有一把能打开门, 现随意一一试开, 且不放回, 求事件 $A=$ "至多三次就能打开门" 的概率.

解 直接计算 $P(A)$ 较为复杂, 改为先求对立事件 $\overline{A}=$ "三次都没打开门" 的概率, 若 $\overline{A}$ 发生, 则先后所取三把钥匙是从不能打开门的 9 把中随意取的, 共有 $\binom{9}{3}$ 个样本点, 而基本空间 Ω 含有 $\binom{10}{3}$ 个等可能的样本点, 由此可得

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \binom{9}{3}\bigg/\binom{10}{3} = 0.3.$$

例 1.1.4 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.7$ 和 $P(A\bigcup B)=0.9$, 问事件 A 与 B 是否互不相容?

解 倘若 A 与 B 互不相容, 则 $AB=\varnothing$, 且 $P(AB)=0$. 如今 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\bigcup B)=0.3+0.7-0.9=0.1>0$, 这一矛盾说明 A 与 B 不是互不相容.

1.1.4 事件间的独立性

1. 两个事件的独立性: 若 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称事件 A 与 B **相互独立**, 简称为**独立**.

性质: 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都独立, 但要求 $0<P(A), P(B)<1$.

2. 多个事件相互独立: 若三个事件 A_1, A_2, A_3 间有如下四个等式:

$$
\begin{aligned}
&P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\\
&P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),\\
&P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),\\
&P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3),
\end{aligned}
$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立. 从这个定义可见, 要求三个事件相互独立必须具有两两独立和三三独立. 类似地, 可定义四个或更多个事件的相互独立性, 譬如, 定义五个事件相互独立需要 $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=26$ 个概率等式.

判定两个或更多个事件的相互独立性, 可以从定义出发, 但更多地是从客观事实出发, 若任一事件的发生不受其他事件的影响, 就可判定这些事件相互独立.

若 n 个事件相互独立, 则其中一部分 (一个或几个) 与另一部分相互独立. 若将 n 个相互独立事件中一部分换为其对立事件, 所得 n 个事件仍相互独立.

3. 两个随机试验 E_1 与 E_2 相互独立: 试验 E_1 的任一事件与试验 E_2 的任一事件都相互独立.

4. n 个随机试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 相互独立: 试验 E_1 的任一事件, E_2 的任一事件, $\cdots\cdots, E_n$ 的任一事件都相互独立. 假如这 n 个试验还是相同的, 则称其为 n 重独立重复试验.

例 1.1.5 用晶体管装配某仪表要用到 128 个元器件, 改用集成电路元件后, 只要用 12 只就够了, 如果每个元器件或集成电路元件能正常工作 2 000 h 以上的概率是 0.996. 并且这些元件工作状态是相互独立的, 仪表中每个元件都正常工作时, 仪表才能正常工作, 试分别求出上述两种场合下仪表能正常工作 2 000 h 的概率.