大学经济数学教材

概率论与数理统计

主　编◎运怀立
副主编◎汤大林 苗文利

中国人民大学出版社

大学经济数学教材

概率论与数理统计

主　编　运怀立
副主编　汤大林 苗文利

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/运怀立主编.
北京：中国人民大学出版社，2009
大学经济数学教材
ISBN 978-7-300-10261-0

Ⅰ.概…
Ⅱ.运…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 008419 号

大学经济数学教材
概率论与数理统计
主　编　运怀立
副主编　汤大林　苗文利

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街 31 号　　**邮政编码**　100080
电　　话　010－62511242（总编室）　010－62511398（质管部）
010－82501766（邮购部）　010－62514148（门市部）
010－62515195（发行公司）　010－62515275（盗版举报）
网　　址　http：//www. crup. com. cn
http：//www. ttrnet. com(人大教研网）
经　　销　新华书店
印　　刷　北京鑫霸印务有限公司
规　　格　170 mm×228 mm　16 开本　　**版　　次**　2009 年 2 月第 1 版
印　　张　16. 25 插页 1　　**印　　次**　2009 年 2 月第 1 次印刷
字　　数　295 000　　**定　　价**　22. 00 元

前 言

本书是在编者十余年来讲授《概率论与数理统计》课程所使用的讲稿的基础上，根据最新颁布的《2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的精神修改并进行重新编纂而成的。其目的是为相应专业的在校本科生学习这门课程提供必要和适当的有关基础知识；同时也充分考虑了部分学生继续深造的要求。所以在编写本书的过程中对内容和习题都作了精心的筛选，使本书在整体上显得充实但又不失简洁。鉴于数学三与数学四合并后，新“数学三”的大纲对《概率论与数理统计》的考试内容与考试要求做了比较大的调整，本书删去了区间估计、假设检验、回归分析和相关分析等内容，力求精练。全书共分七章，即随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计初步、数学实验，前六章和考纲高度一致。每一章的内容都有明确的代表性与针对性，希望这些工作能对本书的读者有所裨益。

参加本书编写工作的同志，都是长期从事教学研究和在教学上有丰富经验的教师，书中随处可见他们对相应章节内容的理解与体会，同时也注意吸收了国内出版的同类教材的优点。在本书的编写过程中，我们注意了以下几点：

(1)在讲解重要定义、定理和法则时，尽量做到由浅入深、由具体到抽象，并且把难点适当加以分散。教学实践说明，这对于经济类和管理类专业的学生是适合的。

(2)在讲解基本理论和基本方法的过程中，穿插了较多计算方面的例题。这样一方面使学生能够理解和掌握所学内容，另一方面也为应用概率论的思想方法解决实际问题提供了较好的范例。

(3)概率论与数理统计是一门理论与实践相结合的课程，除要求学生掌握处理随机现象的基本思想和基本方法，领会有关概念和结论的直观意义之外，培养学生分析和解决随机性问题的能力，强调概率统计的背景和应用，注重培养学生的想象力和动手应用有关理论和方法解决实际问题的能力是该课程的最终教学目标。因此本书特增设了第 7 章——数学实验，旨在提高学生的学习兴趣，更好地理解概率论的思想与方法。

本书第 1、2 章由黄宜平老师编写；第 3、4 章由运怀立老师编写；第 5～7 章由

汤大林老师编写。全书由运怀立老师统稿，由苗文利和王玉秀两位老师主审。另外，谌雪莺、亢京力和孙志慧三位老师以及研究生杨珊珊、刘博等做了大量录入和查找资料的工作，在此一并致谢。

书中可能尚有许多不妥之处，还希望读者不吝斧正。

编者

2008 年 12 月

目　录

第 1 章　随机事件和概率

人们生活中最重要的问题，其中占绝大多数的，实际上只是概率的问题.

——拉普拉斯(P. Laplace)

数学、科学和语言构成了人的活动的三种主要功能，人靠这些功能支配自然.

——布劳威尔(Brouwer)

数学是我们时代中有势力的科学，它不声不响地扩大它所征服的领域.

——赫尔巴特(J. F. Herbart)

一、教学基本要求

1. 了解随机事件的概念，掌握事件间的关系与运算.

2. 了解事件频率的稳定性，理解概率的含义，掌握概率的基本性质和加法定理，会计算简单的古典概率.

3. 理解条件概率和事件独立性的概念，掌握乘法定理，会利用全概率公式和贝叶斯公式.

二、教学重点与难点

1. 重点：掌握概率的古典定义及其适用范围.

2. 难点：如何用已知事件表达其他事件；正确判断试验的概型.

现实世界中充满了不确定性. 从玩骰子和扑克牌等简单的机会游戏，到诸如物理学、生物学、医学、社会学、人文科学、工农业和保险等重要领域内的种种问题，都包含了不确定性. 这些领域内的典型问题是，在既含有已知(或可度量的)因素，又含有偶然因素的前提下，对将要出现的情况作出一种判断. 概率论和数理统计就是研究这方面问题的数学学科. 概率论是研究随机现象的数量规律的科学. 而统计学的任务是收集和分析数据，并根据数据对事物或现象作出科学的判

断. 由于偶然因素对数据的收集和分析都有影响，所以在判断时，就必然要考虑到这些偶然因素对判断结果的影响. 因此统计学中必须用到相当多的概率知识，建立在概率论基础上的统计学又称为数理统计学.

1.1 概率论的创立与发展

概率论是研究自然界中大量随机现象的统计规律性的一门科学，其应用极其广泛. 自 17 世纪产生后，现已发展成一个庞大的数学分支.

17 世纪中叶，在法国出现了对赌博问题的研究. 也正是由于对赌博问题的研究，推动了数学的发展，使一门崭新的学科 —— 概率论诞生了.

有一次，爱好赌博的德梅瑞(de Méré) 向其好友、著名数学家帕斯卡(B. Pascal，1623—1662，法国) 提出了有关赌博的各种问题. 例如，甲乙双方是竞技力量相当的对手，每人各拿出 32 枚金币，以争胜负. 在赌博中，取胜一次得 1 分，最先获得 3 分的人赢得全部 64 枚赌金. 可是，因某种缘故，进行了 3 次，赌博被迫终止. 而此时，甲得 2 分，乙得 1 分，问赌金如何分配？

1654 年 7 月 29 日，帕斯卡给费马(Fermat，1601—1665，法国) 写信，商量如何解决这类问题. 来往书信持续三个月之久，在 1654 年 10 月 27 日，帕斯卡又给费马去信说："你的信所阐述的内容是令人满意的，你所采用的分配方法是正确的，深感敬佩. 这种分配方法完全是你创建的. 我所想出的方案与你的方法是完全不同的，但都达到了同样的目的……" 帕斯卡的信宣告了讨论至此结束.

实际上，在这三个月的书信来往中，他们以赌博为例认真地讨论了有关的数学问题. 在 7 月 29 日的信中，帕斯卡认为，当甲得 2 分，乙得 1 分时赌博终止，那么甲应该说："任何情况下，我有权获得赌金的一半，即便在下一局中乙获胜，赌金也应平分，首先有 32 枚金币，或许是你赢或许是我赢，机会均等. 所以应平分剩下的 32 枚金币，即我应得 (32＋16)＝48 枚金币." 假设两赌徒中甲赢了两局，乙一局未赢，那么接下来可能出现的情况是：甲再赢一局，得 3 分，将获得全部赌金；乙赢一局，出现 2∶1 的局面，这是上面讨论过的. 因此，不管甲在下一局的输赢，都有 3/4 的赌金应属于甲. 至于剩下的 1/4 赌金，甲乙两赌徒获得赌金的机会相等，应平分. 故甲应得 7/8 赌金，乙应得 1/8 赌金. 假设甲赢一局，乙一局未赢，则可出现如下情况：若甲再赢一局，形成 2∶0 的局面，这也是上面讨论过的情况；若乙胜了这一局，形成 1∶1 的局面. 因此在任何情况下，甲有权获得赌金的 1/2，乙有权获得赌金的 1/8. 至于剩下的 3/8 赌金，他们得到的机会相等，应该平分.

在这里帕斯卡没有给出一般性的证明，而且在叙述时，显得有些混乱，很难理出头绪.

费马收到帕斯卡的信后，利用自己擅长的组合思想来解决有关问题，他的思路清晰，易于理解，并十分重视各种概型，指出不能把独立概率事件和条件概率事件混为一谈. 在此之后，帕斯卡认真地研究了自己的方法，修改后的方法成为概率研究的重要转折点.

费马和帕斯卡在通信中，虽然没有明确揭示出概率的定义，但是，在研究赌徒取胜的机会时，涉及有利情形数与所有可能情形数的比，这实际上是概率定义的雏形.

1657 年，荷兰数学家、物理学家惠更斯（Huygens，1629—1695）也试图解决帕斯卡与费马通信中提出的问题. 他撰写出《论赌博中的计算》一文，建立了概率和数学期望等重要概念，揭示了它们的性质和演算方法，这是最早的概率论论文.

到了 18 世纪，很多数学家从事概率论的研究. 贝努利（J. Bernoulli，1654—1705，瑞士）的巨著《猜度术》在瑞士巴塞尔出版. 在这部著作中，贝努利提出了新的概念和定理，尤其是提出了概率论的重要定律之一 —— 大数定律，并给出了证明，这使建立在经验之上的频率稳定性推测进一步理论化了. 从此，由对特殊问题的求解，发展到了一般理论概括，为概率论这门学科的成熟奠定了基础.

继贝努利之后，法国数学家棣莫弗（De Moivre，1667—1754）于 1718 年出版了《机遇原理》. 书中提出了概率乘法法则，以及“正态分布”和“正态分布律”的概念，为概率论的“中心极限定理”的建立奠定了基础.

18 世纪法国的蒲丰（Buffon，1707—1788）在《或然性算术试验》中，把概率和几何结合起来，开始了几何概率的研究.

经过贝努利和棣莫弗的努力，使数学方法有效地应用于概率研究之中，这就把概率论的特殊发展同数学的一般发展联系起来.

19 世纪初期，概率论的巨大进步是与拉普拉斯（Laplace，1749—1827，法国）分不开的，可以说，他是这一时期概率论发展的集大成者，他的经典著作《分析概率论》总结了这一个时代的概率论研究成果. 这部著作明确地表述了概率的基本定义和定理，严格证明了棣莫弗-拉普拉斯定理，建立了误差理论和最小二乘法，研究了广泛的统计问题. 这部著作的显著特色在于广泛而又灵活地运用了数学分析的方法. 以前，概率论被当做组合数学的一部分，拉普拉斯实行方法改革之后，使之成为分析数学的一部分，从而开辟了现代概率论发展的新途径.

后来，高斯（Gauss，1777—1855，德国）和泊松（Poisson，1781—1840，法国）等人进一步地发展了概率论. 高斯确立了最小二乘法和误差论的基础；泊松推广了大数定律，引入了十分重要的“泊松分布”.

切比雪夫（1821—1894，俄国）也著书立说，提出大数定律，其著作无论是理论意义，还是实用价值，都是很大的.

1917 年，苏联科学家伯恩斯坦（1880—1968）首先给出了概率的公理体系.柯尔莫哥洛夫于1933 年又以更完善的形式提出了公理结构. 至此，现代意义上的概率论基本完成了.

1896 年，英国传教士傅兰雅(John Fryer，1839—1928) 和中国数学家华衡芳（1833—1902）合译了《概率论》，定名为《决疑数学》. 从此，概率论开始传入我国，但是译名很混乱. 直到 20 世纪初，才正式定名为“概率”，废除了其他译名，如“或然率”、“信率”、“几率”，等等. 从 20 世纪开始，我国对概率论进行了系统的学习和研究，取得了一定的成果.

1.2 随机试验

一、随机现象与确定性现象

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 有一类现象，在一定条件下必然发生(或必然不发生)，例如：向上抛一石子必然下落，同性电荷必相排斥，等等，这类现象称为**确定性现象**. 另一类现象具有偶然性，在个别试验中呈现出不确定性，在大量的重复试验中，又具有统计规律性，我们称之为**随机现象**.

1986 年 1 月 28 日，美国肯尼迪航天中心发射场发生了一件震惊世界的大事 ——“挑战者”号航天飞机在升空 72 秒之后突然爆炸，7 名机组人员全部罹难.这一悲惨事件造成了至少 12 亿美元的损失，并使得美国航天局在一年之内无法进行新的航天飞机试验. 这一事件的发生虽然有技术上的原因，但不能不说它带有一定的偶然性. 也就是说，某些偶然因素的影响，也是酿成这一悲剧的原因.

事实上，在社会生活与日常生产活动中，这种带有偶然性的现象是随处可见的. 例如：工厂的产品质量检验，任意抽取的产品有可能是正品，也有可能是次品；公司经理对本公司在未来某个月的销售额无法说出准确的数字；桥牌选手在拿到牌之前并不知道他将拿到一手怎样的牌，等等.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科. 我们将通过随机试验来研究随机现象.

二、随机试验

我们把试验作为一个广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一

事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 下面举一些例子来说明：

E_1：掷一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：掷两枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3：掷一枚骰子，观察其出现的点数.

E_4：记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数.

E_5：袋中装有红、白两色的球各若干，从袋中任取一球，观察其颜色.

E_6：一射手进行射击，直到击中目标为止，观察其射击的情况.

E_7：在一批灯泡中，任意抽取一只，测试其寿命.

E_8：记录某地区一昼夜的最高气温和最低气温（单位：℃）.

E_9：举行一场足球赛，观察甲乙两队的胜负情况.

E_{10}：有10件商品，其中8件正品2件次品. 现任取3件，观察所取商品的情况.

以上列举了10个试验的例子，其共同的特点是：试验可能结果不止一个. 例如，E_1 有两个可能的结果，E_3 有6种可能的结果，E_7 可能的结果有无穷多种；试验前不能确定哪一个结果会出现，并且可以在相同的条件下重复试验.

随机试验　我们将具有以下三个特征的试验称为**随机试验**，简称**试验**.

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现，但试验结束时能确定出现的结果.

应当指出，非随机试验是大量存在的，只是它不是概率的研究对象，所以在后续的学习中基本不提及. 下面仅举两例：

例1　设 E：观察在一个标准大气压下水的沸点. 显然 E 满足 (1) 与 (2)，但不满足 (3)，所以 E 不是随机试验.

例2　设 E：观察张三从得肺癌到死亡的时间. 虽然 E 满足 (2) 与 (3)，但不满足 (1)，所以 E 不是随机试验.

注　如果例2中的 E 改为观察一个人从得肺癌到死亡的时间，则 E 满足 (1)、(2) 和 (3)，此时 E 是一个随机试验.

1.3　随机事件与样本空间

一、样本空间

对于随机试验，虽然在试验之前我们无法断言哪一个结果会出现，但是对于

所有可能出现的试验结果我们是预先知道的，我们就将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω. 样本空间 Ω 中的元素，即试验 E 的每个可能结果，称为样本点.

下面写出了 1.2 节中试验 $E_k(k=1, 2, \cdots, 9)$ 的样本空间 Ω_k.

Ω_1：$\{H, T\}$

Ω_2：$\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

Ω_3：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ω_4：$\{0, 1, 2, \cdots\}$

Ω_5：{白色，红色}

Ω_6：$\{+, -+, --+, \cdots\}$，这里“+”表示击中，“−”表示没有击中.

Ω_7：$\{t \mid t \geqslant 0\}$

Ω_8：$\{(x, y) \mid T_0 < x < y < T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不低于 T_0，不高于 T_1.

Ω_9：{甲胜，乙胜，踢平}

二、随机事件

1. 试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 一般用大写英文字母 A, B, C, $\cdots$ 表示.

在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，就称这一事件**发生**.

例如，试验 E_3 中，出现点数 1、出现偶数点、出现素数点都是随机事件.

2. 由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 由若干基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

例如，试验 E_3 中，出现点数 1 是由一个样本点组成的，它是 E_3 的基本事件；如出现点数 2，出现点数 3，$\cdots$，出现点数 6 都是基本事件. 而出现偶数点，出现素数点都不止含有一个样本点，是复合事件而不是基本事件.

又如，试验 E_2 中，两个硬币均出现正面，两个硬币均出现反面是基本事件；两个硬币一个出现正面一个出现反面，两个硬币中至少有一个出现正面是复合事件.

3. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也是 Ω 的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

例如，试验 E_3 中，出现点数不大于 6 的事件是必然事件；出现点数大于 6 的

事件是不可能事件.

又如，试验E_{10}中，所取三件样品中至少有一件为正品的事件是必然事件；所取三件样品均为次品的事件是不可能事件.

三、事件之间的关系与运算

设事件E的样本空间为Ω，A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$是E的事件.

1. 包含与相等

若事件A发生必然导致B发生，则称**事件B包含事件A**，或称**A是B的子事件**，记为$A\subset B$，或$B\supset A$. 可用图1—1来直观地说明，图中矩形表示样本空间Ω，圆A与圆B分别表示事件A与事件B，事件B包含着事件A.

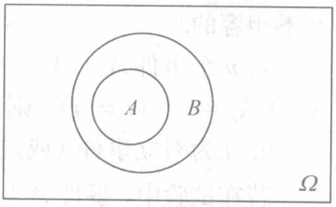

图 1—1

若事件B包含事件A，且事件A也包含事件B，则称**事件A与事件B相等**，记为$A=B$.

2. 事件之和(或并)

事件A与事件B至少有一个发生，这一事件称为**事件A与事件B的和(或并)**，记为$A+B$，或$A\cup B$，如图1—2中阴影部分所示.

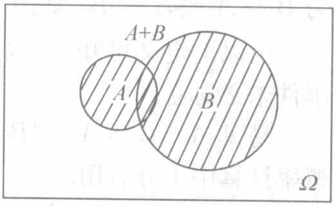

图 1—2

类似地，事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生，这一事件称为A_1，A_2，…，A_n的和(或并)，记为$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，或记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…中至少有一个发生，这一事件称为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的和(或并)，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\left(\text{或}\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right).$$

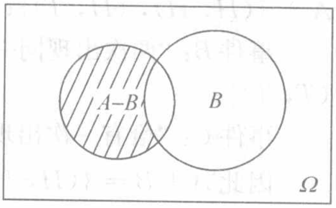

图 1—3

3. 事件之差

事件A发生而事件B不发生，这一事件称为**事件A与事件B之差**，记为$A-B$，如图1—3中阴影部分所示.

4. 事件之积(或交)

事件A与事件B同时发生，这一事件称为**事件A与事件B之积(或交)**，记为

AB 或 $A\cap B$，如图 1—4 中阴影部分所示. 类似地，可以定义 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 之积(或交)：$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；以及 $A_k(k=1, 2, \cdots)$ 之积：$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

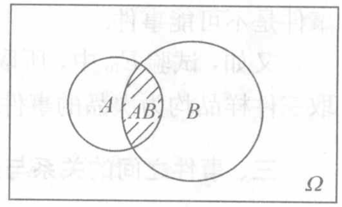

图 1—4

5. 事件互不相容(或互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 $AB=\varnothing$，则称**事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥)**. 基本事件是互不相容的. 图 1—5 直观地表示了事件 A 与事件 B 是互不相容的.

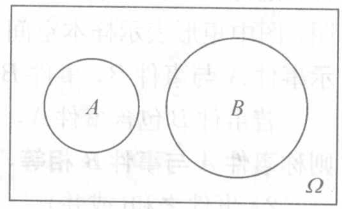

图 1—5

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则称它们**互不相容**.

6. 互为对立事件（或逆事件）

若在试验中，事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与事件 B 满足：(1) $A+B=\Omega\ (A\cup B=\Omega)$；(2) $AB=\varnothing\ (A\cap B=\varnothing$，互斥)，则称**事件 A 与事件 B 互为对立事件**（或称**事件 A 与事件 B 互为逆事件**），记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$，如图 1—6 所示.

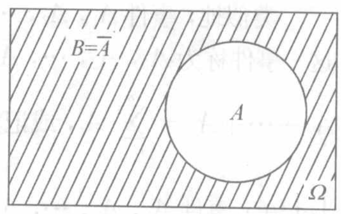

图 1—6

由以上定义可知：对立事件一定互斥，而互斥事件未必对立.

易见 $A-B=A-AB=A\overline{B}$ 成立，这在以后的概率计算中十分有用.

例 1 在 E_2 中，事件 A："第一次出现 H"，即 $A=\{(H, H), (H, T)\}$；

事件 B："两次出现同一面"，即 $B=\{(H, H), (T, T)\}$；

事件 C："恰有一次出现 H"，即 $C=\{(H, T), (T, H)\}$.

因此 $A+B=\{(H, H), (H, T), (T, T)\}$，$AB=\{(H, H)\}$，$A-B=A-AB=\{(H, T)\}$.

因为 $B+C=\Omega$，$BC=\varnothing$，所以事件 B 与事件 C 互逆，即 $B=\overline{C}$ 或 $C=\overline{B}$，$A-B=A\overline{B}=AC$.

例 2 在某人群中随机地调查一人，设“被调查者为男性”用事件 A 表示，

“被调查者身高大于1.65米”用事件B表示，“被调查者体重大于60公斤”用事件C表示，“被调查者具有大专以上学历”用事件D表示，则：

(1)“被调查者是男性或身高大于1.65米”$=A+B$.

(2)“被调查者身高大于1.65米且体重大于60公斤”$=BC$.

(3)“被调查者身高小于或等于1.65米”$=\overline{B}$.

(4)“被调查者为男性但体重小于等于60公斤”$=A\overline{C}$.

(5)“被调查者是男性或身高大于1.65米两条中至少满足一条，且具有大专以上学历”$=(A+B)D$.

(6)“被调查者身高小于或等于1.65米，或体重小于等于60公斤”$=\overline{B}+\overline{C}=\overline{BC}$.

(7)“被调查者是男性但不具有大专以上学历”$=A-D=A\overline{D}$.

(8)“被调查者或是男性或身高大于1.65米或体重大于60公斤三条中至少满足一条”$=A+B+C$.

(9)“被调查者为女性或具有大专以上学历两条中至少满足一条，且身高大于1.65米或体重大于60公斤两条中至少满足一条”$=(\overline{A}+D)(B+C)$.

例 3　一颗骰子投掷两次，依次记录所得点数，设A为“所得点数之和为8”的事件，B为“所得数对中至少有一个为2点”的事件，C为“所得数对中两数相等”的事件，D为“两数之和小于或等于3”的事件，则：

$$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$
$$B=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$
$$C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

且$C+D=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(2,1)\}=$“所得两数相等或两数之和小于等于3”.

$AB=\{(2,6),(6,2)\}=$“所得两数之和为8且两数中至少有一个为2”.

$BC=\{(2,2)\}=$“所得数对中至少有一个为2且两数相等”.

$A-B=\{(3,5),(4,4),(5,3)\}=$“所得数对两数之和为8但两数中没有一个为2”.

$AD=\varnothing=$“所得数对中两数之和为8且两数之和小于或等于3”.

例 4　设某系统由元件1，2，3，4，5，6按图1—7所示连接而成，用A_i表示第i个元件正常工作的事件($i=1,2,3,4,5,6$)，用B表示系统正常工作的事件，则