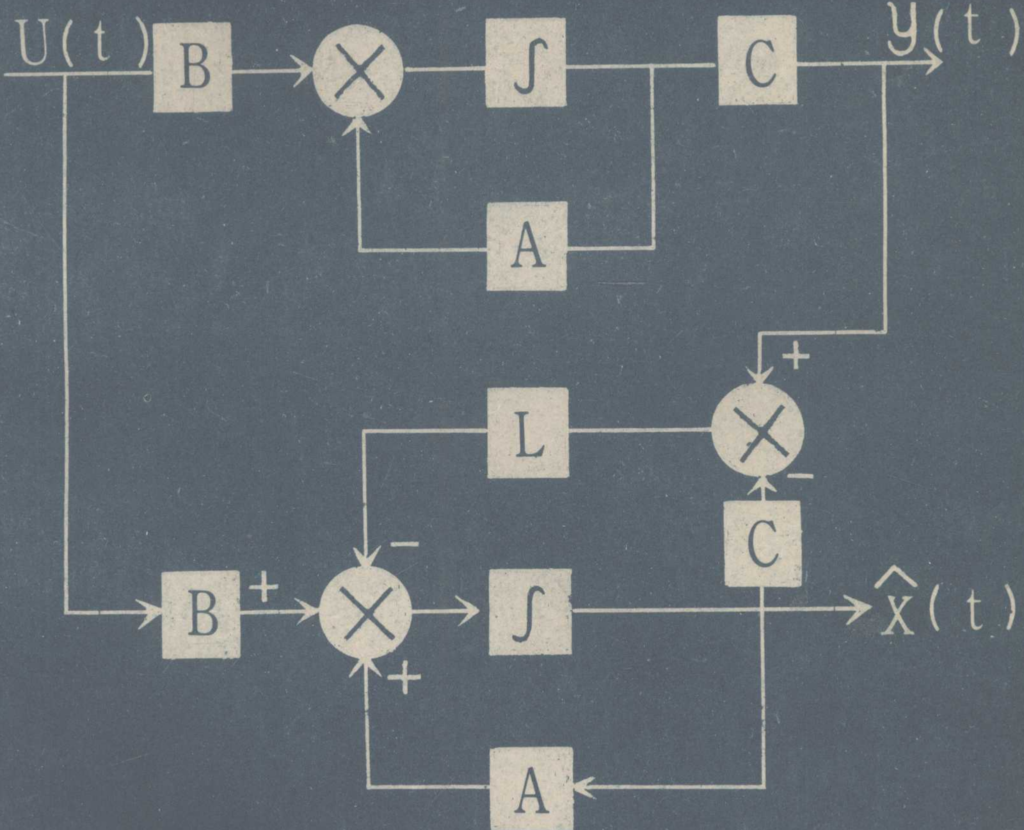
线性系统

LINEAR SYSTEM



彭永进 章云 编著

湖南科学技术出版社

线 性 系 统

彭永进 章 云 编著

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

线性系统

彭永进　章云编著

责任编辑：龚绍石

*

湖南科学技术出版社出版发行

(长沙市展览馆路 3 号)

湖南农科院印刷厂印刷

*

1992 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092 毫米　印张：16　字数：397,000

印数：1—1035

ISBN 7—5357—1221—5

TP·43　定价：14.00

前　言

线性系统的研究对象主要是线性常微分方程和差分方程描述的系统。经过半个多世纪的发展，线性系统理论已相当成熟，并已成为控制、通讯等学科的理论基础。

作者在多年的教学和科研实践中，对线性系统这一学科，有以下一些体会和感受：

第一，作者认为，需要一种统一的观点来概括现有的理论。线性系统的内容相当丰富，其主要研究方法有频域法、状态空间分析法、多项式矩阵分析法、代数分析法及几何分析法等等。各种方法各有自己发展的历史背景，自己的特点和用途，在理论上也都有一套相当严密的体系。作者认为：引用等价和等价系统的概念，以状态空间描述法和多项式矩阵描述法为主，可以建立一个统一的体系，然后再灵活地运用各种分析方法展开深入的研究，能得到较好的结果。

第二，线性系统这一学科的主要任务是研究"线性系统的结构"问题。更具体地说，是模态与稳定性、能控性、能观性、零点、极点和鲁棒性等概念。作者体会到，先用状态空间分析法进行分析，通过等价变换过渡到多项式矩阵和欧氏环矩阵，及其分式域的描述和分析方法，并阐明各种方法之间的关系，然后再用这些方法研究线性系统的综合专题，就能对"线性系统的结构"有清晰的理解。

第三，从微分方程及其解出发，可以更好地阐明各种方法的物理概念。线性系统用的数学工具较多，可能使读者感到抽象难学。本书的研究对象主要是线性常微分方程组，若能将各种分析方法与微分方程的解及其性能分析联系起来，就可以获得清晰的物理概念，找到各种方法的共同实质。

正是这些感受激励作者编著了本书。它是根据作者多年在湖南大学讲授工业自动化专业硕士研究生 60 学时的同名课程的讲稿整理而成的，可作为该专业及有关专业的研究生的教学用书，也可供其他学科工作人员参考。

本书第一、二章及第三章的前四节由湖南大学彭永进教授执笔，第三章后两节及第四章由广东工学院章云副教授执笔，所有的习题由章云副教授及湖南大学肖雁鸿老师收集整理，插图由彭崇老师整理。在本书编写过程中，湖南大学童调生教授、何鋆藻教授，中南工业大学陈际达教授，西南交大肖健副教授及肖雁鸿老师对本书提出了许多宝贵意见，特在此一并致谢。

由于作者水平所限，书中如有缺点和错误之处，敬请读者指正。

作者

1992 年 6 月于长沙

目　录

本书符号及缩写表

一、 符号

C	复数域
C_b	复平面上右半闭平面
C_g	复平面上左半开平面，即 C_b 的补集
E	欧氏整环
$\cdot^{k\times l}$	k 行，l 列矩阵，它的元为代数系统“·”的元
F	分式域；分与环
G	群
H_p	一般 *Hardy* 空间，$1<p<\infty$
H_2	H_2 空间
H_∞	H_∞ 空间
I	整数环
R	环，实数域
$R[s]$	实系数多项式环
$R(s)$	实系数有理函数域
$S(s)$	真稳定有理函数环
S	子环，集合
U	理想子环
X	主理想环
Z	整数环
$\mathscr{C}$	能控子空间
$\mathscr{O}$	能观子空间
$\mathscr{R}^m$	m 维向量空间
$\mathscr{V}$	一般向量空间，线性空间
$\mathscr{S}$	子空间
$\mathscr{U}$	输入空间
$\mathscr{X}$	状态空间
$\mathscr{Y}$	输出空间

$M(\cdot)$　代数系统“·”矩阵，即矩阵 M 的元为代数系统“·”的元

$[m_{ij}]_{k\times l}$ 元为 m_{ij}的 $k\times l$ 维矩阵

$\mathscr{N}$〔·〕 矩阵“·”的零空间

$\mathscr{R}$〔·〕 矩阵“·”的像空间

Sp〔·〕 由矩阵“·”的列向量张成的空间

deg　欧氏环元的次数

det　矩阵的行列式

$rank$　矩阵的秩

tr　矩阵的迹

∂_{ci}　矩阵第 i 列的列次

∂_{ri}　矩阵第 j 行的行次

二、 缩写

IOD　输入输出描述

MFD　矩阵分式

MIMO　多输入多输出(即多变量)

PMD　多项式矩阵描述

PSE　部份状态方程组

SE　状态方程组

SISO　单输入单输出(即单变量)

SSD　状态空间描述

绪　　论

线性系统理论是控制系统的一个重要的成熟的分支，也是自动控制、工业自动化、通讯等学科的理论基础；它不仅在工程技术和军事工业中获得广泛应用，而且在经济、生物、医学和环保等领域中受到极大的重视。可以预料，随着科学技术的发展，它的作用将越来越重要。因此，学习线性系统理论及其分析问题的方法，对自动控制和工业自动化专业来说是十分必要的，对其他专业也有所裨益。

§0—1　线性系统的研究对象

不同的文献中对"系统"作了很多不同的定义，本书不再深入研究这个问题。一般认为，系统是一些元素为完成某一特定任务而组合起来的集合。常用框图来表示一个系统（参见图 0—1—1），u 是它的输入量，y 是它的输出量，系统 Σ 的功能就是接受输入量 u，并按照一定的规律，根据 u 形成输出量 y。

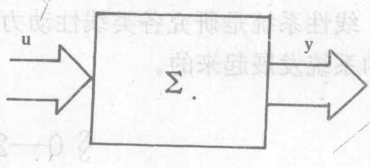


图 0—1—1

例如：电阻加热炉是一个系统，输入变量 u 是电功率、被加热工件的物理性能和环境温度，输出变量 y 是工件的温度；卫星也可以看成是一个系统，输入变量 u 是火箭的推力、大气的阻力和各个天体对它的引力，输出是卫星的轨道和姿态等；中国的人口也是一个系统，输入 u 是生活环境、伦理道德观念和人口政策等，输出 y 是人口的总数和人口的素质等。

系统的输入变量 u 和输出变量 y 之间的关系可以用一定的数学公式描述，这些公式反映了系统本身各元素之间以及系统与它所处的环境之间的关系。设系统 Σ 有 m 个输入变量 u_1、u_2、$\cdots u_m$ 和 p 个输出变量 y_1、y_2、$\cdots y_p$，则这一关系可表示为：

$$y=F(u) \tag{0—1—1}$$

式中：$u=[u_1 \quad u_2\cdots u_m]^T$　　$y=[y_1 \quad y_2\cdots y_p]^T$　分别为 m 和 p 维列向量。向量的向量函数 F 可以有各种形式。例如：

$$My=u,\ M\text{ 为 } p\times m \text{ 维常数矩阵} \tag{0—1—2}$$

$$y_1^2+y_2+3=u_1 \qquad y_1+y_2^2+5=u_2 \tag{0—1—3}$$

$$\sin y_1=u_2 \qquad \cos y_2=u_1+u_2 \tag{0—1—4}$$

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+2\frac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)=u_1(t) \tag{0—1—5}$$

$$(\frac{dy_1(t)}{dt})^2+2y_1(t)=u_1^3(t) \tag{0—1—6}$$

和 $$y_{n+2}+3y_{n+1}+y_n=u_n-u_{n-1} \tag{0—1—7}$$

分别是用一次代数方程组、高次代数方程组、超越方程组、线性常系数微分方程、非线性微分方程和线性常系数差分方程描述的系统。

在所有的系统中，满足如下两个条件则称为线性系统：

(1)叠加原理

$$u=u_a+u_b \Longrightarrow F(u)=F(u_a)+F(u_b) \tag{0—1—8a}$$

(2)齐次性条件：

$$u=\alpha u_a \Longrightarrow F(u)=\alpha F(u_a) \tag{0—1—8b}$$

也可将这两个条件综合为

$$u=\alpha u_a+\beta u_b \Longrightarrow F(u)=\alpha F(u_a)+\beta F(u_b) \tag{0—1—8c}$$

显然，上述各例中，只有式(0—1—2)、(0—1—5)和(0—1—7)是线性系统。

用微分方程和差分方程描述的系统的输出变量不仅与输入变量当前所取的值有关，而且与整个系统过去的"历史"有关。这种系统称为动力学系统。研究这种系统首先要考虑该方程是否有唯一的解，常用的检验方法是李普希兹条件：微分方程

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{0—1—9}$$

在区间$[t_1,t_2]$上有唯一解的充分条件是如下不等式成立：

$$\| f(x,t)-f(\tilde{x},t) \| \leqslant k \| x-\tilde{x} \|, k=\text{常数} \tag{0—1—10}$$

在工程上遇到的系统通常都能满足这一条件。

线性系统是研究各类线性动力学系统的学科，它是从研究用线性常系数常微分方程组描述的系统发展起来的。

§0—2 线性系统的研究方法

本书着重介绍的线性控制系统是控制理论的重要基础。从本世纪初发展到50年代，它就已初步形成了经典控制理论，其特点是用频域法分析单输入单输出系统。60年代至70年代，状态空间理论得到蓬勃的发展，取得了辉煌的成果，提出了能控性、能观性等深入系统内部结构的概念，并研究了多输入多输出系统和时变系统等经典法无法解决的问题，发展了以状态反馈和最优控制为核心的一系列设计方法。70年代以来又出现了五个新的发展方向

(1) 多项式矩阵理论。用微分算子的多项式矩阵作为数学工具，通过等价系统建立了各种描述方法之间的关系，逐步形成了一个统一的体系。这种方法在理论上具有承前启后的作用，在某些领域的实际应用也很成功。

(2) 多变量系统频域法。它的主要内容是将经典的频域法从单输入单输出系统推广到多输入多输出系统，建立了多输入多输出系统的奈奎斯特图、根轨迹法等设计方法，有较大的实用价值。

(3)几何方法。在状态空间分析法的基础上，用空间映射理论和拓朴理论对线性系统的结构进行深入探讨。理论上很成功，但较难实际应用。

(4)参数优化法。这是一种系统设计和综合的方法，其要点是将设计工作分成两步。第一步确定系统的结构，这种结构能保证系统具有某些定性的指标，例如：稳定、输出跟踪和物理能实现等；第二步再根据一定的目标函数优化系统的参数，以实现最佳的性能。这种设计方法已获得相当广泛的应用。

(5)真稳定有理分式矩阵描述和H_∞设计方法。真稳定有理分式形成一个环，如果系统的

传函在这个环内，则系统是稳定而且是物理可能实现的，因此它代表一种系统的结构，主要用于稳定性分析和反馈系统的综合。H_∞设计方法是用 *Hardy* 空间的 H_∞范数作为目标函数设计系统的参数，它能处理一类能量有界干扰信号，这更符合工程实际情况，它还为鲁棒性设计提供了良好的基础，是迄今为止最令人满意的一种设计方法。用真稳定有理分式矩阵分析以确定系统的结构，再用 H_∞设计方法计算系统的参数，已成为一个很有前途的新的研究方向。

§0—3　本书的内容

本书研究的对象是用线性常微分方程组描述的系统，但很多结论可以很容易地推广应用于线性差分方程描述的系统，也是分析其他线性动力学系统的基础。

本书的目的是向读者介绍线性系统的结构及分析方法，而其结构主要可归结为如下几个性能指标：模态和稳定性、能控性、能观性、极点、零点和鲁棒性。

本书以状态空间、多项式环及其分式域、和真稳定有理分式环及其分式域、以及它们的矩阵描述为主进行叙述。全书共分四章。第一章是预备知识，介绍本书要用到的一些代数系统。第二章先介绍状态空间描述法的主要理论，这种分析法是线性系统理论的一个里程碑，现已相当成熟并具有丰富的成果；然后通过等价变换过渡到多项式矩阵描述法，并由此建立与传统频域法的传函和传函矩阵的联系，形成一个完整的体系。这个体系能很好地概括和容纳直到80年代以来线性系统所取得的成果，也为今后的发展奠定了基础。第三章是在第二章建立的体系基础上讨论规范型、状态反馈和状态观测器，它是各种反馈控制系统的基础。第四章介绍线性系统综合设计的几个专题，其中前几节仍在第二章讨论的体系中进行，最后两节介绍了真稳定有理分式环描述法和 H_∞设计法，它的意义不仅在于介绍几个设计专题，更重要的是让读者进入这一新领域的大门。

每章后的习题仅作为基本概念和运算方法的练习，建议读者再找一些其他题目，例如文献[1]各章后面的习题及附录。

第一章　预备知识

§1—0　概述

本章介绍本书使用的主要数学工具：线性空间、欧氏环及其分式域、欧氏环矩阵和分式域矩阵。作为一门应用学科的著作，本书只能叙述有关概念和结论，至于更全面和严格的论证，可参考有关的数学书籍及文献。[10]

群、环和域是近世代数的重要代数系统。线性系统中常用的三种代数系统为：

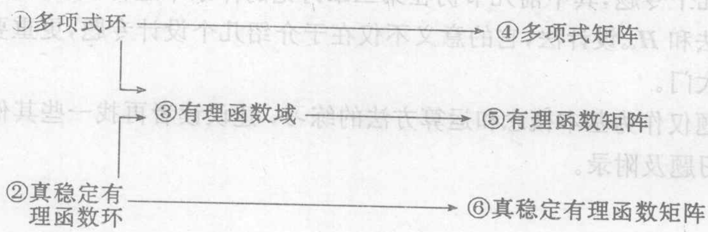
(1)微分算子的多项式。它用来表示变量的各阶导数的线性组合和微分方程。

(2)拉氏算子的有理函数。它用来表示系统的传递函数。

(3)拉氏算子的真稳定有理函数。它用来表示物理能实现的和稳定的系统的传递函数。

此外，对于多输入多输出系统，还要用到元在这些代数系统上的矩阵。

所有多项式或所有真稳定有理函数都分别形成一种欧氏环，由于它是无零因子的交换环，所以从这两个环都能得到各自的分式域，而它们的分式域，都是有理函数域。因此，线性系统中常用的代数系统具有如下的结构体系。



本章第 1 节结合应用和物理概念介绍这个体系，并以此为实例介绍群、环和域的基本概念。第 2 节以因式分解为主，研究欧氏环的一些性质。这里具有如下的层次结构：

$$\text{欧氏环} \subset \text{主理想环} \subset \text{唯一分解环} \subset \text{整环} \subset \text{环}$$

由于以后主要用欧氏环，很多定理都是从欧氏环来证的，但它们的大多数也适用于主理想环，有兴趣的读者可参考有关文献。[10]

第 3 节和第 4 节研究上述三种代数系统上的矩阵。多项式矩阵和真稳定有理分式矩阵都是欧氏环矩阵，主要从规范型和因式分解两方面进行研究。第 3 节还结合规范型介绍了等价关系和等价类，它是线性系统中用到的一个重要概念，也是研究各种规范型和建立各种描述方法之间关系的基础。第 4 节还研究了分式域矩阵的矩阵分式表示法。

第 5 节加深和补充了一些线性空间有关的知识。其中以下部分对第二章的状态空间分析法是至关重要的：一是状态空间的概念和基底变换；二是线性算子（特别是函数算子）的零空间和像空间。

§1—1 代数系统

本节首先介绍《线性系统》中常用的代数系统，然后介绍群、环和域的概念。

一、线性系统中常用的代数系统

线性系统主要研究用微分方程或微分方程组描述的系统，但采用的主要工具却是各种代数系统，包括多项式、有理函数、真稳定有理函数、线性空间、及各类矩阵等。本小节介绍这些代数系统的基本知识，并着重说明它们与用微分方程组描述的线性系统的关系。

1° 代数系统。 带有运算的集合称为代数系统。例如：

(1)复数及其加法和乘法，构成复数域 C

(2)实数及其加法和乘法，构成实数域 R

(3)整数及其加法和乘法，构成整数环 Z

环和域是两类重要的代数系统，其定义将在下一小节给出。以上三例中只谈到加法和乘法，而减法和除法可作为它们的逆运算，当然整数环中无除法。

2° 实系数多项式环 $R[s]$。 实系数多项式(简称多项式)

$$f(s)=\alpha_0 s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n \tag{1—1—1}$$

及其加法和乘法组成实系数多项式环 $R[s]$，简称多项式环；式中 α_i 均为实数($i=1,2,\cdots\cdots n$)。显然，在环 $R[s]$ 中，加法和乘法的结合律和交换律都成立，减法可作为加法的逆运算，但没有除法，因为两个多项式相除，其商不一定是多项式。

在线性系统中，多项式中的未定元 s 称为微分算子，它代表微分符号“d/dt”或“$\cdot\,'$”，s^n 代表“d^n/dt^n”或“$\cdot^{(n)}$”，而多项式 $f(s)$ 是一个算子，用它左乘一个变量 $y(t)$ 的含义为：

$$f(s)y(t)=\alpha_0 y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}y'(t)+\alpha_n y(t) \tag{1—1—2}$$

它是变量 $y(t)$ 及其直到 n 阶的各阶导数的线性组合，这种表示方法称为微分算子表示法。设 $p(s)$ 及 $q(s)$ 都是多项式，则常微分方程可表示为

$$p(s)y(t)=q(s)x(t) \tag{1—1—3}$$

例 1—1—1 设 $p(s)=s^2+1$，$q(s)=2s+1$，则式(1—1—3)代表的常微分方程为：

$$y''(t)+y(t)=2u'(t)+u(t)$$

环 $R[s]$ 中两个元 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ 的和与积都是一个复合算子。令

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s) \qquad \varphi(s)=f_1(s)\cdot f_2(s) \tag{1—1—4}$$

则

$$f(s)y(s)=f_1(s)y(t)+f_2(s)y(t) \tag{1—1—5a}$$

$$\varphi(s)y(t)=f_1(s)[f_2(s)y(t)] \tag{1—1—5b}$$

例 1—1—2 设 $f_1(s)=s^2+s+1$，$f_2(s)=s+2$，则有

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s)=s^2+2s+3$$
$$\varphi(s)=f_1(s)f_2(s)=s^3+3s^2+3s+2$$
而由式(1—1—5)的左、右两侧的公式都可求出
$$f(s)y(t)=y''(t)+2y'(t)+3y(t)$$
$$\varphi(s)y(t)=y'''(t)+3y''(t)+3y'(t)+2y(t)$$

如果只在时域范围内讨论问题，只能将 s 当成一个微分符号，$1/s$ 及有理函数皆无物理意义，因而所用的代数系统 $R[s]$ 没有除法。当然，在很多情况下，s 表示拉氏算子，允许出现 $1/s$ 和有理函数，那么，相应的代数系统已不再是多项式环，而是有理函数域。

3° **实系数有理函数域 $R(s)$。** 设 $a(s)$ 和 $b(s)$ 是多项式，而且 $a(s)\neq 0$，则实系数有理函数(简称有理函数)
$$g(s)=\frac{b(s)}{a(s)} \tag{1—1—6}$$
及其加法和乘法构成实系数有理函数域 $R(s)$，简称有理函数域。显然，在域 $R(s)$ 中加法和乘法的结合律和交换律都成立，减法和除法可作为加法和乘法的逆运算。

在《线性系统》中，有理函数用来表示单输入单输出系统(也称单变量系统，即输入变量和输出变量都是标量的系统，简称 *SISO* 系统：*Single Input Single Output*)的传递函数，简称传函。此时，符号 s 是拉氏算子。传函表示法和微分算子表示法的一个重要区别是前者所有的变量要用其变换式，而后者要用原函数。例如，设线性系统的微分方程如式(1—1—3)，则表达式
$$y(s)=\frac{q(s)}{p(s)}u(s) \qquad p(s)y(s)=q(s)u(s) \qquad p(s)y(t)=q(s)u(t)$$
都是正确的，其中前两式属传函表示法，最后一个公式属微分算子表示法。而 $y(t)=\frac{q(s)}{p(s)}u(t)$ 没有物理意义。

在式(1—1—6)中，多项式 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的零点，分别称为有理函数 $g(s)$ 的极点和零点。如果 s_o 是 $g(s)$ 的零点，则 $g(s_o)=0$；而如果 s_o 是 $g(s)$ 的极点，则 $\lim\limits_{s\to s_o}g(s)=\infty$。

在式(1—1—6)中，令 $deg\ a(s)$ 和 $deg\ b(s)$ 分别代表多项式 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的阶次，即式中 s 最高次项的次数。根据分子和分母的阶次不同，可分为：

(1) 严格真有理函数：$deg\ a(s)>deg\ b(s)$

(2) 真有理函数：$deg\ a(s)\geqslant deg\ b(s)$

(3) 非真有理函数：$deg\ a(s)<deg\ b(s)$

显然，若 $deg\ a(s)>deg\ b(s)$，则 $\lim\limits_{s\to\infty}g(s)=0$，所以严格真有理分式具有无穷远零点；类似地，对于非真理分式 $\lim\limits_{s\to\infty}g(s)=\infty$，所以它有无穷远极点。无穷远零点和极点也可能是多重的，这与多重有限零点和极点的定义类似。

例 1—1—3 严格真有理函数 $g_1(s)=\dfrac{(s-3)(s+4)}{s(s-1)^2(s+2)}$ 的零点为 3，−4，∞和∞，其中∞是它的二重零点，极点为 0，1，1 和 −2。

真有理函数 $g_2(s)=\dfrac{(s+5)(s-3)}{(s+7)(s+8)}$ 的零点为 −5 和 3，极点为 −7 和 −8。

非真有理函数 $g_3(s)=\dfrac{(s-1)(s+2)}{(s+5)}$ 的零点为 1 和 −2，极点为 −5 和∞。

4° **真稳定有理分式环 $S(s)$。** 在复平面上，令

$$C_b=\{s\,|\,Re\ s\geqslant 0,\text{或}\,|s|=\infty\} \qquad (1—1—7)$$

即右半平面、虚轴和无穷远点组成的区域，而令 C_g 为 C_b 的补集，即复平面上 C_b 外的区域。全部极点在 C_g 的真有理函数，及其加法和乘法，组成真稳定有理分式环 $S(s)$。显然，$S(s)$ 对加法和乘法是闭的，而且加法和乘法的结合律都成立，减法作为加法的逆运算，但对除法不闭。

例 1—1—4 有理分式 $g_1(s)=\dfrac{(s+4)}{(s+1)(s+2)}$，$g_2(s)=\dfrac{(s-6)}{(s+3)(s+5)}$ 的全部极点都在 C_g 内，所以它们是真稳定有理分式。其和与积分别为

$$g_1(s)+g_2(s)=\frac{(s+4)(s+3)(s+5)+(s+1)(s+2)(s-6)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+5)}$$

$$g_1(s)g_2(s)=\frac{(s+4)(s-6)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+5)}$$

它们的极点也都在 C_g 内。但 $\dfrac{g_1(s)}{g_2(s)}=\dfrac{(s+4)(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s-6)}$ 在 C_b 内有一个极点：$+6$。

如果某个系统的传函在环 $S(s)$ 内，则它具有如下特点：

(1) 它的传函是真的，因而它是物理可实现的。

(2) 它是渐近稳定的，因为全部极点的实部小于零。

非真的传函易受高频噪声干扰，所以控制系统设计的起码要求是使整个系统不但稳定，而且传函为真。今后这一设计要求可归结为：传函 $g(s)$ 要在环 $S(s)$ 内。

更进一步可指定一个稳定区，例如图 1—1—1 中的区域 D（不包括无穷远点）。也可认为极点全部在区域 D 内的有理函数及其加法、乘法组成真稳定有理函数环 $S(s)$。它不仅保证系统稳定，而且有一定的稳定裕量。

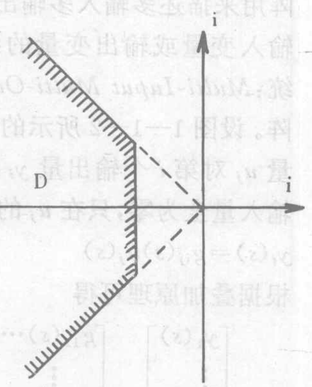


图 1—1—1

5° **线性空间 $\mathscr{V}$。**

在线性代数中已对线性空间进行了充分研究。《线性系统》中用得最多的是数组组成的向量空间 $\mathscr{R}^n$ 和微分方程的解空间。这些概念将在 §1—5 中介绍。

6° **矩阵。** 在线性代数中，已对矩阵进行了大量的研究，主要涉及到两类矩阵：元为实数的矩阵 A 及它的特征矩阵 $sI-A$。现在提出的矩阵的元为一般环 R 中的元，称为环 R 矩阵。环 R 全部矩阵的集合记为 $M(R)$，若指定为 k 行、l 列，则记为 $R^{k\times l}$，而 $[m_{ij}]_{k\times l}$ 表示第 $i\times j$ 个元为 m_{ij} 的 k 行 l 列矩阵。元为多项式的矩阵称之为多项式矩阵，全部多项式矩阵组成的集合记为 $M(R[s])$ 或 $R[s]^{k\times l}$。

在《线性系统》中，多项式矩阵用来描述微分方程组。多项式矩阵左乘一个向量的运算规则是：先按一般矩阵与向量乘法的规则展开，而其每个元与变量的乘积仍按多项式左乘变量的规则（式 1—1—2）处理。

例 1—1—5　令多项式矩阵　$M(s)=\begin{bmatrix} s+1 & s^2 \\ s+3 & s+4 \end{bmatrix}$ 则方程 $M(s)y(t)=0$ 代表齐次微分方程组

$$y'_1(t)+y_1(t)+y''_2(t)=0$$
$$y'_1(t)+3y_1(t)+y'_2(t)+4y_2(t)=0$$

例 1—1—6　状态方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 可写成多项式矩阵表达式

$$M(s)x(t)=Bu(t)$$

式中多项式矩阵 $M(s)$ 称为特征矩阵

$$M(s)=sI-A=\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & s-a_{nn} \end{bmatrix}$$

元为有理函数的矩阵称为有理函数矩阵，记为 $M(\boldsymbol{R}(s))$ 或 $R(s)^{k\times l}$。在《线性系统》中，有理函数矩阵用来描述多输入多输出系统（即多变量系统，它的输入变量或输出变量的维大于 1，简称：*MIMO* 系统：*Multi-Iuput Multi-Output*）的传函，称为传函矩阵。设图 1—1—2 所示的 *MIMO* 系统中第 j 个输入量 u_j 对第 i 个输出量 y_i 的传函为 $y_{ij}(s)$，即当其他输入量全为零，只在 u_j 的激励下，产生的 y_i 为

$$y_i(s)=g_{ij}(s)u_j(s) \tag{1—1—8}$$

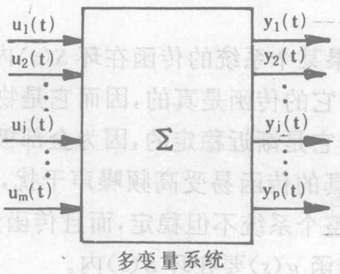


图 1—1—2　多变量系统

根据叠加原理可得

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_i(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11}(s)\cdots g_{1j}(s)\cdots g_{1m}(s) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ g_{i1}(s)\cdots g_{ij}(s)\cdots g_{im}(s) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ g_{p1}(s)\cdots g_{pj}(s)\cdots g_{pm}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix} \tag{1—1—9}$$

式中 $G(s)=[g_{ij}(s)]_{p\times m}$ 即为该系统的传函矩阵。

如果有理函数矩阵 $G(s)$ 中有一个元是非真，则称它为非真；否则称它为真；若 $G(s)$ 的每个元都是严格真，则称它为严格真。若 $G(s)$ 的每一个元都是真稳定有理分式，则称它为真稳定有理分式矩阵。

7°　**方阵环**。　行数和列数都等于 n 的矩阵构成一个矩阵环，它对加法和乘法都是封闭的。加法的结合律和交换律成立，但乘法交换律不成立。

方阵的元可以是实数、多项式、有理函数、或真稳定有理函数，它们的含义与 6°所讨论的矩阵相同。

二、群、环和域

群、环和域是三类最基本的代数系统，也是研究其他代数系统的基础。本节以《线性系统》中常用的代数系统为例，介绍群、环和域的初步概念。

8° 群 G。 先讨论一个集合和一种运算，这种运算可以指上述各代数系统中的加法，也可以指乘法，总之暂且只孤立地看其中的一种运算，并暂且称为"乘"法，用"$\circ$"表示。

设集合 G 中定义了一种"乘"法，现在来考察如下规律是否成立

(1)封闭性：$a,b\in G \Longrightarrow a\circ b\in G$ (1—1—10a)

(2)结合律：$a\circ b\circ c=(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ (1—1—10b)

(3)存在单位元。单位元 ε 的定义是任何元与它进行运算都维持不变，即$\forall\ a\in G$ 有

$\varepsilon\circ a=a\circ\varepsilon=a$ (1—1—10c)

(4)对于 G 中每一个元都存在逆元。即$\forall\ a\in G$ 都存在逆元 a^{-1} 使

$a^{-1}\circ a=a\circ a^{-1}=\varepsilon$ (1—1—10d)

(5)交换律：$a\circ b=b\circ a$ (1—1—10e)

如果考察的是实数域的加法，则显然上述五条规律都成立，其单位元为零，而$+a(-a)$的逆元为$-a(+a)$。但并非对于每一种代数系统的每一种运算上述规则都成立。例如：对于方阵的乘法，交换律就不成立，而且并非每个方阵都有逆阵。根据这些规律是否成立，可将只有一种运算的代数系统分为表 1—1—1 所示的五类群

表 1—1—1 群的分类

群 \ 规律	封闭性	结合律	存在单位元	每个元有逆	交换律
半群	✓	✓			
幺半群	✓	✓	✓		
交换半群	✓	✓			✓
群	✓	✓	✓	✓	
交换群	✓	✓	✓	✓	✓

根据表 1—1—1，可给出各类群的定义。例如，群的定义为：一个不空集合 G 对于一个叫做乘法的代数运算来说作成一个群，如果 G 对"乘"法是封闭的，"乘"法结合律成立，存在单位元和逆元。

显然，上一小节介绍的各种代数系统对加法都作成一个交换群(矩阵的加法只能在维相容的情况下进行)，称为加群。对于加群，还是回到传统习惯，将加法的单位元称为零元，逆元称为负元。由于负元存在，在加群中也存在减法。而对于乘法，情况要复杂些，下面先介绍环和域的概念，再来分析这个问题。

9° 环 R 和域 F。 一个集合 R 叫做一个环，如果

(1)定义了加法和乘法，对加法作成一个加群，而对乘法作成一个半群；