高等学校规划教材

电磁场与波理论基础

单志勇　李丹美　姜国兴　编
陈　光　郭爱煌　审

DIANCICHANG
YU BOLILUN JICHU

化学工业出版社

高等学校规划教材

电磁场与波理论基础

单志勇　李丹美　姜国兴　编
陈　光　郭爱煌　审

化学工业出版社
·北京·

本书分为矢量分析、静电场、静磁场、时变电磁场、平面电磁波5章，附录介绍了静态场边值问题及其研究方法，如分离变量法、格林函数法、保角变换法、镜像法等。内容上注重电磁场的基本理论，力求简单明了，深入浅出。

本书可以作为高等院校电子信息工程、通信工程、电子科学与技术等相关专业学生的教材，也可作为从事相关工作科研人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与波理论基础/单志勇，李丹美，姜国兴编.
北京：化学工业出版社，2008.9
高等学校规划教材
ISBN 978-7-122-02938-6

Ⅰ.电…　Ⅱ.①单…②李…③姜…　Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材　Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第122925号

责任编辑：郝英华　唐旭华　　　装帧设计：王晓宇
责任校对：陶燕华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：北京市彩桥印刷有限责任公司
720mm×1000mm　1/16　印张 8¾　字数162千字　　2009年1月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：16.00元

前　言

电磁场这门课程是电子类专业本科生的一门重要基础课。现代电子科学与技术，特别是通信、电视、雷达、电子对抗、遥感及电子测量等都离不开电磁波理论，离不开电磁波的发射、传播、接收。这门课程对于本科生创造性思维、严谨的学风培养起到很好的作用。学好电磁场不仅十分必要，而且非常重要，被列为电子类专业必修课。

本书分为 5 章，第 1 章讲述矢量分析数学基础知识，这是对高等数学中矢量知识的简单回顾，是研究电磁场的工具。第 2 章是静电场，力求简单明了。第 3 章讨论了静磁场，给导体通以恒稳电流，周围会产生静磁场。这两章主要讲基本原理和计算公式。在此基础上，第 4 章研究了时变的即非静止的电场、磁场，导出了描述电磁运动规律的麦克斯韦方程。第 5 章从电磁波传播的角度，讲了简单的电磁波——平面电磁波的规律。附录介绍了静态场的边值问题，介绍了格林函数、镜像法、保角变换法等较深的电磁场研究方法。

本书是结合东华大学、同济大学等院校电磁场课程实际及其本科教学大纲编写的教材。编写过程中得到了东华大学方建安、丁永生、仇润鹤、李德敏、陈光等院系领导的大力支持，上海交通大学周希朗教授、同济大学郭爱煌教授为本书提出了许多宝贵意见。陆艳萍等录入了大部分书稿，并为绘图和书稿的修改付出了大量的辛勤劳动，一并在此表达诚挚的谢意。

因作者水平有限，书中错误之处希望同仁、同学们批评指正，不吝赐教。

编者

2008 年 6 月于上海

目　　录

1 矢量分析

1.1 引言

本章主要介绍矢量分析、场的概念和表示方法、常用的正交坐标系，标量场的梯度，矢量场的通量、散度，矢量场的环流、旋度等。矢量分析是分析电磁场问题的基本数学工具，是学好电磁场这门课程必须掌握的知识。

在空间或空间的某一局部区域 V 上分布着某一物理量，则 V 就构成一个场。如果被描述的物理量是标量，则 V 被称为标量场；如果被描述的物理量是矢量，则被称为矢量场。一区域中各点的温度分布是一个标量场，密度分布是一个标量场；而某一区域中各点流体的流速构成一个矢量场，各点流体的压力分布也构成一个矢量场。研究一个场，首先要明确此场的分布空间，其次看场代表一个什么样的物理量，怎样分布。对于给定的场，任何时刻在所研究空间中的每一点它都有一个定值，这个值叫该点的场量。因此，一个场可用定义在相同区域中的一个函数来描述。一个标量场可用一个标量函数来描述；一个矢量场可用一个矢量函数来描述。描述物理系统状态的物理量不仅按空间分布，一般还随时间变化。因此，场可能是随时间变化的。如果一个物理系统的状态只按空间分布，不随时间变化，也就是说，物理系统的状态是静态的，由此定义的场也是静态的，这样的场称为静态场；其场函数与时间无关；如果一个场的场量不仅按空间分布，还随时间变化，这样的场分布是动态的，称为动态场或时变场。研究场的梯度、散度、旋度，刻画场的性质，需要用到矢量分析，电磁场就是用矢量分析来刻画的。

1.2 标量和矢量

一个用大小就能够完整地描述的物理量称为标量。用一个数可以完整地描述它。

一个有大小和方向的物理量称为矢量。力、速度、力矩、电场强度和加速度等都是矢量。一个矢量常用一条带方向的线段来表示。

两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，如果有相同的大小（长度）和方向，则称它们相等，记为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

一个矢量的大小为零称为空矢量（null vector）或零矢量（zero vector）。在一组矢量所构成的集合上定义加法和数乘，且满足加法交换律、加法结合律、加法对

称法的分配律等八条运算律，就得到一个线性空间。

1.3 坐标系

处理矢量的和、差、积，需要把矢量沿坐标系坐标轴各个方向分解，常用的坐标系有直角坐标系、球坐标系和圆柱坐标系。

(1) 直角坐标系

直角坐标系由三条相互垂直相交的直线组成，这三条直线分别记为 x，y，z 轴，三条直线交点为原点，用单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 表示沿 x，y，z 轴的三个方向，$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 构成三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基，空间中任意一点 $P(x,y,z)$，对应一位置矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$，其中 $x\boldsymbol{a}_x$，$y\boldsymbol{a}_y$，$z\boldsymbol{a}_z$ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 在 x，y，z 坐标轴上的投影，$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 构成右手螺旋系，即右手四指由 $\boldsymbol{a}_x$ 旋转至 $\boldsymbol{a}_y$，拇指指向即 $\boldsymbol{a}_z$ 的方向。

$$\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_x=1,\ \boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y=1,\ \boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_z=1$$
$$\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_x=0$$
$$\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z,\ \boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_x,\ \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y$$

设任意两个矢量

$$\boldsymbol{A}=X_1\boldsymbol{a}_x+Y_1\boldsymbol{a}_y+Z_1\boldsymbol{a}_z,\ \boldsymbol{B}=X_2\boldsymbol{a}_x+Y_2\boldsymbol{a}_y+Z_2\boldsymbol{a}_z$$

则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的点乘与叉乘分别定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(X_1\boldsymbol{a}_x+Y_1\boldsymbol{a}_y+Z_1\boldsymbol{a}_z)\times(X_2\boldsymbol{a}_x+Y_2\boldsymbol{a}_y+Z_2\boldsymbol{a}_z)\\&=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\boldsymbol{a}_x+(Z_1X_2-X_1Z_2)\boldsymbol{a}_y+(X_1Y_2-Y_1X_2)\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

定义混合积为
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{C}=X_3\boldsymbol{a}_x+Y_3\boldsymbol{a}_y+Z_3\boldsymbol{a}_z$。

混合积表示以三矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为棱的平行四面体体积。

(2) 圆柱坐标系

空间一点 $P(x,y,z)$，也可以在圆柱坐标系中由 ρ，ϕ，z 表示，其中 ρ 是 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$ 在 xOy 面上投影向量的模，ϕ 是方位角，正 x 轴为始边，z 是 $\boldsymbol{r}$ 在 z 轴上的分量。

$$\begin{cases}x=\rho\cos\phi\\ y=\rho\sin\phi\\ z=z\end{cases}$$

这是直角坐标系和圆柱坐标系变换。圆柱坐标系中，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=$常数，$\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=$常数，$z=$常数均表示某一个坐标面，这三个坐标面垂直，即可建立直角坐标系，标准基为 $\boldsymbol{a}_\rho$，$\boldsymbol{a}_\phi$，$\boldsymbol{a}_z$。

设矢量

$$\mathbf{A}=A_\rho\boldsymbol{a}_\rho+A_\phi\boldsymbol{a}_\phi+A_z\boldsymbol{a}_z\text{，}\mathbf{B}=B_\rho\boldsymbol{a}_\rho+B_\phi\boldsymbol{a}_\phi+B_z\boldsymbol{a}_z$$

则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_\rho B_\rho+A_\phi B_\phi+A_z B_z$$

显然直角坐标系 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 标准基与圆柱坐标系标准基 $\boldsymbol{a}_\rho$，$\boldsymbol{a}_\phi$，$\boldsymbol{a}_z$ 之间可以相互线性表示（如图 1-1）。

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_\rho=(\cos\phi)\boldsymbol{a}_x+(\sin\phi)\boldsymbol{a}_y\\ \boldsymbol{a}_\phi=-(\sin\phi)\boldsymbol{a}_x+(\cos\phi)\boldsymbol{a}_y\\ \boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_z\end{cases}$$

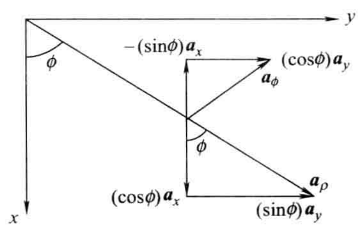


图 1-1 直角坐标系与圆柱坐标系基矢量之间的关系

称矩阵 $\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 为过渡矩阵，或矢量变换矩阵。设（A_x，A_y，A_z）是直角坐标系中的一点，（A_ρ，A_ϕ，A_z）是圆柱坐标系中的一点，则

$$\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\rho\\ A_\phi\\ A_z\end{bmatrix}$$

(3) 球坐标系

如图 1-2(a) 所示，空间一点 $P(x,y,z)$，还可以在球坐标系中由 r，θ，ϕ 表示。r 是位置矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$ 的长度；θ 是正 z 轴与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，正 z 轴可作为始边，称为仰角；ϕ 称为方位角，始边是 x 轴，终边是 $\boldsymbol{r}$ 在 xOy 面上的投影向量；z 是 $\boldsymbol{r}$ 在 z 轴上的分量。P 点球坐标为（r，θ，ϕ），显然

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$

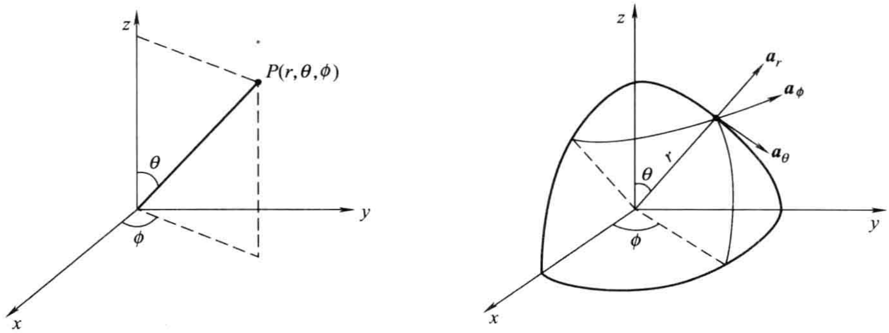
$$y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=r\cos\phi$$

沿着三个变量 r，θ，ϕ 增加的方向，取单位长度的三个矢量 $\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{a}_\theta$，$\boldsymbol{a}_\phi$，由图 1-2(b) 可见，这三个矢量两两相互垂直，在三维空间中，构成了一组标准基矢量。不难验证

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 1,\ i=j=r,\ \theta \text{ 或 } \phi$$

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0,\ i \neq j,\text{下标 } i,\ j \text{ 取 } r,\ \theta \text{ 或 } \phi$$



(a) 球坐标系中任意一点的表示　　(b) 球坐标系示意图

图 1-2　球坐标系

1.4　曲线积分、曲面积分和体积分

(1) 曲线积分

① 第一类型的曲线积分。设有一线形场 $\overset{\frown}{AB}$，其密度是 $\rho(x,y)$，则线形场的质量为 $m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$，$n\to\infty$，$\Delta m_i$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 线上，$\overset{\frown}{AB}$ 分隔成 n 小段后的第 i 段长 Δl_i 的质量，$\Delta m_i=\rho(x_i,y_i)\Delta l_i$，当 $n\to\infty$ 时，用积分表示为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}\rho(x,y)\,\mathrm{d}l$$

② 第二种类型的曲线积分。设有一质点在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，从 A 运动到 B，则 $\boldsymbol{F}$ 对质点做功为 $W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i$，其中 ΔW_i 为每一小段位移 Δl_i 上所做的功，$n\to\infty$，用积分表示为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

又设

$$\boldsymbol{F}=P(x,y)\boldsymbol{a}_x+Q(x,y)\boldsymbol{a}_y,\ \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y$$

上述积分可化为

$$\int_c\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_c P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

式中，c 为从 A 到 B 的运动路径。

如果$\overset{\frown}{AB}$可用参数方程表示

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

上述积分化为

$$\int_{\alpha}^{\beta}P[x(t),y(t)]x'(t)\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{\beta}Q[x(t),y(t)]y'(t)\mathrm{d}t$$

如果 c 是矢量沿路径的矢量线积分，则积分可写为

$$\int_{c}\boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2) 坐标系中的微元

① 直角坐标系。把体积分成若干微元 $\mathrm{d}v=\Delta x\Delta y\Delta z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，如图 1-3 所示，其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是长方阵，其面积微元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_x,\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_y,\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_z$$

空间两点 P，Q 连线上的微元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z$$

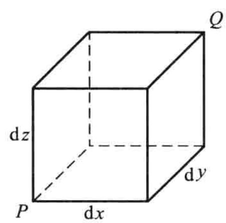


图 1-3 直角坐标系中的微元 $\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_x$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_y$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_z$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

② 圆柱坐标系。圆柱坐标系中 ρ，ϕ，z 三个变量取值范围

$$\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2,\ \phi_1\leqslant\phi\leqslant\phi_2,\ z_1\leqslant z\leqslant z_2$$

式中，ρ_1，ρ_2，ϕ_1，ϕ_2，z_1，z_2 为常数。

对区间 $[\rho_1,\rho_2]$，$[\phi_1,\phi_2]$，$[z_1,z_2]$ 进行分割，每一个体积元如图 1-4 所示。

$$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\cdot\mathrm{d}\phi\cdot\mathrm{d}z$$

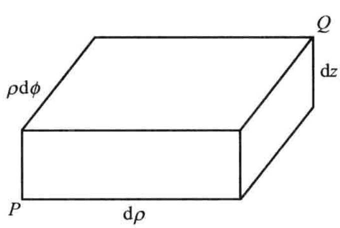


图 1-4 圆柱坐标系下的体积微元 $\mathrm{d}v$ 与面积微元

面积微元（矢量）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\rho=\rho\mathrm{d}\phi\cdot\mathrm{d}z\cdot\boldsymbol{a}_\rho$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\phi=\mathrm{d}\rho\cdot\mathrm{d}z\cdot\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\rho\mathrm{d}\rho\cdot\mathrm{d}\phi\cdot\boldsymbol{a}_z$$

③ 球坐标系。球坐标系中，设 P 点坐标是 (r,θ,ϕ)，Q 点坐标是 $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$，如图 1-5 所示，于是

$$\mathrm{d}v=r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{s}_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_r\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_\theta=r\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_\phi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\phi\end{cases}$$

$$\boldsymbol{PQ}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_r+r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

如果 c 是闭合曲线，$\int_c\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_c\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，用 $\oint_c$ 表示闭合曲线的积分。

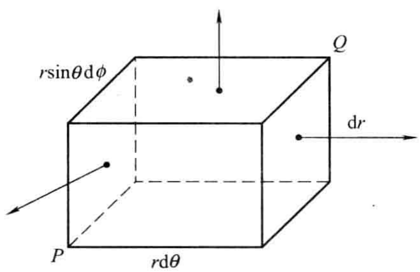


图 1-5　球坐标系下的体积微元 dv 与面积微元

(3) 面积分

① 第一类面积分。设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑或逐片光滑的曲面块 s 上有定义，若当 $\delta(T)\to0$ 时，函数 $f(x,y,z)$ 在曲面上和式极限存在

$$\lim_{\delta(T)\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k=A$$

式中，$\delta(T)$ 是面积微元最大直径，ξ_k，η_k，ζ_k 是面积微元 $\Delta\sigma_k$ 上任意一点，s 被分割成 n 份。$\lim\limits_{\delta(T)\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k$ 称为黎曼和。

② 第二类曲面积分。在曲面 s 上，如果面积微元 $\Delta\boldsymbol{s}$ 与矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的数量积和式极限存在，即

$$\int_s\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\mathrm{s}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta s_i\to0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i=A$$

若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\Delta\boldsymbol{s}$ 的矢量积和式极限存在，写为

$$\int_s \boldsymbol{F} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \times \Delta \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{F}$ 向量的第二类曲面积分存在。

(4) 体积分

将积分区域 v 分成几个小体积微元，当 $n\to\infty$，每个 $\mathrm{d}v\to 0$ 时，和式的极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta v_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i = \int_v f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在，称 $\int_v f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 为函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上的体积分。$f(x,y,z)$ 为被积函数，V 为积分区域。

【例 1-1】 设矢量场 $\boldsymbol{A}=(4x+9y)\boldsymbol{a}_x-14yz\boldsymbol{a}_y+8x^2z\boldsymbol{a}_z$，求 $\int_c \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。其中 c 是

① 沿点 $P(0,0,0)$ 到 $Q(1,1,1)$ 的曲线：$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。

② 沿线段 $\overline{PQ}$，P，Q 位置同①。

解 ①

$$\int_c \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^1 (4t+9t^2-28t^6+24t^7)\mathrm{d}t = 4$$

② $0\leqslant x$，y，$z\leqslant 1$，在线段 $\overline{PQ}$ 上，$x=y=z$

$$\int_c \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^1 (13x-14x^2+8x^3)\mathrm{d}x = 3.83$$

【例 1-2】 设 $0\leqslant x$，y，$z\leqslant 1$，围成一立方体的表面积，求 $\oint_s \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$。$\boldsymbol{r}$ 是立方体上任一点的位置矢量。

解 令

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z$$

在面 $x=1$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_x$$

$$\int_{x=1\text{面}} \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = 1$$

在面 $x=0$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_x$$

$$\int_{x=0\text{面}} \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

在面 $y=1$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_y$$

$$\int_{y=1\text{面}} \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}z = 1$$

在面 $y=0$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_y$$

$$\int_{y=0\text{面}}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

在面 $z=1$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_z$$

$$\int_{z=1\text{面}}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}z=1$$

在面 $z=0$ 上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_z$$

$$\int_{z=0\text{面}}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

所以

$$\int_s\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=1+0+1+0+1+0=3$$

【例 1-3】 设半径为 2 的球，质量密度为$\frac{1000}{r}\cos\frac{\phi}{4}$，求总质量。

解 $m=\int_v\frac{1000}{r}\cos\frac{\phi}{4}\mathrm{d}v=\int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r^2\sin\theta)\frac{1000}{r}\cos\frac{\phi}{4}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=16000$

习　题　1

1-1 求函数 $\varphi=xy+z-xyz$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿方向角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向导数。

1-2 求函数 $\varphi=xyz$ 在点 $M(5,1,2)$处沿着点$(5,1,2)$ 到点 $(9,4,19)$ 的方向导数。

1-3 已知 $\varphi=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求在点 $(0,0,0)$和点$(1,1,1)$ 处的梯度。

1-4 运用散度定理计算下列积分

$$I=\oiint_s[xz^2\boldsymbol{a}_x+(x^2y-z^3)\boldsymbol{a}_y+(2xy+y^2z)\boldsymbol{a}_z]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

s 是 $z=0$ 和 $z=(a^2-x^2-y^2)^{1/2}$所围成的半球区域的外表面。

1-5 试求$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和$\nabla\times\boldsymbol{A}$。

① $\boldsymbol{A}=xy^2z^3\boldsymbol{a}_x+x^3z\boldsymbol{a}_y+x^2y^2\boldsymbol{a}_z$

② $\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)=\rho^2\cos\phi\boldsymbol{a}_\rho+\rho^2\sin\phi\boldsymbol{a}_z$

③ $\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi)=r\sin\theta\boldsymbol{a}_r+\frac{1}{r}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r^2}\cos\theta\boldsymbol{a}_\phi$

1-6 证明下列恒等式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

1-7 验证下列恒等式

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$
$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f$$
$$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla f\times\boldsymbol{A}$$

1-8 设矢量场$\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{a}_x+x^2y\boldsymbol{a}_y+x^2z\boldsymbol{a}_z$，区域$V$由半径为4的圆柱面和$z=0$，$z=2$两平面围成，计算矢量$\boldsymbol{A}$的散度，以及$\boldsymbol{A}$在$V$的表面$s$上的面积分（总通量）$\oint_s\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$。并验证散度定理。

1-9 求$\boldsymbol{D}=10\cos\phi\,\boldsymbol{a}_\rho$在圆面$x^2+y^2=4$上的通量。

1-10 以角速度$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{a}_x+\omega_y\boldsymbol{a}_y+\omega_z\boldsymbol{a}_z$绕$z$轴旋转的液体，旋转时液体不扩散，求液体质点的切向速度$\boldsymbol{v}$的旋度。

1-11 验证恒等式

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

2 静 电 场

在掌握矢量分析之后，可利用矢量分析研究电磁场理论。这一章研究静电场，相对于观察者静止的电荷产生的场为静电场。电荷集中于空间某一点或分布于某个区域。静止的电荷是恒定不变的。两个电荷之间存在相互作用力，可用库仑定律来描述。本章在库仑定律基础上，定义电场强度、电位。进一步讨论有关静电场方程、边界条件、系统电容等。

2.1 库仑定律

法国科学家库仑（Coulomb，1736～1806）在实验基础上总结出了一个带电粒子与另一个带电粒子之间相互作用力的定量规律：真空中两静止带电粒子之间相互作用力与它们电量的乘积成正比，与它们距离平方成反比，作用力方向沿它们的连接线，异性电荷相吸，同性电荷相斥。

库仑定律：假设空间中有两个点电荷 q_1，q_2，分别位于点 $P_1(x,y,z)$，$P_2(x',y',z')$，如图 2-1 所示，则 q_1 对 q_2 产生的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{Kq_1q_2}{R^2}\boldsymbol{a}_{12}$$

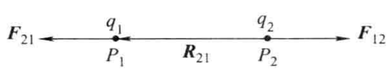


图 2-1 真空中两静止点电荷相互作用力

记 q_2 对 q_1 的作用力为 $\boldsymbol{F}_{21}$，它与 $\boldsymbol{F}_{12}$ 大小相等、方向相反。$\boldsymbol{F}_{12}$ 是 q_1 对 q_2 的作用力，K 是比例常数，$R=|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2|$ 表示向量 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 的模（两点电荷间的距离）。$\boldsymbol{a}_{12}$ 表示 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 的单位矢量，$\boldsymbol{a}_{12}=\dfrac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}{|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2|}=\dfrac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}{R}$。$K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，$\varepsilon_0=\dfrac{10^{-9}}{36\pi}$F/m。

设 P_1 点对应位置矢量 $\boldsymbol{r}_1=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$。$P_2$ 对应位置矢量 $\boldsymbol{r}_2=x'\boldsymbol{a}_x+y'\boldsymbol{a}_y+z'\boldsymbol{a}_z$，则库仑定律又可以表述为：$\boldsymbol{F}_{12}=\dfrac{q_1q_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}$。这个定律可以推广到带电体而非点电荷的情形。把复杂的带电体分割成若干个点电荷来处理就可以了。

【例 2-1】 设两点电荷带电量为 7mC 和 49μC，分别位于自由空间点(2,3,6)和(0,0,0)。试计算 7mC 电荷所受电场力。

解 令 $q_1=7$mC，$q_2=49\mu$C，q_2 到 q_1 距离矢量为

$$\boldsymbol{R}_{21}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y+6\boldsymbol{a}_z$$

$$|\boldsymbol{R}_{21}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7\ (\mathrm{m})$$

$$K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$$

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{9\times10^9\times7\times10^{-3}\times49\times10^{-6}}{7^3}(2\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y+6\boldsymbol{a}_z)=18\boldsymbol{a}_x+27\boldsymbol{a}_y+54\boldsymbol{a}_z$$

所以 q_1 所受力大小为

$$\sqrt{18^2+27^2+54^2}=63\ (\mathrm{N})$$

2.2 电场强度

(1) 分布电荷

带电体尺寸远远小于它们之间的距离，可以把带电体作为点电荷处理，否则，应当作为分布于某一区域的分布电荷来处理。分布电荷有三种类型，可以用电荷密度来描述。

① 体电荷密度：电荷分布在某一体积内，定义体电荷密度

$$\rho_\mathrm{v}=\lim_{\Delta v\to0}\frac{\Delta q}{\Delta v}$$

② 面电荷密度：若电荷分布在某一面状区域，定义面电荷密度

$$\rho_\mathrm{s}=\lim_{\Delta s\to0}\frac{\Delta q}{\Delta s}$$

③ 线电荷密度：若电荷分布在一条细线上，其线密度

$$\rho_\mathrm{l}=\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta q}{\Delta l}$$

(2) 电场强度

两个电荷之间的作用力可以用库仑定律来描述，当一个电荷朝另一个电荷运动时，相互之间的作用力将发生改变，但这种改变需要一段时间，换句话说，电荷之间作用力增加时，存在某种物质，把这种作用力从一个电荷传递到另一个电荷，这种物质称为场。作用力越大场越强，下面引入场的定义。

电场强度定义为

$$\boldsymbol{E}=\lim_{q\to0}\frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

当 $q\to0$ 时，试验电荷 q 本身产生的电场对原始电场的影响几乎可以忽略不计。由库仑定律，空间中任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 处点电荷 q，在点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 处产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{a}_R$$

式中，$\boldsymbol{r}_1$ 为点 P_1 对应的位置矢量；$\boldsymbol{r}_2$ 为点 P_2 对应的位置矢量；$\boldsymbol{a}_R$ 是单位向